

Задания **очного** тура олимпиады «Ломоносов» по робототехнике 2016/17

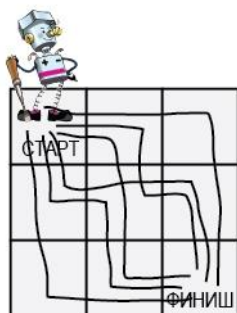
5—6 классы

1. Самоделкин хочет пройти из верхнего левого угла в нижний правый угол поля 3x3. Сколько различных вариантов маршрута есть у Самоделкина, если он может ходить только вниз или вправо.



Решение

Смотри рисунок. У Самоделкина шесть различных вариантов.



2. Самоделкин забыл установленный на компьютер пароль. Он смог вспомнить, что пароль состоит из трёх цифр, и среди этих цифр нет «2», «0», «1», «7». Какое максимальное количество попыток может потребоваться Самоделкину, чтобы подобрать пароль для компьютера?

Решение

Так как на каждом из трёх мест в пароле может стоять шесть цифр, общее количество возможных паролей $6 \times 6 \times 6 = 216$, и соответственно максимальное количество попыток также равно 216.



3. Для проведения эксперимента Самоделкину понадобился шнур длиной ровно $\frac{1}{2}$ метра. Оказалось, что у него есть только шнур длиной $\frac{2}{3}$ метра и ножницы. Линейки и других измерительных устройств под рукой не оказалось. Сможет ли Самоделкин провести эксперимент?

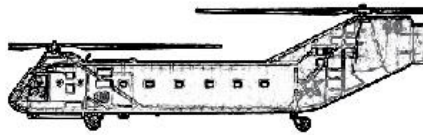
Решение

Если сложить шнур пополам два раза и отрезать от конца до ближайшего сгиба, таким образом отрежется четверть от двух третей, оставшаяся часть шнура составит три четверти от двух третей, то есть одну вторую.

4. Вертолёт Ми-6 оснащен одним несущим винтом с вертикальной осью и одним хвостовым, осью которого перпендикулярна оси большого винта. Вертолёт Як-24 имеет два несущих винта расположенных на параллельных осях. У вертолёта Ка-5 два несущих соосных винта. Объясните почему у этих вертолётов по два винта. Бывают ли вертолёты с одним винтом?



МИ-6



ЯК-24



КА-5

Решение

Если на вертолёте установить только несущий винт, то в воздухе корпус вертолёта будет вращаться в направлении, противоположенном направлению вращения винта. Второй винт вертолёта предотвращает неуправляемое вращение корпуса. У Ми-6 хвостовой винт создает момент, гасящий вращение корпуса. У Як-24 и Ка-5 винты вращаются в противоположных направлениях и моменты, которые передаются на корпус, компенсируются.

Вертолёты с одним только несущим винтом бывают. Вращательный момент у них компенсируется потоком воздуха, который нагнетается специальной турбиной и выдувается с одной из боковых сторон в хвосте.

Задания очного тура олимпиады «Ломоносов» по робототехнике 2016/17

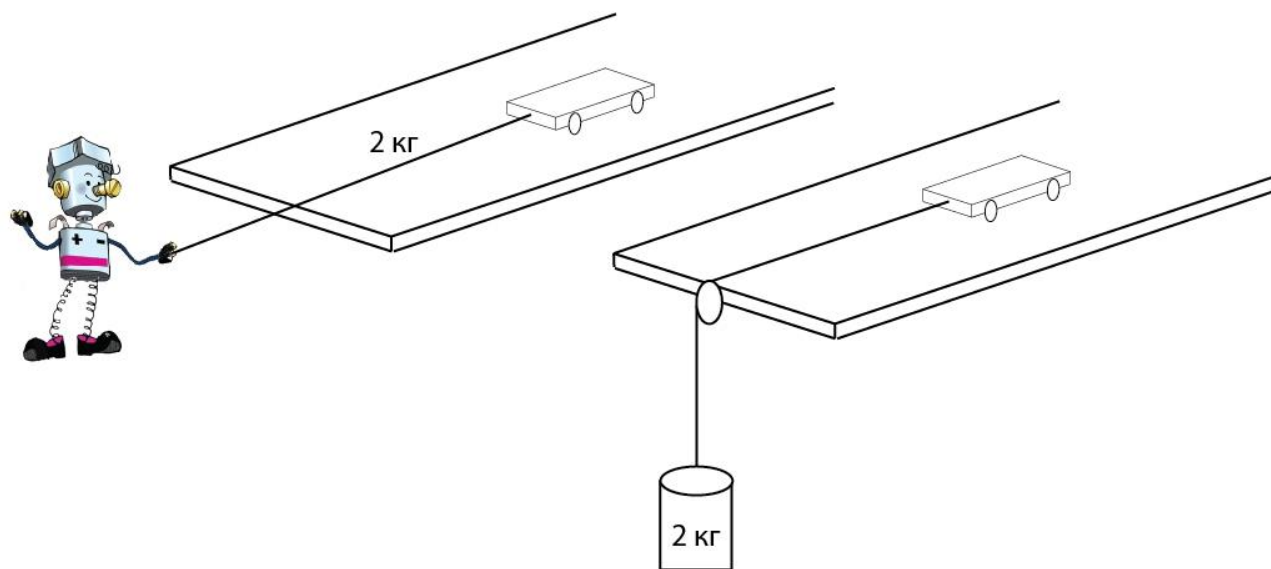
7—9 классы

1. Нашел Самоделкин на складе неисправного R2D2 и инструкцию по ремонту. В инструкции указывалось, что нужно каждый из 17 блоков микросхем соединить проводами с 9 блоками из того же набора по определенной схеме. Сможет ли Самоделкин починить R2D2?

Решение

Подсчитаем количество проводов: число 17×9 нужно поделить пополам, так как каждый провод подсчитан дважды. Но 17×9 нечетное число. Поэтому Самоделкин не сможет починить R2D2.

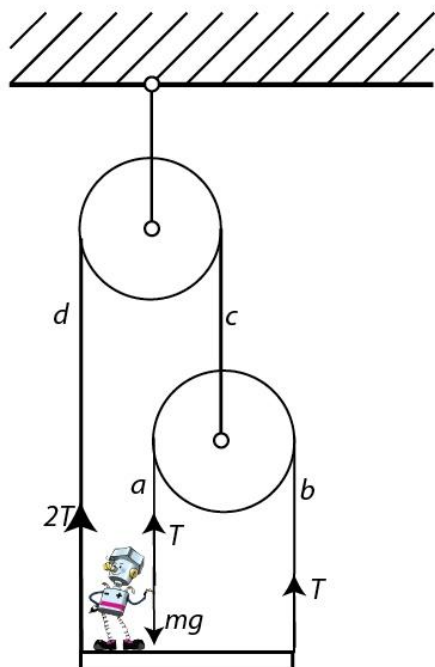
2. Самоделкин решил провести опыт с двумя одинаковыми тележками. К одной он привязал гирию массой 2 кг, а вторую потянул за веревку с усилием 2 кг. Какая из двух тележек быстрее доедет до края стола? Ответ поясните.



Решение

Вес гири сообщает ускорение самой гире и тележке; для второй тележки сила руки приложена только к тележке. Следовательно, эта тележка будет двигаться с большим ускорением и раньше доедет до края стола.

3. С какой силой T должен Самоделкин тянуть веревку, чтобы удержать доску в равновесии, если масса Самоделкина $m=61,3$ кг? Массами доски, веревки и блока можно пренебречь. Ускорение свободного падения считать $g=9,8$ м/с².

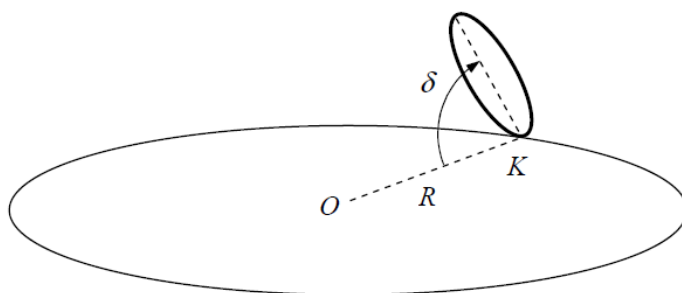


Решение

Пусть Самоделкин тянет веревку a с силой T . Тогда сила натяжения веревки b тоже будет T . Сила натяжения веревки c уравнивает совокупно действие двух параллельных сил T и T , следовательно, она равна $2T$. Тогда сила натяжения веревки d также будет равна $2T$. Доска висит на двух веревках – b и d . Их равнодействующая равна $3T$. Кроме этой силы, направленной вверх, на доску действует направленная вниз сила $mg - T$, где mg – вес Самоделкина, T – сила натяжения веревки a . Так как доска находится в равновесии

$$mg - T = 3T, \text{ следовательно } T = mg/4 = 150,185 \text{ Н.}$$

4. Колесо радиуса r катится без проскальзывания по горизонтальной опорной поверхности так, что точка касания его с опорой K описывает окружность радиуса $R > r$ с центром в точке O ($OK=R$). Плоскость колеса наклонена к опорной плоскости под углом δ (см. Рисунок). По какой кривой движется при этом центр колеса? Как она расположена в пространстве? Какова скорость движения центра колеса, если точка контакта K движется по окружности с постоянной скоростью v ? Ответить на те же вопросы относительно верхней точки колеса, если $R > 2r$.



Решение

Центр колеса описывает окружность, радиус которой равен $R - r \cos \delta$. Эта окружность находится на высоте $r \sin \delta$ над горизонтальной опорной поверхностью. Длина этой окружности равна $2\pi(R - r \cos \delta)$. Время движения точки контакта K по окружности радиуса R равно $2\pi R/v$. Скорость движения центра колеса равна:

$$\frac{2\pi(R - r \cos \delta)}{2\pi R/v} = v \left(1 - \frac{r}{R} \cos \delta \right).$$

При $R > r$ имеет место неравенство $1 - \frac{r}{R} \cos \delta > 0$, и проекция центра колеса на опорную плоскость находится на радиусе OK в течение всего времени движения.

Верхняя точка колеса описывает окружность, радиус которой равен $R - 2r \cos \delta$. Эта окружность находится на высоте $2r \sin \delta$ над горизонтальной опорной поверхностью. Длина этой окружности равна $2\pi(R - 2r \cos \delta)$. Скорость движения верхней точки колеса равна:

$$\frac{2\pi(R - 2r \cos \delta)}{2\pi R/v} = v \left(1 - \frac{2r}{R} \cos \delta \right).$$

При $R > 2r$ имеет место неравенство $1 - \frac{2r}{R} \cos \delta > 0$, и проекция верхней точки колеса на опорную плоскость находится на радиусе OK в течение всего времени движения.

Задания очного тура олимпиады «Ломоносов» по робототехнике 2016/17

10—11 классы

1. В Интернете была опубликована промежуточная таблица одного футбольного турнира:

	Игры	Побед	Ничьих	Поражений	Забито мячей	Пропущено мячей	Очки
Венгрия	2	2	0	0	4	1	4
Швеция	2	1	1	0	1	1	3
Испания	2	0	2	0	3	3	2
Ирландия	3	0	1	2	3	5	1
Франция	1	0	0	1	0	2	0

Докажите, что в таблице имеется ошибка, и, зная, что ошибка одна, исправьте ее и укажите результаты сыгранных матчей.

Решение

Количество забитых и пропущенных мячей должно совпадать. Согласно таблице забитых мячей – 11, а пропущенных – 12. Значит ошибка в одном из этих двух столбцов. Заметим, что у Швеции одна победа и одна ничья. Ничья дает равный вклад в забитые и пропущенные мячи. Для победы необходимо, чтобы забитых мячей было хотя бы на один больше. А так как разница между общим количеством забитых и пропущенных мячей равна единице, то возможны два варианта:

	Забито мячей	Пропущено мячей
Швеция	2	1

либо

	Забито мячей	Пропущено мячей
Швеция	1	0

Последний вариант исключается сравнением с другими играми.

2. Однажды солнечным днём учащийся 11 класса Юра заметил на небе двигающуюся точку – летящий вдалеке самолёт. Старшеклассник решил поэкспериментировать: взял спичку и попробовал заслонить спичечной головкой летящий самолёт. Юра смог это сделать держа спичку в вытянутой

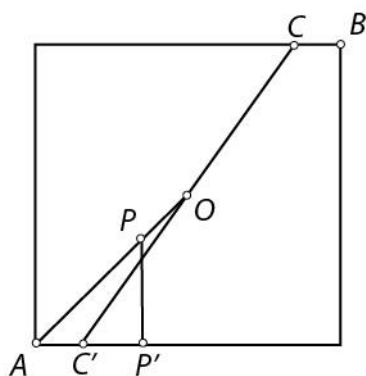
руке. Ночью он решил повторить эксперимент, но теперь с Полярной звездой. Получится ли у Юры заслонить звезду?

Решение

Ярким днём глазной зрачок сужается до размера меньше спичечной головки, а ночью – сильно расширяется. Так как лучи света, идущие от далекой звезды, можно считать параллельными, полностью они не перекрываются спичечной головкой. Часть лучей попадает в зрачок, создавая вокруг спичечной головки светящийся ореол.

3. В центре квадратного пруда плавает робот-шпион. К вершине квадрата подошел Самоделкин и заметил шпиона. Самоделкин не умеет плавать, но бежит в 4 раза быстрее, чем робот-шпион плавает. Робот-шпион бежит быстрее Самоделкина. Сможет ли он убежать от Самоделкина?

Решение



Пусть первоначально Самоделкин находился в точке В, а робот-шпион – в точке О. Робот-шпион должен двигаться из точки О по прямой в точку А. Точкой Р отмечено текущее положение робота-шпиона, а точка Р' – проекция точки Р на нижнюю сторону квадрата. В какой-то момент Самоделкин начнет двигаться вдоль стороны квадрата, пусть это будет верхняя сторона. Точка С – текущее положение Самоделкина, а точка С' – точка симметричная точке С относительно центра пруда – точки О. Так как точка Р' движется в сторону точки А, а точка С' – от точки А, в какой-то момент они совпадут. Тогда робот-шпион меняет направление движения и двигается по прямой РР'. Ему нужно проплыть расстояние меньше половины стороны квадрата. Самоделкину нужно преодолеть путь от точки С до точки С', который всегда равен по длине двум сторонам квадрата. Таким образом робот-шпион сможет добраться до берега быстрее Самоделкина и убежать от него.

4. Рассмотрим два математических маятника разной длины, подвешенные в одной и той же точке О. Каждый такой маятник представляет собой безмассовый стержень, на конце которого крепится материальная точка. Трение в точке подвеса учитывать не будем. Отклоним маятники от нижнего положения равновесия на один и тот же произвольный угол и будем удерживать их в этом состоянии. Затем одновременно отпустим маятники, не сообщив им какой-либо начальной скорости. У какого из маятников, короткого или длинного, будет больше (по абсолютной величине) угловая скорость в процессе его колебаний при равных углах отклонения от вертикального положения?

Решение

Кинетическая энергия E_k маятника длиной l с материальной точкой массы m на конце равна:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2.$$

Здесь $v = \omega l$ - скорость материальной точки, ω – угловая скорость маятника. Его потенциальная энергия E_p равна:

$$E_p = -mgl \cos \varphi,$$

где g – ускорение свободного падения, а φ – угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия. Полная энергия маятника E равна сумме кинетической энергии E_k и потенциальной E_p :

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 - mgl \cos \varphi.$$

В начальный момент времени полная энергия маятника E_0 равна потенциальной E_{p0} :

$$E_0 = E_{p0} = -mgl \cos \varphi_0,$$

где φ_0 – угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия в начальный момент времени.

Полная энергия маятника во время его движения не изменяется, следовательно, при любом угле φ отклонения от вертикали имеет место равенство:

$$\frac{1}{2}ml^2\omega^2 - mgl \cos \varphi = -mgl \cos \varphi_0, \text{ или } \frac{1}{2}l\omega^2 - g \cos \varphi = -g \cos \varphi_0.$$

Отсюда вытекает равенство:

$$\omega^2 = \frac{2g(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}{l}. \quad (*)$$

Колебания маятника происходят в диапазоне $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$. При $\varphi = \pm \varphi_0$ угловая скорость маятника $\omega = 0$. В диапазоне $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$ эта скорость $\omega \neq 0$. В этом диапазоне, естественно, $\cos \varphi > \cos \varphi_0$. Из формулы (*) следует, что при каждом значении φ бóльшую (по абсолютной величине) угловую скорость будет иметь тот маятник, у которого длина l меньше, т.е. более короткий.