ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2016-2017 учебный год

ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2016-2017 учебный год

ЗАДАНИЯ ПЕРВОГО ТУРА ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ

Задание 1

Вариант 1.1

Результаты исследований трещин породы газоносного месторождения показывают, что на глубине x наклон мелких трещин по отношению к вертикали равен $\arcsin|x-a|$, при этом наклон крупных трещин равен $\arccos|2x-b|$, где a,b – параметры глубины (величины x,a,b измеряются в сотнях метров). Известно, что минимальное значение a, при котором углы наклона мелких и крупных трещин совпадают, в 2 раза меньше максимального значения a, обладающего этим свойством. Чему равно значение параметра b? Ответ дайте с точностью до 1 метра.

Решение. Задача сводится к нахождению максимально (минимально) возможного значения a, при котором существует решение уравнения $\arcsin|x-a| = \arccos|2x-b|$ при заданном значении b. Определяя область допустимых значений и беря синус от обеих частей, последнее уравнение представим в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} |x-a| = \sqrt{1-(2x-b)^2}, \\ |x-a| \le 1, \\ |2x-b| \le 1 \end{cases}$$

Относительно переменной y=2x эти три условия выглядят как

$$\left|\frac{y}{2}-a\right| = \sqrt{1-(y-b)^2}, \left|\frac{y}{2}-a\right| \le 1, |y-b| \le 1.$$

Множество решений системы соответствует точкам плоскости *(y,z)*, для которых точки полуокружности $z=\sqrt{1-(y-b)^2}$ имеют общие точки с ломаной $z=\left|\frac{y}{2}-a\right|$. При фиксированном значении b максимально (минимально) возможное a соответствует касанию левой (правой) части ломаной этой полуокружности. Точка (b,0) является центром полуокружности, радиус полуокружности равен 1, угол наклона прямой $z=a-\frac{y}{2}$, соответствующей левой части ломаной, равен $\pi - arctg\frac{1}{2}$, угол наклона прямой $z=-a+\frac{y}{2}$, соответствующей правой части ломаной, равен $arctg\frac{1}{2}$. Следовательно, максимальное и минимальное значения параметра *a*, при которых ломаная и полуокружность имеют общие точки, равны $b+\sqrt{5}$ и $b-\sqrt{5}$ соответственно. Условие задачи означает, что первое полученное значение в k раз превышает второе. Это означает $b+\sqrt{5}=k(b-\sqrt{5}) \Leftrightarrow b=\frac{k+1}{k-1}\sqrt{5}$, что соответствует 671 м

Ответ: 671

Вариант 1.2

> Результаты исследований трещин породы газоносного месторождения показывают, что на глубине x наклон мелких трещин по отношению к вертикали равен $\arcsin|x-a|$, при этом наклон крупных трещин равен $\arccos|2x-b|$, где *a,b* – параметры глубины (величины *x,a,b* измеряются в сотнях метров). Известно, что минимальное значение *a*, при котором углы наклона мелких и крупных трещин совпадают, в 3 раза меньше максимального значения *a*, обладающего этим свойством. Чему равно значение параметра *b*? Ответ дайте с точностью до 1 метра.

Решение. Задача сводится к нахождению максимально (минимально) возможного значения a, при котором существует решение уравнения $\arcsin|x-a|=\arccos|2x-b|$ при заданном значении b. Определяя область допустимых значений и беря синус от обеих частей, последнее уравнение представим в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} |x-a|=\sqrt{1-(2x-b)^2}, \\ |x-a|\le 1, \\ |2x-b|\le 1 \end{cases}$$

Относительно переменной y=2x эти три условия выглядят как

$$|\frac{y}{2}-a|=\sqrt{1-(y-b)^2}, |\frac{y}{2}-a|\le 1, |y-b|\le 1.$$

Множество решений системы соответствует точкам плоскости *(y,z)*, для которых точки полуокружности $z=\sqrt{1-(y-b)^2}$ имеют общие точки с ломаной $z=|\frac{y}{2}-a|$. При фиксированном значении b максимально (минимально) возможное *a* соответствует касанию левой (правой) части ломаной этой полуокружности. Точка (b,0) является центром полуокружности, радиус полуокружности равен 1, угол наклона прямой $z=a-\frac{y}{2}$, соответствующей левой части ломаной, равен $\pi-arctg\frac{1}{2}$, угол наклона прямой $z=-a+\frac{y}{2}$, соответствующей правой части ломаной, равен $arctg\frac{1}{2}$. Следовательно, максимальное и минимальное значения параметра a, при которых ломаная и полуокружность имеют общие точки, равны $b+\sqrt{5}$ и $b-\sqrt{5}$ соответственно. Условие задачи означает, что первое полученное значение в k раз превышает второе. Это означает $b+\sqrt{5}=k(b-\sqrt{5}) \Leftrightarrow b=\dfrac{k+1}{k-1}\sqrt{5}$, что соответствует 447 м

Ответ: 447

Вариант 1.3

Результаты исследований трещин породы газоносного месторождения показывают, что на глубине x наклон мелких трещин по отношению к вертикали равен $\arcsin|x-a|$, при этом наклон крупных трещин равен $\arccos|2x-b|$, где a,b – параметры глубины (величины x,a,b измеряются в сотнях метров). Известно, что минимальное значение a, при котором углы наклона мелких и крупных трещин совпадают, в 4 раза меньше максимального значения a, обладающего этим свойством. Чему равно значение параметра b? Ответ дайте с точностью до 1 метра.

Решение. Задача сводится к нахождению максимально (минимально) возможного значения a, при котором существует решение уравнения $\arcsin|x-a|=\arccos|2x-b|$ при заданном значении b. Определяя область допустимых значений и беря синус от обеих частей, последнее уравнение представим в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} |x-a|=\sqrt{1-(2x-b)^2}, \\ |x-a|\le 1, \\ |2x-b|\le 1 \end{cases}$$

Относительно переменной y=2x эти три условия выглядят как

$|\dfrac{y}{2}-a|=\sqrt{1-(y-b)^2}, |\dfrac{y}{2}-a|\le 1, |y-b|\le 1.$

Множество решений системы соответствует точкам плоскости *(y,z)*, для которых точки полуокружности $z=\sqrt{1-(y-b)^2}$ имеют общие точки с ломаной $z=|\dfrac{y}{2}-a|$. При фиксированном значении b максимально (минимально) возможное a соответствует касанию левой (правой) части ломаной этой полуокружности. Точка (b,0) является центром полуокружности, радиус полуокружности равен 1, угол наклона прямой $z=a-\dfrac{y}{2}$, соответствующей левой части ломаной, равен $\pi - arctg\dfrac{1}{2}$, угол наклона прямой $z=-a+\dfrac{y}{2}$, соответствующей правой части ломаной, равен $arctg\dfrac{1}{2}$. Следовательно, максимальное и минимальное значения параметра a, при которых ломаная и полуокружность имеют общие точки, равны $b+\sqrt{5}$ и $b-\sqrt{5}$ соответственно. Условие задачи означает, что первое полученное значение в k раз превышает второе. Это означает $b+\sqrt{5}=k(b-\sqrt{5})\Leftrightarrow b=\dfrac{k+1}{k-1}\sqrt{5}$, что соответствует 372 м

Ответ: 372

Вариант 1.4

Результаты исследований трещин породы газоносного месторождения показывают, что на глубине x наклон мелких трещин по отношению к вертикали равен $\arcsin|x-a|$, при этом наклон крупных трещин равен $\arccos|2x-b|$, где a,b – параметры глубины (величины x,a,b измеряются в сотнях метров). Известно, что минимальное значение a, при котором углы наклона мелких и крупных трещин совпадают, в 5 раз меньше максимального значения a, обладающего этим свойством. Чему равно значение параметра b? Ответ дайте с точностью до 1 метра.

Решение. Задача сводится к нахождению максимально (минимально) возможного значения a, при котором существует решение уравнения $\arcsin|x-a|=\arccos|2x-b|$ при заданном значении b. Определяя область допустимых значений и беря синус от обеих частей, последнее уравнение представим в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} |x-a|=\sqrt{1-(2x-b)^2}, \\ |x-a|\le 1, \\ |2x-b|\le 1 \end{cases}$$

Относительно переменной y=2x эти три условия выглядят как
$|\frac{y}{2}-a|=\sqrt{1-(y-b)^2}, |\frac{y}{2}-a|\le 1, |y-b|\le 1.$

Множество решений системы соответствует точкам плоскости *(y,z)*, для которых точки полуокружности $z=\sqrt{1-(y-b)^2}$ имеют общие точки с ломаной $z=|\frac{y}{2}-a|$. При фиксированном значении b максимально (минимально) возможное a соответствует касанию левой (правой) части ломаной этой полуокружности. Точка (b,0) является центром полуокружности, радиус полуокружности равен 1, угол наклона прямой $z=a-\frac{y}{2}$, соответствующей левой части ломаной, равен $\pi-arctg\frac{1}{2}$, угол наклона прямой $z=-a+\frac{y}{2}$, соответствующей правой части ломаной, равен $arctg\frac{1}{2}$. Следовательно, максимальное и минимальное значения параметра *a*, при которых ломаная и полуокружность имеют общие точки, равны $b+\sqrt{5}$ и $b-\sqrt{5}$ соответственно. Условие задачи означает, что первое полученное

значение в k раз превышает второе. Это означает $b+\sqrt{5}=k(b-\sqrt{5}) \Leftrightarrow b=\frac{k+1}{k-1}\sqrt{5}$, что соответствует 335 м

Ответ: 335

Вариант 1.5

Результаты исследований трещин породы газоносного месторождения показывают, что на глубине x наклон мелких трещин по отношению к вертикали равен $\arcsin|x-a|$, при этом наклон крупных трещин равен $\arccos|2x-b|$, где a,b – параметры глубины (величины x,a,b измеряются в сотнях метров). Известно, что минимальное значение a, при котором углы наклона мелких и крупных трещин совпадают, в 6 раз меньше максимального значения a, обладающего этим свойством. Чему равно значение параметра b? Ответ дайте с точностью до 1 метра.

Решение. Задача сводится к нахождению максимально (минимально) возможного значения a, при котором существует решение уравнения $\arcsin|x-a|=\arccos|2x-b|$ при заданном значении b. Определяя область допустимых значений и беря синус от обеих частей, последнее уравнение представим в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} |x-a|=\sqrt{1-(2x-b)^2}, \\ |x-a|\le 1, \\ |2x-b|\le 1 \end{cases}$$

Относительно переменной y=2x эти три условия выглядят как
$$\left|\frac{y}{2}-a\right|=\sqrt{1-(y-b)^2}, \left|\frac{y}{2}-a\right|\le 1, |y-b|\le 1.$$

Множество решений системы соответствует точкам плоскости *(y,z)*, для которых точки полуокружности $z=\sqrt{1-(y-b)^2}$ имеют общие точки с ломаной $z=\left|\frac{y}{2}-a\right|$. При фиксированном значении b максимально (минимально) возможное a соответствует касанию левой (правой) части ломаной этой полуокружности. Точка (b,0) является центром полуокружности, радиус полуокружности равен 1, угол наклона прямой $z=a-\frac{y}{2}$, соответствующей левой части ломаной, равен $\pi-arctg\frac{1}{2}$, угол наклона прямой $z=-a+\frac{y}{2}$, соответствующей правой части ломаной, равен $arctg\frac{1}{2}$. Следовательно, максимальное и минимальное значения параметра a, при которых ломаная и полуокружность имеют общие точки, равны $b+\sqrt{5}$ и $b-\sqrt{5}$ соответственно. Условие задачи означает, что первое полученное

значение в k раз превышает второе. Это означает $b+\sqrt{5}=k(b-\sqrt{5}) \Leftrightarrow b=\frac{k+1}{k-1}\sqrt{5}$, что соответствует 313 м

Ответ: 313

Вариант 1.6

Результаты исследований трещин породы газоносного месторождения показывают, что на глубине x наклон мелких трещин по отношению к вертикали равен $\arcsin|x-a|$, при этом наклон крупных трещин равен $\arccos|2x-b|$, где a,b – параметры глубины (величины x,a,b измеряются в сотнях метров). Известно, что минимальное значение a, при котором углы наклона мелких и крупных трещин совпадают, в 7 раз меньше максимального значения a, обладающего этим свойством. Чему равно значение параметра b? Ответ дайте с точностью до 1 метра.

Решение. Задача сводится к нахождению максимально (минимально) возможного значения a, при котором существует решение уравнения $\arcsin|x-a|=\arccos|2x-b|$ при заданном значении b. Определяя область допустимых значений и беря синус от обеих частей, последнее уравнение представим в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} |x-a|=\sqrt{1-(2x-b)^2}, \\ |x-a|\le 1, \\ |2x-b|\le 1 \end{cases}$$

Относительно переменной y=2x эти три условия выглядят как

$|\frac{y}{2}-a|=\sqrt{1-(y-b)^2}, |\frac{y}{2}-a|\le 1, |y-b|\le 1.$

Множество решений системы соответствует точкам плоскости *(y,z)*, для которых точки полуокружности $z=\sqrt{1-(y-b)^2}$ имеют общие точки с ломаной $z=|\frac{y}{2}-a|$. При фиксированном значении b максимально (минимально) возможное a соответствует касанию левой (правой) части ломаной этой полуокружности. Точка (b,0) является центром полуокружности, радиус полуокружности равен 1, угол наклона прямой $z=a-\frac{y}{2}$, соответствующей левой части ломаной, равен $\pi-arctg\frac{1}{2}$, угол наклона прямой $z=-a+\frac{y}{2}$, соответствующей правой части ломаной, равен $arctg\frac{1}{2}$. Следовательно, максимальное и минимальное значения параметра *a*, при которых ломаная и полуокружность имеют общие точки, равны $b+\sqrt{5}$ и $b-\sqrt{5}$ соответственно. Условие задачи означает, что первое полученное

значение в k раз превышает второе. Это означает $b+\sqrt{5}=k(b-\sqrt{5}) \Leftrightarrow b=\frac{k+1}{k-1}\sqrt{5}$, что соответствует 298 м

Ответ: 298

Вариант 1.7

Результаты исследований трещин породы газоносного месторождения показывают, что на глубине x наклон мелких трещин по отношению к вертикали равен $\arcsin|x-a|$, при этом наклон крупных трещин равен $\arccos|2x-b|$, где a,b – параметры глубины (величины x,a,b измеряются в сотнях метров). Известно, что минимальное значение a, при котором углы наклона мелких и крупных трещин совпадают, в 8 раз меньше максимального значения a, обладающего этим свойством. Чему равно значение параметра b? Ответ дайте с точностью до 1 метра.

Решение. Задача сводится к нахождению максимально (минимально) возможного значения а, при котором существует решение уравнения $\arcsin|x-a|=\arccos|2x-b|$ при заданном значении b. Определяя область допустимых значений и беря синус от обеих частей, последнее уравнение представим в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} |x-a|=\sqrt{1-(2x-b)^2}, \\ |x-a|\le 1, \\ |2x-b|\le 1 \end{cases}$$

Относительно переменной y=2x эти три условия выглядят как

$\left|\frac{y}{2}-a\right|=\sqrt{1-(y-b)^2}, \left|\frac{y}{2}-a\right|\le 1, |y-b|\le 1.$

Множество решений системы соответствует точкам плоскости *(y,z)*, для которых точки полуокружности $z=\sqrt{1-(y-b)^2}$ имеют общие точки с ломаной $z=\left|\frac{y}{2}-a\right|$. При фиксированном значении b максимально (минимально) возможное a соответствует касанию левой (правой) части ломаной этой полуокружности. Точка (b,0) является центром полуокружности, радиус полуокружности равен 1, угол наклона прямой $z=a-\frac{y}{2}$, соответствующей левой части ломаной, равен $\pi-arctg\frac{1}{2}$, угол наклона прямой $z=-a+\frac{y}{2}$, соответствующей правой части ломаной, равен $arctg\frac{1}{2}$. Следовательно, максимальное и минимальное значения параметра a, при которых ломаная и полуокружность имеют общие точки, равны $b+\sqrt{5}$ и $b-\sqrt{5}$ соответственно. Условие задачи означает, что первое полученное

значение в k раз превышает второе. Это означает $b+\sqrt{5}=k(b-\sqrt{5}) \Leftrightarrow b=\frac{k+1}{k-1}\sqrt{5}$, что соответствует 287 м

Ответ: 287

Вариант 1.8

Результаты исследований трещин породы газоносного месторождения показывают, что на глубине x наклон мелких трещин по отношению к вертикали равен $\arcsin|x-a|$, при этом наклон крупных трещин равен $\arccos|2x-b|$, где a,b – параметры глубины (величины x,a,b измеряются в сотнях метров). Известно, что минимальное значение a, при котором углы наклона мелких и крупных трещин совпадают, в 9 раз меньше максимального значения a, обладающего этим свойством. Чему равно значение параметра b? Ответ дайте с точностью до 1 метра.

Решение. Задача сводится к нахождению максимально (минимально) возможного значения a, при котором существует решение уравнения $\arcsin|x-a|=\arccos|2x-b|$ при заданном значении b. Определяя область допустимых значений и беря синус от обеих частей, последнее уравнение представим в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} |x-a|=\sqrt{1-(2x-b)^2}, \\ |x-a|\le 1, \\ |2x-b|\le 1 \end{cases}$$

Относительно переменной y=2x эти три условия выглядят как

$|\frac{y}{2}-a|=\sqrt{1-(y-b)^2}, |\frac{y}{2}-a|\le 1, |y-b|\le 1.$

Множество решений системы соответствует точкам плоскости *(y,z)*, для которых точки полуокружности $z=\sqrt{1-(y-b)^2}$ имеют общие точки с ломаной $z=|\frac{y}{2}-a|$. При фиксированном значении b максимально (минимально) возможное a соответствует касанию левой (правой) части ломаной этой полуокружности. Точка (b,0) является центром полуокружности, радиус полуокружности равен 1, угол наклона прямой $z=a-\frac{y}{2}$, соответствующей левой части ломаной, равен $\pi-arctg\frac{1}{2}$, угол наклона прямой $z=-a+\frac{y}{2}$, соответствующей правой части ломаной, равен $arctg\frac{1}{2}$. Следовательно, максимальное и минимальное значения параметра *a*, при которых ломаная и полуокружность имеют общие точки, равны $b+\sqrt{5}$ и $b-\sqrt{5}$ соответственно. Условие задачи означает, что первое полученное

значение в k раз превышает второе. Это означает $b+\sqrt{5}=k(b-\sqrt{5}) \Leftrightarrow b=\frac{k+1}{k-1}\sqrt{5}$, что соответствует 280 м

Ответ: 280

Задание 2

Вариант 2.1

В ёмкость объёмом $V = 10$ м^3, содержащую газообразный пропан при давлении $p_1 = 0{,}1$ МПа и температуре $t = 15$ ^oC, закачали смесь пропана с метаном, в которой доля числа молекул метана в общем количестве молекул составляет $\alpha = 5$ %. В результате давление в ёмкости при той же температуре увеличилось до значения $p_2 = 2$ МПа, причём часть пропана в ней сконденсировалась и перешла в жидкое состояние. Каков объём V_1 жидкого пропана, образовавшегося в ёмкости, если давление насыщенных паров пропана при $t = 15$ ^oC равно $p_н = 0{,}9$ МПа? Плотность жидкого пропана $\rho = 510$ кг/м^3, молярная масса пропана $M = 44$ г/моль. Проникновением небольшого числа молекул метана в жидкий пропан пренебречь. Ответ в м^3 округлить до десятых.

Решение. Для описания метана и газообразного пропана используем уравнение Клапейрона–Менделеева. Тогда количество молекул пропана, изначально находившегося в ёмкости, составляет $N_0 = \frac{p_1 V}{kT}$. Пусть общее количество молекул газа, поступившего в ёмкость, равно N, т.е. этот газ содержит αN молекул метана и $(1-\alpha)N$ молекул пропана.

После закачки газа в ёмкости находится жидкий пропан и газ, состоящий из насыщенных паров пропана при парциальном давлении $p_н$ и метана. Учитывая, что количество молекул метана в ёмкости равно $N_{\text{метана}} = \alpha N$ и метан в ёмкости находится только в виде газа и поэтому занимает объем $V - V_1$, получим, что парциальное давление метана в ёмкости составляет $\frac{\alpha N kT}{V - V_1}$. Поэтому давление в ёмкости в конечном состоянии, согласно закону Дальтона,

$$p_2 = p_н + \frac{\alpha N kT}{V - V_1}. \quad (1)$$

Из уравнения (1) находим общее число молекул N в газе, закачанном в ёмкость:

$$N = \frac{(p_2 - p_н)(V - V_1)}{\alpha kT}. \quad (2)$$

С другой стороны, учитывая, что масса жидкого пропана в ёмкости составляет ρV_1, а масса одной молекулы пропана равна M/N_A, где N_A – число Авогадро, найдём, что количество молекул сжиженного пропана равно $\frac{\rho V_1 N_A}{M}$. Следовательно, количество молекул пропана в насыщенном паре равно $\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_A}{M}$ и поэтому уравнение Клапейрона–Менделеева для насыщенного пара пропана имеет вид:

$$p_н (V - V_1) = \left[\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_A}{M}\right] kT. \quad (3)$$

Подставляя в (3) выражение для N из (2) и учитывая, что $N_A k = R = 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – универсальная газовая постоянная, получим:

$$V_1 = V \frac{\alpha p_1 + (1-\alpha) p_2 - p_н}{(1-\alpha) p_2 - p_н + \alpha \frac{\rho R T}{M}} = 10 \cdot \frac{0{,}05 \cdot 10^5 + 0{,}95 \cdot 2 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5}{0{,}95 \cdot 2 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5 + 0{,}05 \cdot \frac{510 \cdot 8{,}31 \cdot 288}{44 \cdot 10^{-3}}} \approx 4{,}2$$

м^3.

Ответ: $V_1 \approx 4{,}2$

Вариант 2.2

В ёмкость объёмом $V = 10$ м^3, содержащую газообразный пропан при давлении $p_1 = 0{,}1$ МПа и температуре $t = 15$ $^\circ$C, закачали смесь пропана с метаном, в которой доля числа молекул метана в общем количестве молекул составляет $\alpha = 4$ %. В результате давление в ёмкости при той же температуре увеличилось до значения $p_2 = 2$ МПа, причём часть пропана в ней сконденсировалась и перешла в жидкое состояние. Каков объём V_1 жидкого пропана, образовавшегося в ёмкости, если давление насыщенных паров пропана при $t = 15$ $^\circ$C равно $p_н = 0{,}9$ МПа? Плотность жидкого пропана $\rho = 510$ кг/м^3, молярная масса пропана $M = 44$ г/моль. Проникновением небольшого числа молекул метана в жидкий пропан пренебречь. Ответ в м^3 округлить до десятых.

Решение. Для описания метана и газообразного пропана используем уравнение Клапейрона–Менделеева. Тогда количество молекул пропана, изначально находившегося в ёмкости, составляет $N_0 = \dfrac{p_1 V}{kT}$. Пусть общее количество молекул газа, поступившего в ёмкость, равно N, т.е. этот газ содержит αN молекул метана и $(1-\alpha)N$ молекул пропана.

После закачки газа в ёмкости находится жидкий пропан и газ, состоящий из насыщенных паров пропана при парциальном давлении $p_н$ и метана. Учитывая, что количество молекул метана в ёмкости равно $N_{метана} = \alpha N$ и метан в ёмкости находится только в виде газа и поэтому занимает объем $V - V_1$, получим, что парциальное давление метана в ёмкости составляет $\dfrac{\alpha N kT}{V - V_1}$. Поэтому давление в ёмкости в конечном состоянии, согласно закону Дальтона,

$$p_2 = p_н + \frac{\alpha N kT}{V - V_1}. \qquad (1)$$

Из уравнения (1) находим общее число молекул N в газе, закачанном в ёмкость:

$$N = \frac{(p_2 - p_н)(V - V_1)}{\alpha kT}. \qquad (2)$$

С другой стороны, учитывая, что масса жидкого пропана в ёмкости составляет ρV_1, а масса одной молекулы пропана равна M/N_A, где N_A – число Авогадро, найдём, что количество молекул сжиженного пропана равно $\dfrac{\rho V_1 N_A}{M}$. Следовательно, количество молекул пропана в насыщенном паре равно $\dfrac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \dfrac{\rho V_1 N_A}{M}$ и поэтому уравнение Клапейрона–Менделеева для насыщенного пара пропана имеет вид:

$$p_{\text{н}}(V-V_1)=\left[\frac{p_1V}{kT}+(1-\alpha)N-\frac{\rho V_1 N_{\text{А}}}{M}\right]kT.$$

(3)

Подставляя в (3) выражение для N из (2) и учитывая, что $N_{\text{А}}k=R=8{,}31\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ – универсальная газовая постоянная, получим:

$$V_1=V\frac{\alpha p_1+(1-\alpha)p_2-p_{\text{н}}}{(1-\alpha)p_2-p_{\text{н}}+\alpha\frac{\rho RT}{M}}=10\cdot\frac{0{,}04\cdot10^5+0{,}96\cdot2\cdot10^6-9\cdot10^5}{0{,}96\cdot2\cdot10^6-9\cdot10^5+0{,}04\cdot\frac{510\cdot8{,}31\cdot288}{44\cdot10^{-3}}}\approx4{,}8$$

м^3.

Ответ: $V_1\approx4{,}8$

Вариант 2.3

В ёмкость объёмом V = 10 м^3, содержащую газообразный пропан при давлении p_1 = 0,1 МПа и температуре t = 15 °С, закачали смесь пропана с метаном, в которой доля числа молекул метана в общем количестве молекул составляет α = 3 %. В результате давление в ёмкости при той же температуре увеличилось до значения p_2 = 2 МПа, причём часть пропана в ней сконденсировалась и перешла в жидкое состояние. Каков объём V_1 жидкого пропана, образовавшегося в ёмкости, если давление насыщенных паров пропана при t = 15 °С равно $p_{\text{н}}$ = 0,9 МПа? Плотность жидкого пропана ρ = 510 кг/м^3, молярная масса пропана M = 44 г/моль. Проникновением небольшого числа молекул метана в жидкий пропан пренебречь. Ответ в м^3 округлить до десятых.

Решение. Для описания метана и газообразного пропана используем уравнение Клапейрона–Менделеева. Тогда количество молекул пропана, изначально находившегося в ёмкости, составляет $N_0=\frac{p_1V}{kT}$. Пусть общее количество молекул газа, поступившего в ёмкость, равно N, т.е. этот газ содержит αN молекул метана и $(1-\alpha)N$ молекул пропана.

После закачки газа в ёмкости находится жидкий пропан и газ, состоящий из насыщенных паров пропана при парциальном давлении $p_{\text{н}}$ и метана. Учитывая, что количество молекул метана в ёмкости равно $N_{\text{метана}}=\alpha N$ и метан в ёмкости находится только в виде газа и поэтому занимает объем $V-V_1$, получим, что парциальное давление метана в ёмкости составляет $\frac{\alpha NkT}{V-V_1}$. Поэтому давление в ёмкости в конечном состоянии, согласно закону Дальтона,

$$p_2 = p_н + \frac{\alpha NkT}{V - V_1}.$$

(1)

Из уравнения (1) находим общее число молекул N в газе, закачанном в ёмкость:

$$N = \frac{(p_2 - p_н)(V - V_1)}{\alpha kT}.$$

(2)

С другой стороны, учитывая, что масса жидкого пропана в ёмкости составляет ρV_1, а масса одной молекулы пропана равна $M/N_А$, где $N_А$ – число Авогадро, найдём, что количество молекул сжиженного пропана равно $\frac{\rho V_1 N_А}{M}$. Следовательно, количество молекул пропана в насыщенном паре равно $\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_А}{M}$ и поэтому уравнение Клапейрона–Менделеева для насыщенного пара пропана имеет вид:

$$p_н(V - V_1) = \left[\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_А}{M}\right]kT.$$

(3)

Подставляя в (3) выражение для N из (2) и учитывая, что $N_А k = R = 8{,}31\,\frac{Дж}{моль \cdot К}$ – универсальная газовая постоянная, получим:

$$V_1 = V\,\frac{\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2 - p_н}{(1-\alpha)p_2 - p_н + \alpha\frac{\rho RT}{M}} = 10 \cdot \frac{0{,}03 \cdot 10^5 + 0{,}97 \cdot 2 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5}{0{,}97 \cdot 2 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5 + 0{,}03 \cdot \frac{510 \cdot 8{,}31 \cdot 288}{44 \cdot 10^{-3}}} \approx 5{,}6$$

м^3.

Ответ: $V_1 \approx 5{,}6$

Вариант 2.4

В ёмкость объёмом $V = 10$ м^3, содержащую газообразный пропан при давлении $p_1 = 0{,}1$ МПа и температуре $t = 15$ $^\circ$С, закачали смесь пропана с метаном, в которой доля числа молекул метана в общем количестве молекул составляет $\alpha = 2$ %. В результате давление в ёмкости при той же температуре увеличилось до значения $p_2 = 2$ МПа, причём часть пропана в ней сконденсировалась и перешла в жидкое состояние. Каков объём V_1 жидкого пропана, образовавшегося в ёмкости, если давление насыщенных паров пропана при $t = 15$ $^\circ$С равно $p_н = 0{,}9$ МПа? Плотность жидкого пропана $\rho = 510$ кг/м^3, молярная масса пропана $M = 44$ г/моль. Проникновением небольшого числа молекул метана в жидкий пропан пренебречь. Ответ в м^3 округлить до десятых.

Решение. Для описания метана и газообразного пропана используем уравнение Клапейрона–Менделеева. Тогда количество молекул пропана, изначально находившегося в ёмкости, составляет $N_0 = \frac{p_1 V}{kT}$. Пусть общее количество молекул газа, поступившего в ёмкость, равно *N*, т.е. этот газ содержит αN молекул метана и $(1-\alpha)N$ молекул пропана.

После закачки газа в ёмкости находится жидкий пропан и газ, состоящий из насыщенных паров пропана при парциальном давлении $p_н$ и метана. Учитывая, что количество молекул метана в ёмкости равно $N_{метана} = \alpha N$ и метан в ёмкости находится только в виде газа и поэтому занимает объем $V - V_1$, получим, что парциальное давление метана в ёмкости составляет $\frac{\alpha NkT}{V - V_1}$. Поэтому давление в ёмкости в конечном состоянии, согласно закону Дальтона,

$$p_2 = p_н + \frac{\alpha NkT}{V - V_1}. \qquad (1)$$

Из уравнения (1) находим общее число молекул *N* в газе, закачанном в ёмкость:

$$N = \frac{(p_2 - p_н)(V - V_1)}{\alpha kT}. \qquad (2)$$

С другой стороны, учитывая, что масса жидкого пропана в ёмкости составляет ρV_1, а масса одной молекулы пропана равна $M/N_А$, где $N_А$ – число Авогадро, найдём, что количество молекул сжиженного пропана равно $\frac{\rho V_1 N_А}{M}$. Следовательно, количество молекул пропана в насыщенном паре равно $\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_А}{M}$ и поэтому уравнение Клапейрона–Менделеева для насыщенного пара пропана имеет вид:

$$p_н(V - V_1) = \left[\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_А}{M}\right] kT. \qquad (3)$$

Подставляя в (3) выражение для *N* из (2) и учитывая, что $N_А k = R = 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К}$ – универсальная газовая постоянная, получим:

$$V_1 = V\frac{\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2 - p_н}{(1-\alpha)p_2 - p_н + \alpha\frac{\rho RT}{M}} = 10 \cdot \frac{0{,}02 \cdot 10^5 + 0{,}98 \cdot 2 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5}{0{,}98 \cdot 2 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5 + 0{,}02 \cdot \frac{510 \cdot 8{,}31 \cdot 288}{44 \cdot 10^{-3}}} \approx 6{,}6$$

м^3.

Ответ: $V_1 \approx 6{,}6$

Вариант 2.5

В ёмкость объёмом $V = 10$ м^3, содержащую газообразный пропан при давлении $p_1 = 0{,}1$ МПа и температуре $t = 15$ $^\circ$С, закачали смесь пропана с метаном, в которой доля числа молекул метана в общем количестве молекул составляет $\alpha = 5$ %. В результате давление в ёмкости при той же температуре увеличилось до значения $p_2 = 1{,}6$ МПа, причём часть пропана в ней сконденсировалась и перешла в жидкое состояние. Каков объём V_1 жидкого пропана, образовавшегося в ёмкости, если давление насыщенных паров пропана при $t = 15$ $^\circ$С равно $p_н = 0{,}9$ МПа? Плотность жидкого пропана $\rho = 510$ кг/м^3, молярная масса пропана $M = 44$ г/моль. Проникновением небольшого числа молекул метана в жидкий пропан пренебречь. Ответ в м^3 округлить до десятых.

Решение. Для описания метана и газообразного пропана используем уравнение Клапейрона–Менделеева. Тогда количество молекул пропана, изначально находившегося в ёмкости, составляет $N_0 = \frac{p_1 V}{kT}$. Пусть общее количество молекул газа, поступившего в ёмкость, равно N, т.е. этот газ содержит αN молекул метана и $(1-\alpha)N$ молекул пропана.

После закачки газа в ёмкости находится жидкий пропан и газ, состоящий из насыщенных паров пропана при парциальном давлении $p_н$ и метана. Учитывая, что количество молекул метана в ёмкости равно $N_{метана} = \alpha N$ и метан в ёмкости находится только в виде газа и поэтому занимает объем $V - V_1$, получим, что парциальное давление метана в ёмкости составляет $\frac{\alpha NkT}{V - V_1}$. Поэтому давление в ёмкости в конечном состоянии, согласно закону Дальтона,

$$p_2 = p_н + \frac{\alpha NkT}{V - V_1}. \quad (1)$$

Из уравнения (1) находим общее число молекул N в газе, закачанном в ёмкость:

$$N = \frac{(p_2 - p_н)(V - V_1)}{\alpha kT}. \quad (2)$$

С другой стороны, учитывая, что масса жидкого пропана в ёмкости составляет ρV_1, а масса одной молекулы пропана равна $M/N_А$, где $N_А$ – число Авогадро, найдём, что количество молекул сжиженного пропана равно $\frac{\rho V_1 N_А}{M}$. Следовательно, количество молекул пропана в насыщенном паре равно $\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_А}{M}$ и поэтому уравнение Клапейрона–Менделеева для насыщенного пара пропана имеет вид:

$$p_{\text{н}}\left(V-V_1\right)=\left[\frac{p_1V}{kT}+\left(1-\alpha\right)N-\frac{\rho V_1N_{\text{А}}}{M}\right]kT\,.$$

(3)

Подставляя в (3) выражение для N из (2) и учитывая, что $N_{\text{А}}k=R=8{,}31\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ – универсальная газовая постоянная, получим:

$$V_1=V\,\frac{\alpha p_1+\left(1-\alpha\right)p_2-p_{\text{н}}}{\left(1-\alpha\right)p_2-p_{\text{н}}+\alpha\,\dfrac{\rho RT}{M}}=10\cdot\frac{0{,}05\cdot10^5+0{,}95\cdot1{,}6\cdot10^6-9\cdot10^5}{0{,}95\cdot1{,}6\cdot10^6-9\cdot10^5+0{,}05\cdot\dfrac{510\cdot8{,}31\cdot288}{44\cdot10^{-3}}}\approx3{,}1$$

м^3.

Ответ: $V_1\approx3{,}1$

Вариант 2.6

В ёмкость объёмом $V=10$ м^3, содержащую газообразный пропан при давлении $p_1=0{,}1$ МПа и температуре $t=15$ $^{\circ}$С, закачали смесь пропана с метаном, в которой доля числа молекул метана в общем количестве молекул составляет $\alpha=4$ %. В результате давление в ёмкости при той же температуре увеличилось до значения $p_2=1{,}6$ МПа, причём часть пропана в ней сконденсировалась и перешла в жидкое состояние. Каков объём V_1 жидкого пропана, образовавшегося в ёмкости, если давление насыщенных паров пропана при $t=15$ $^{\circ}$С равно $p_{\text{н}}=0{,}9$ МПа? Плотность жидкого пропана $\rho=510$ кг/м^3, молярная масса пропана $M=44$ г/моль. Проникновением небольшого числа молекул метана в жидкий пропан пренебречь. Ответ в м^3 округлить до десятых.

Решение. Для описания метана и газообразного пропана используем уравнение Клапейрона–Менделеева. Тогда количество молекул пропана, изначально находившегося в ёмкости, составляет $N_0=\frac{p_1V}{kT}$. Пусть общее количество молекул газа, поступившего в ёмкость, равно N, т.е. этот газ содержит αN молекул метана и $\left(1-\alpha\right)N$ молекул пропана.

После закачки газа в ёмкости находится жидкий пропан и газ, состоящий из насыщенных паров пропана при парциальном давлении $p_{\text{н}}$ и метана. Учитывая, что количество молекул метана в ёмкости равно $N_{\text{метана}}=\alpha N$ и метан в ёмкости находится только в виде газа и поэтому занимает объем $V-V_1$, получим, что парциальное давление метана в ёмкости составляет $\frac{\alpha NkT}{V-V_1}$. Поэтому давление в ёмкости в конечном состоянии, согласно закону Дальтона,

$$p_2 = p_н + \frac{\alpha N k T}{V - V_1}.$$

(1)

Из уравнения (1) находим общее число молекул N в газе, закачанном в ёмкость:

$$N = \frac{(p_2 - p_н)(V - V_1)}{\alpha k T}.$$

(2)

С другой стороны, учитывая, что масса жидкого пропана в ёмкости составляет ρV_1, а масса одной молекулы пропана равна $M/N_А$, где $N_А$ – число Авогадро, найдём, что количество молекул сжиженного пропана равно $\frac{\rho V_1 N_А}{M}$. Следовательно, количество молекул пропана в насыщенном паре равно $\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_А}{M}$ и поэтому уравнение Клапейрона–Менделеева для насыщенного пара пропана имеет вид:

$$p_н (V - V_1) = \left[\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_А}{M}\right] kT.$$

(3)

Подставляя в (3) выражение для N из (2) и учитывая, что $N_А k = R = 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К}$ – универсальная газовая постоянная, получим:

$$V_1 = V \frac{\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2 - p_н}{(1-\alpha)p_2 - p_н + \alpha \frac{\rho R T}{M}} = 10 \cdot \frac{0{,}04 \cdot 10^5 + 0{,}96 \cdot 1{,}6 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5}{0{,}96 \cdot 1{,}6 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5 + 0{,}04 \cdot \frac{510 \cdot 8{,}31 \cdot 288}{44 \cdot 10^{-3}}} \approx 3{,}7$$

м^3.

Ответ: $V_1 \approx 3{,}7$

Вариант 2.7

В ёмкость объёмом $V = 10$ м^3, содержащую газообразный пропан при давлении $p_1 = 0{,}1$ МПа и температуре $t = 15$ $^\circ$C, закачали смесь пропана с метаном, в которой доля числа молекул метана в общем количестве молекул составляет $\alpha = 3$ %. В результате давление в ёмкости при той же температуре увеличилось до значения $p_2 = 1{,}6$ МПа, причём часть пропана в ней сконденсировалась и перешла в жидкое состояние. Каков объём V_1 жидкого пропана, образовавшегося в ёмкости, если давление насыщенных паров пропана при $t = 15$ $^\circ$C равно $p_н = 0{,}9$ МПа? Плотность жидкого пропана $\rho = 510$ кг/м^3, молярная масса пропана $M = 44$ г/моль. Проникновением небольшого числа молекул метана в жидкий пропан пренебречь. Ответ в м^3 округлить до десятых.

Решение. Для описания метана и газообразного пропана используем уравнение Клапейрона–Менделеева. Тогда количество молекул пропана, изначально находившегося в ёмкости, составляет $N_0 = \frac{p_1 V}{kT}$. Пусть общее количество молекул газа, поступившего в ёмкость, равно *N*, т.е. этот газ содержит αN молекул метана и $(1-\alpha)N$ молекул пропана.

После закачки газа в ёмкости находится жидкий пропан и газ, состоящий из насыщенных паров пропана при парциальном давлении $p_н$ и метана. Учитывая, что количество молекул метана в ёмкости равно $N_{метана} = \alpha N$ и метан в ёмкости находится только в виде газа и поэтому занимает объем $V - V_1$, получим, что парциальное давление метана в ёмкости составляет $\frac{\alpha NkT}{V - V_1}$. Поэтому давление в ёмкости в конечном состоянии, согласно закону Дальтона,

$$p_2 = p_н + \frac{\alpha NkT}{V - V_1}. \quad (1)$$

Из уравнения (1) находим общее число молекул *N* в газе, закачанном в ёмкость:

$$N = \frac{(p_2 - p_н)(V - V_1)}{\alpha kT}. \quad (2)$$

С другой стороны, учитывая, что масса жидкого пропана в ёмкости составляет ρV_1, а масса одной молекулы пропана равна $M/N_А$, где $N_А$ – число Авогадро, найдём, что количество молекул сжиженного пропана равно $\frac{\rho V_1 N_А}{M}$. Следовательно, количество молекул пропана в насыщенном паре равно $\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_А}{M}$ и поэтому уравнение Клапейрона–Менделеева для насыщенного пара пропана имеет вид:

$$p_н (V - V_1) = \left[\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_А}{M}\right] kT. \quad (3)$$

Подставляя в (3) выражение для *N* из (2) и учитывая, что $N_А k = R = 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К}$ – универсальная газовая постоянная, получим:

$$V_1 = V \frac{\alpha p_1 + (1-\alpha) p_2 - p_н}{(1-\alpha) p_2 - p_н + \alpha \frac{\rho RT}{M}} = 10 \cdot \frac{0{,}03 \cdot 10^5 + 0{,}97 \cdot 1{,}6 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5}{0{,}97 \cdot 1{,}6 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5 + 0{,}03 \cdot \frac{510 \cdot 8{,}31 \cdot 288}{44 \cdot 10^{-3}}} \approx 4{,}4$$

м^3.

Ответ: $V_1 \approx 4{,}4$

Вариант 2.8

В ёмкость объёмом $V = 10$ м^3, содержащую газообразный пропан при давлении $p_1 = 0{,}1$ МПа и температуре $t = 15$ ^{o}C, закачали смесь пропана с метаном, в которой доля числа молекул метана в общем количестве молекул составляет $\alpha = 2$ %. В результате давление в ёмкости при той же температуре увеличилось до значения $p_2 = 1{,}6$ МПа, причём часть пропана в ней сконденсировалась и перешла в жидкое состояние. Каков объём V_1 жидкого пропана, образовавшегося в ёмкости, если давление насыщенных паров пропана при $t = 15$ ^{o}C равно $p_н = 0{,}9$ МПа? Плотность жидкого пропана $\rho = 510$ кг/м^3, молярная масса пропана $M = 44$ г/моль. Проникновением небольшого числа молекул метана в жидкий пропан пренебречь. Ответ в м^3 округлить до десятых.

Решение. Для описания метана и газообразного пропана используем уравнение Клапейрона–Менделеева. Тогда количество молекул пропана, изначально находившегося в ёмкости, составляет $N_0 = \dfrac{p_1 V}{kT}$. Пусть общее количество молекул газа, поступившего в ёмкость, равно N, т.е. этот газ содержит αN молекул метана и $(1-\alpha)N$ молекул пропана.

После закачки газа в ёмкости находится жидкий пропан и газ, состоящий из насыщенных паров пропана при парциальном давлении $p_н$ и метана. Учитывая, что количество молекул метана в ёмкости равно $N_{\text{метана}} = \alpha N$ и метан в ёмкости находится только в виде газа и поэтому занимает объем $V - V_1$, получим, что парциальное давление метана в ёмкости составляет $\dfrac{\alpha N kT}{V - V_1}$. Поэтому давление в ёмкости в конечном состоянии, согласно закону Дальтона,

$$p_2 = p_н + \frac{\alpha N kT}{V - V_1}. \qquad (1)$$

Из уравнения (1) находим общее число молекул N в газе, закачанном в ёмкость:

$$N = \frac{(p_2 - p_н)(V - V_1)}{\alpha kT}. \qquad (2)$$

С другой стороны, учитывая, что масса жидкого пропана в ёмкости составляет ρV_1, а масса одной молекулы пропана равна M/N_A, где N_A – число Авогадро, найдём, что количество молекул сжиженного пропана равно $\dfrac{\rho V_1 N_A}{M}$. Следовательно, количество молекул пропана в насыщенном паре равно $\dfrac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \dfrac{\rho V_1 N_A}{M}$ и поэтому уравнение Клапейрона–Менделеева для насыщенного пара пропана имеет вид:

$$p_{\text{н}}(V-V_1)=\left[\frac{p_1V}{kT}+(1-\alpha)N-\frac{\rho V_1 N_{\text{А}}}{M}\right]kT.$$

(3)

Подставляя в (3) выражение для *N* из (2) и учитывая, что $N_{\text{А}}k=R=8{,}31\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ – универсальная газовая постоянная, получим:

$$V_1=V\frac{\alpha p_1+(1-\alpha)p_2-p_{\text{н}}}{(1-\alpha)p_2-p_{\text{н}}+\alpha\frac{\rho RT}{M}}=10\cdot\frac{0{,}02\cdot10^5+0{,}98\cdot1{,}6\cdot10^6-9\cdot10^5}{0{,}98\cdot1{,}6\cdot10^6-9\cdot10^5+0{,}02\cdot\frac{510\cdot8{,}31\cdot288}{44\cdot10^{-3}}}\approx5{,}5$$

м^3.

Ответ: $V_1\approx5{,}5$

Задание 3

Вариант 3.1

Плоский кусок горной породы имеет два тонких прямых сквозных хода, которые проделали черви-илоеды в эпоху мезозоя. Один из этих ходов имеет длину 50 мм, угол между ходами равен 12 градусам, расстояния от входа и выхода первого хода до второго хода равны соответственно 5.5 и 15 мм. На каком расстоянии от второго хода располагается точка - середина первого хода? Ответ дайте с точностью до 0.1 мм

Решение. Рассмотрим две параллельные плоскости, содержащие прямые ходы условия задачи. Пусть A,B – соответственно вход и выход из породы для первой прямой, M и N – их проекции на вторую прямую. Пусть далее точка O первой прямой и ее проекция O_1 на вторую прямую взяты таким образом, что отрезок OO_1 – общий перпендикуляр к двум прямым. Проекции точек A и B на плоскость, содержащую вторую прямую, обозначим как P и Q соответственно. Тогда из прямоугольных треугольников O_1MP и O_1NQ: $MP=x\cdot\sin\alpha, NQ=(x+a)\cdot\sin\alpha$, где x= O_1P, a=AB. Из прямоугольных треугольников AMP и BNQ: $d_1^2=h^2+(x\cdot\sin\alpha)^2, d_2^2=h^2+((x+a)\cdot\sin\alpha)^2$, здесь d_1 - расстояние от точки A до второй прямой, d_2 - расстояние от точки B до второй прямой, h – расстояние между прямыми ходами, h=AP=BQ. Вычитая второе равенство из первого, получаем $(2x+a)\cdot a\cdot\sin^2\alpha=d_2^2-d_1^2\Leftrightarrow x=\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha}-\frac{a}{2}$. Пусть точка C – середина AB, точка R – ее проекция на прямую PQ . Тогда из теоремы Фалеса $O_1R=x+\frac{a}{2}=\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha}$, теперь искомое расстояние CK находим по теореме Пифагора из треугольника CRK, K – проекция точки C на вторую прямую, отрезок RK перпендикулярен второй прямой по теореме о трех перпендикулярах. При этом $RK=(x+a)\cdot\sin\alpha$. Таким образом, длина CK находится из равенства

$$CK^2 = h^2 + (x + \frac{a}{2})^2 \cdot \sin^2\alpha = d_1^2 - (\frac{d_2^2 - d_1^2}{2a \cdot \sin\alpha} - \frac{a}{2}\sin\alpha)^2 + (\frac{d_2^2 - d_1^2}{2a \cdot \sin\alpha})^2 .$$

Окончательно $CK = \sqrt{d_1^2 - \frac{a^2}{4}\sin^2\alpha + \frac{1}{2}(d_2^2 - d_1^2)}$. Подставляя данные задачи, получаем 10.0 мм

Ответ: 10.0

Вариант 3.2

Плоский кусок горной породы имеет два тонких прямых сквозных хода, которые проделали черви-илоеды в эпоху мезозоя. Один из этих ходов имеет длину 50 мм, угол между ходами равен 14 градусам, расстояния от входа и выхода первого хода до второго хода равны соответственно 6.4 и 15 мм. На каком расстоянии от второго хода располагается точка - середина первого хода? Ответ дайте с точностью до 0.1 мм

Решение. Рассмотрим две параллельные плоскости, содержащие прямые ходы условия задачи. Пусть A,B – соответственно вход и выход из породы для первой прямой, M и N – их проекции на вторую прямую. Пусть далее точка O первой прямой и ее проекция O_1 на вторую прямую взяты таким образом, что отрезок OO_1 – общий перпендикуляр к двум прямым. Проекции точек A и B на плоскость, содержащую вторую прямую, обозначим как P и Q соответственно. Тогда из прямоугольных треугольников O_1MP и O_1NQ: $MP = x\cdot\sin\alpha, NQ = (x+a)\cdot\sin\alpha$, где x= O_1P, a=AB. Из прямоугольных треугольников AMP и BNQ: $d_1^2 = h^2 + (x\cdot\sin\alpha)^2, d_2^2 = h^2 + ((x+a)\cdot\sin\alpha)^2$, здесь d_1 - расстояние от точки A до второй прямой, d_2 - расстояние от точки B до второй прямой, h – расстояние между прямыми ходами, h=AP=BQ. Вычитая второе равенство из первого, получаем

$(2x+a)\cdot a\cdot\sin^2\alpha = d_2^2 - d_1^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{d_2^2 - d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha} - \dfrac{a}{2}$. Пусть точка C – середина AB, точка R – ее проекция на прямую PQ . Тогда из теоремы Фалеса $O_1R = x + \dfrac{a}{2} = \dfrac{d_2^2 - d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha}$, теперь искомое расстояние CK находим по теореме Пифагора из треугольника CRK, K – проекция точки C на вторую прямую, отрезок RK перпендикулярен второй прямой по теореме о трех перпендикулярах. При этом $RK = (x+a)\cdot\sin\alpha$. Таким образом, длина CK находится из равенства

$$CK^2 = h^2 + (x+\frac{a}{2})^2\cdot\sin^2\alpha = d_1^2 - (\frac{d_2^2 - d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha} - \frac{a}{2}\sin\alpha)^2 + (\frac{d_2^2 - d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha})^2 .$$

Окончательно $CK = \sqrt{d_1^2 - \dfrac{a^2}{4}\sin^2\alpha + \dfrac{1}{2}(d_2^2 - d_1^2)}$. Подставляя данные задачи, получаем 9.8 мм

Ответ: 9.8

Вариант 3.3

Плоский кусок горной породы имеет два тонких прямых сквозных хода, которые проделали черви-илоеды в эпоху мезозоя. Один из этих ходов имеет длину 50 мм, угол между ходами равен 25 градусам, расстояния от входа и выхода первого хода до второго хода равны соответственно 7.4 и 25 мм. На каком расстоянии от второго хода располагается точка - середина первого хода? Ответ дайте с точностью до 0.1 мм

Решение. Рассмотрим две параллельные плоскости, содержащие прямые ходы условия задачи. Пусть A,B – соответственно вход и выход из породы для первой прямой, M и N – их проекции на вторую прямую. Пусть далее точка O первой прямой и ее проекция O_1 на вторую прямую взяты таким образом, что отрезок OO_1 – общий перпендикуляр к двум прямым. Проекции точек A и B на плоскость, содержащую вторую прямую, обозначим как P и Q соответственно. Тогда из прямоугольных треугольников O_1MP и O_1NQ: $MP = x\cdot\sin\alpha, NQ = (x+a)\cdot\sin\alpha$, где x= O_1P, a=AB. Из прямоугольных треугольников AMP и BNQ: $d_1^2 = h^2 + (x\cdot\sin\alpha)^2, d_2^2 = h^2 + ((x+a)\cdot\sin\alpha)^2$, здесь d_1 - расстояние от точки A до второй прямой, d_2 - расстояние от точки B до второй прямой, h – расстояние между прямыми ходами, h=AP=BQ. Вычитая второе равенство из первого, получаем $(2x+a)\cdot a\cdot\sin^2\alpha = d_2^2 - d_1^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha} - \dfrac{a}{2}$. Пусть точка C – середина AB, точка R – ее проекция на прямую PQ . Тогда из теоремы Фалеса $O_1R = x + \dfrac{a}{2} = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha}$, теперь искомое расстояние CK находим по теореме Пифагора из треугольника CRK, K – проекция точки C на вторую прямую, отрезок RK перпендикулярен второй прямой по теореме о трех перпендикулярах. При этом $RK = (x+a)\cdot\sin\alpha$. Таким образом, длина CK находится из равенства

$$CK^2 = h^2 + (x+\frac{a}{2})^2\cdot\sin^2\alpha = d_1^2 - (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha} - \frac{a}{2}\sin\alpha)^2 + (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha})^2 .$$

Окончательно $CK = \sqrt{d_1^2 - \dfrac{a^2}{4}\sin^2\alpha + \dfrac{1}{2}(d_2^2-d_1^2)}$. Подставляя данные задачи, получаем 15.1 мм

Ответ: 15.1

Вариант 3.4

Плоский кусок горной породы имеет два тонких прямых сквозных хода, которые проделали черви-илоеды в эпоху мезозоя. Один из этих ходов имеет длину 50 мм, угол между ходами равен 14 градусам, расстояния от входа и выхода первого хода до второго хода равны соответственно 8.5 и 16 мм. На каком расстоянии от второго хода располагается точка - середина первого хода? Ответ дайте с точностью до 0.1 мм

Решение. Рассмотрим две параллельные плоскости, содержащие прямые ходы условия задачи. Пусть A,B – соответственно вход и выход из породы для первой прямой, M и N – их проекции на вторую прямую. Пусть далее точка O первой прямой и ее проекция O_1 на вторую прямую взяты таким образом, что отрезок OO_1 – общий перпендикуляр к двум прямым. Проекции точек A и B на плоскость, содержащую вторую прямую, обозначим как P и Q соответственно. Тогда из прямоугольных треугольников O_1MP и O_1NQ: $MP = x\cdot\sin\alpha, NQ = (x+a)\cdot\sin\alpha$, где x= O_1P, a=AB. Из прямоугольных треугольников AMP и BNQ: $d_1^2 = h^2 + (x\cdot\sin\alpha)^2, d_2^2 = h^2 + ((x+a)\cdot\sin\alpha)^2$, здесь d_1 - расстояние от точки A до второй прямой, d_2 - расстояние от точки B до второй прямой, h – расстояние между прямыми ходами, h=AP=BQ. Вычитая второе равенство из первого, получаем $(2x+a)\cdot a\cdot\sin^2\alpha = d_2^2 - d_1^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha} - \dfrac{a}{2}$. Пусть точка C – середина AB, точка R – ее проекция на прямую PQ . Тогда из теоремы Фалеса $O_1R = x + \dfrac{a}{2} = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha}$, теперь искомое расстояние CK находим по теореме Пифагора из треугольника CRK, K – проекция точки C на вторую прямую, отрезок RK перпендикулярен второй прямой по теореме о трех перпендикулярах. При этом $RK = (x+a)\cdot\sin\alpha$. Таким образом, длина CK находится из равенства

$$CK^2 = h^2 + (x+\frac{a}{2})^2\cdot\sin^2\alpha = d_1^2 - (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha} - \frac{a}{2}\sin\alpha)^2 + (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha})^2.$$

Окончательно $CK = \sqrt{d_1^2 - \dfrac{a^2}{4}\sin^2\alpha + \dfrac{1}{2}(d_2^2-d_1^2)}$. Подставляя данные задачи, получаем 11.3 мм

Ответ: 11.3

Вариант 3.5

Плоский кусок горной породы имеет два тонких прямых сквозных хода, которые проделали черви-илоеды в эпоху мезозоя. Один из этих ходов имеет длину 40 мм, угол между ходами равен 16 градусам, расстояния от входа и выхода первого хода до второго хода равны соответственно 9.3 и 18 мм. На каком расстоянии от второго хода располагается точка - середина первого хода? Ответ дайте с точностью до 0.1 мм

Решение. Рассмотрим две параллельные плоскости, содержащие прямые ходы условия задачи. Пусть A,B – соответственно вход и выход из породы для первой прямой, M и N – их проекции на вторую прямую. Пусть далее точка O первой прямой и ее проекция O_1 на вторую прямую взяты таким образом, что отрезок OO_1 – общий перпендикуляр к двум прямым. Проекции точек A и B на плоскость, содержащую вторую прямую, обозначим как P и Q соответственно. Тогда из прямоугольных треугольников O_1MP и O_1NQ: $MP = x \cdot \sin\alpha, NQ = (x+a)\cdot\sin\alpha$, где x= O_1P, a=AB. Из прямоугольных треугольников AMP и BNQ: $d_1^2 = h^2 + (x\cdot\sin\alpha)^2, d_2^2 = h^2 + ((x+a)\cdot\sin\alpha)^2$, здесь d_1 - расстояние от точки A до второй прямой, d_2 - расстояние от точки B до второй прямой, h – расстояние между прямыми ходами, h=AP=BQ. Вычитая второе равенство из первого, получаем $(2x+a)\cdot a\cdot\sin^2\alpha = d_2^2 - d_1^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha} - \dfrac{a}{2}$. Пусть точка C – середина AB, точка R – ее проекция на прямую PQ . Тогда из теоремы Фалеса $O_1R = x + \dfrac{a}{2} = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha}$, теперь искомое расстояние CK находим по теореме Пифагора из треугольника CRK, K – проекция точки C на вторую прямую, отрезок RK перпендикулярен второй прямой по теореме о трех перпендикулярах. При этом $RK = (x+a)\cdot\sin\alpha$. Таким образом, длина CK находится из равенства

$$CK^2 = h^2 + (x+\frac{a}{2})^2\cdot\sin^2\alpha = d_1^2 - (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha} - \frac{a}{2}\sin\alpha)^2 + (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha})^2.$$

Окончательно $CK = \sqrt{d_1^2 - \frac{a^2}{4}\sin^2\alpha + \frac{1}{2}(d_2^2-d_1^2)}$. Подставляя данные задачи, получаем 13.2 мм

Ответ: 13.2

Вариант 3.6

Плоский кусок горной породы имеет два тонких прямых сквозных хода, которые проделали черви-илоеды в эпоху мезозоя. Один из этих ходов имеет длину 40 мм, угол между ходами равен 17 градусам, расстояния от входа и выхода первого хода до второго хода равны соответственно 10.5 и 16 мм. На каком расстоянии от второго хода располагается точка - середина первого хода? Ответ дайте с точностью до 0.1 мм

Решение. Рассмотрим две параллельные плоскости, содержащие прямые ходы условия задачи. Пусть A,B – соответственно вход и выход из породы для первой прямой, M и N – их проекции на вторую прямую. Пусть далее точка O первой прямой и ее проекция O_1 на вторую прямую взяты таким образом, что отрезок OO_1 – общий перпендикуляр к двум прямым. Проекции точек A и B на плоскость, содержащую вторую прямую, обозначим как P и Q соответственно. Тогда из прямоугольных треугольников O_1MP и O_1NQ: $MP = x\cdot\sin\alpha, NQ = (x+a)\cdot\sin\alpha$, где x= O_1P, a=AB. Из прямоугольных треугольников AMP и BNQ: $d_1^2 = h^2 + (x\cdot\sin\alpha)^2, d_2^2 = h^2 + ((x+a)\cdot\sin\alpha)^2$, здесь d_1 - расстояние от точки A до второй прямой, d_2 - расстояние от точки B до второй прямой, h – расстояние между прямыми ходами, h=AP=BQ. Вычитая второе равенство из первого, получаем $(2x+a)\cdot a\cdot\sin^2\alpha = d_2^2 - d_1^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha} - \dfrac{a}{2}$. Пусть точка C – середина AB, точка R – ее проекция на прямую PQ . Тогда из теоремы Фалеса $O_1R = x + \dfrac{a}{2} = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha}$, теперь искомое расстояние CK находим по теореме Пифагора из треугольника CRK, K – проекция точки C на вторую прямую, отрезок RK перпендикулярен второй прямой по теореме о трех перпендикулярах. При этом $RK = (x+a)\cdot\sin\alpha$. Таким образом, длина CK находится из равенства

$$CK^2 = h^2 + (x+\frac{a}{2})^2\cdot\sin^2\alpha = d_1^2 - (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha} - \frac{a}{2}\sin\alpha)^2 + (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha})^2.$$

Окончательно $CK = \sqrt{d_1^2 - \dfrac{a^2}{4}\sin^2\alpha + \dfrac{1}{2}(d_2^2-d_1^2)}$. Подставляя данные задачи, получаем 12.2 мм

Ответ: 12.2

Вариант 3.7

Плоский кусок горной породы имеет два тонких прямых сквозных хода, которые проделали черви-илоеды в эпоху мезозоя. Один из этих ходов имеет длину 40 мм, угол между ходами равен 16 градусам, расстояния от входа и выхода первого хода до второго хода равны соответственно 11.4 и 18 мм. На каком расстоянии от второго хода располагается точка - середина первого хода? Ответ дайте с точностью до 0.1 мм

Решение. Рассмотрим две параллельные плоскости, содержащие прямые ходы условия задачи. Пусть A,B – соответственно вход и выход из породы для первой прямой, M и N – их проекции на вторую прямую. Пусть далее точка O первой прямой и ее проекция O_1 на вторую прямую взяты таким образом, что отрезок OO_1 – общий перпендикуляр к двум прямым. Проекции точек A и B на плоскость, содержащую вторую прямую, обозначим как P и Q соответственно. Тогда из прямоугольных треугольников O_1MP и O_1NQ: $MP = x\cdot\sin\alpha, NQ = (x+a)\cdot\sin\alpha$, где x= O_1P, a=AB. Из прямоугольных треугольников AMP и BNQ: $d_1^2 = h^2 + (x\cdot\sin\alpha)^2, d_2^2 = h^2 + ((x+a)\cdot\sin\alpha)^2$, здесь d_1 - расстояние от точки A до второй прямой, d_2 - расстояние от точки B до второй прямой, h – расстояние между прямыми ходами, h=AP=BQ. Вычитая второе равенство из первого, получаем $(2x+a)\cdot a\cdot\sin^2\alpha = d_2^2 - d_1^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{d_2^2 - d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha} - \dfrac{a}{2}$. Пусть точка C – середина AB, точка R – ее проекция на прямую PQ . Тогда из теоремы Фалеса $O_1R = x + \dfrac{a}{2} = \dfrac{d_2^2 - d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha}$, теперь искомое расстояние CK находим по теореме Пифагора из треугольника CRK, K – проекция точки C на вторую прямую, отрезок RK перпендикулярен второй прямой по теореме о трех перпендикулярах. При этом $RK = (x+a)\cdot\sin\alpha$. Таким образом, длина CK находится из равенства

$$CK^2 = h^2 + (x+\frac{a}{2})^2\cdot\sin^2\alpha = d_1^2 - (\frac{d_2^2 - d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha} - \frac{a}{2}\sin\alpha)^2 + (\frac{d_2^2 - d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha})^2 .$$

Окончательно $CK = \sqrt{d_1^2 - \dfrac{a^2}{4}\sin^2\alpha + \dfrac{1}{2}(d_2^2 - d_1^2)}$. Подставляя данные задачи, получаем 14.0 мм

Ответ: 14.0

Вариант 3.8

Плоский кусок горной породы имеет два тонких прямых сквозных хода, которые проделали черви-илоеды в эпоху мезозоя. Один из этих ходов имеет длину 40 мм, угол между ходами равен 12 градусам, расстояния от входа и выхода первого хода до второго хода равны соответственно 12.2 и 16 мм. На каком расстоянии от второго хода располагается точка - середина первого хода? Ответ дайте с точностью до 0.1 мм

Решение. Рассмотрим две параллельные плоскости, содержащие прямые ходы условия задачи. Пусть A,B – соответственно вход и выход из породы для первой прямой, M и N – их проекции на вторую прямую. Пусть далее точка O первой прямой и ее проекция O_1 на вторую прямую взяты таким образом, что отрезок OO_1 – общий перпендикуляр к двум прямым. Проекции точек A и B на плоскость, содержащую вторую прямую, обозначим как P и Q соответственно. Тогда из прямоугольных треугольников O_1MP и O_1NQ: $MP = x\cdot\sin\alpha, NQ = (x+a)\cdot\sin\alpha$, где x= O_1P, a=AB. Из прямоугольных треугольников AMP и BNQ: $d_1^2 = h^2 + (x\cdot\sin\alpha)^2, d_2^2 = h^2 + ((x+a)\cdot\sin\alpha)^2$, здесь d_1 - расстояние от точки A до второй прямой, d_2 - расстояние от точки B до второй прямой, h – расстояние между прямыми ходами, h=AP=BQ. Вычитая второе равенство из первого, получаем $(2x+a)\cdot a\cdot\sin^2\alpha = d_2^2 - d_1^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha} - \dfrac{a}{2}$. Пусть точка C – середина AB, точка R – ее проекция на прямую PQ . Тогда из теоремы Фалеса $O_1R = x + \dfrac{a}{2} = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha}$, теперь искомое расстояние CK находим по теореме Пифагора из треугольника CRK, K – проекция точки C на вторую прямую, отрезок RK перпендикулярен второй прямой по теореме о трех перпендикулярах. При этом $RK = (x+a)\cdot\sin\alpha$. Таким образом, длина CK находится из равенства

$$CK^2 = h^2 + (x+\frac{a}{2})^2\cdot\sin^2\alpha = d_1^2 - (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha} - \frac{a}{2}\sin\alpha)^2 + (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha})^2 .$$

Окончательно $CK = \sqrt{d_1^2 - \frac{a^2}{4}\sin^2\alpha + \frac{1}{2}(d_2^2-d_1^2)}$. Подставляя данные задачи, получаем 13.6 мм

Ответ: 13.6

Задание 4

Вариант 4.1

Искусственный спутник Земли обращается с запада на восток по круговой орбите радиуса r = 6600 км, лежащей в плоскости экватора. Сколько времени за один оборот вокруг Земли спутник находится в поле зрения наблюдателя, неподвижно стоящего на экваторе? Считать, что радиус Земли $R_З$ = 6400 км, ускорение свободного падения на поверхности Земли g = 10 м/с^2. Рельефом местности и растительностью вокруг наблюдателя, а также ростом наблюдателя пренебречь. Ответ в секундах округлите до целых.

Решение. Рассмотрим движение спутника в геоцентрической системе отсчёта S, у которой начало координат O совпадает с центром Земли, ось OZ совпадает с осью вращения Земли, а оси OX и OY направлены к «неподвижным» звёздам. В этой системе отсчёта Земля вращается вокруг неподвижной оси. Приближённо считая данную систему отсчёта инерциальной, найдём скорость движения спутника по круговой орбите радиусом r в указанной системе координат. Спутник движется под действием силы гравитационного притяжения Земли $F = G\frac{Mm}{r^2}$, где m – масса спутника, M – масса Земли, G – гравитационная постоянная, и поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение спутника $g(r) = \frac{GM}{r^2}$. Если положить в этой формуле $r = R_З$, то получим значение ускорения свободного падения на поверхности Земли g. Следовательно, $g = \frac{GM}{R_З^2}$, т.е. $GM = gR_З^2$, так что формула для величины ускорения спутника на круговой орбите радиусом r принимает вид:

$$g(r) = g \cdot \left(\frac{R_З}{r}\right)^2 . \qquad (1)$$

С другой стороны, поскольку спутник движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью, ускорение спутника сводится к центростремительному:

$$g(r) = \frac{v^2}{r} . \qquad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получим, что скорость движения спутника по орбите в геоцентрической системе отсчёта равна

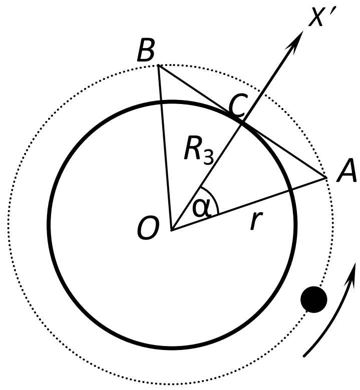
$$v = R_З\sqrt{\frac{g}{r}} .$$

Рассмотрим теперь систему отсчёта *S*′, неподвижную относительно Земли. Начало координат в этой системе отсчёта совпадает с началом координат системы отсчёта *S*, ось *OZ*′ совпадает с осью *OZ* системы координат *S*, а ось *OX*′ направлена в сторону неподвижного наблюдателя на экваторе. Ясно, что система отсчета *S*′ вращается относительно системы отсчета *S* вокруг той же оси и с той же угловой скоростью $\omega_0 = 2\pi / T$, что и Земля, где *T* – период обращения Земли вокруг своей оси. Поэтому, поскольку в системе отсчета *S* спутник обращается -Зспутник движется по окружности радиуса *r* с угловой скоростью, равной по величине

$$\omega' = \omega - \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{R_З}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T},$$

так как суточное вращение Земли происходит с запада на восток.

На рисунке показано экваториальное сечение Земли. Точка *C* на оси *OX*′ обозначает положение наблюдателя на экваторе Земли в системе координат *S*′, прямая *ACB* представляет собой касательную к поверхности Земли в точке *C*, точки *A* и *B* являются точками пересечения касательной *ACB* с окружностью радиусом $r = OA$, представляющей орбиту спутника. Из рисунка видно, что дуга *AB* отвечает положениям спутника на небосводе, при которых он виден из точки *C*, причём угол *AOB* равен $2\alpha = 2\arccos\left(\frac{R_З}{r}\right)$. Следовательно, время нахождения спутника в поле зрения наблюдателя в точке *C*, совпадающее с временем движения спутника по дуге *AB*, составляет



$$t = \frac{2\alpha}{\omega'} = \frac{2\arccos\left(\frac{R_З}{r}\right)}{\frac{R_З}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\arccos\left(\frac{6400}{6600}\right)}{\frac{6400}{6600}\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{\frac{10}{6{,}6}} - \frac{2\pi}{86400}} \approx 440\,\text{с}.$$

Ответ: 440

Вариант 4.2

Искусственный спутник Земли обращается с запада на восток по круговой орбите радиуса r = 6650 км, лежащей в плоскости экватора. Сколько времени за один оборот вокруг Земли спутник находится в поле зрения наблюдателя, неподвижно стоящего на экваторе? Считать, что радиус Земли R_3 = 6400 км, ускорение свободного падения на поверхности Земли g = 10 м/с^2. Рельефом местности и растительностью вокруг наблюдателя, а также ростом наблюдателя пренебречь. Ответ в секундах округлите до целых.

Решение. Рассмотрим движение спутника в геоцентрической системе отсчёта S, у которой начало координат O совпадает с центром Земли, ось OZ совпадает с осью вращения Земли, а оси OX и OY направлены к «неподвижным» звёздам. В этой системе отсчёта Земля вращается вокруг неподвижной оси. Приближённо считая данную систему отсчёта инерциальной, найдём скорость движения спутника по круговой орбите радиусом r в указанной системе координат. Спутник движется под действием силы гравитационного притяжения Земли $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$, где m – масса спутника, M – масса Земли, G – гравитационная постоянная, и поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение спутника $g(r) = \dfrac{GM}{r^2}$. Если положить в этой формуле $r = R_3$, то получим значение ускорения свободного падения на поверхности Земли g. Следовательно, $g = \dfrac{GM}{R_3^2}$, т.е. $GM = gR_3^2$, так что формула для величины ускорения спутника на круговой орбите радиусом r принимает вид:

$$g(r) = g \cdot \left(\frac{R_3}{r}\right)^2 .$$

(1)

С другой стороны, поскольку спутник движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью, ускорение спутника сводится к центростремительному:

$$g(r) = \frac{v^2}{r} .$$

(2)

Сравнивая формулы (1) и (2), получим, что скорость движения спутника по орбите в геоцентрической системе отсчёта равна

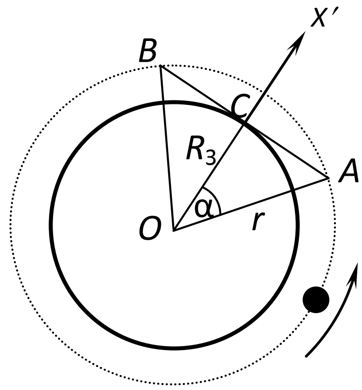
$$v = R_3\sqrt{\frac{g}{r}} .$$

Рассмотрим теперь систему отсчёта S', неподвижную относительно Земли. Начало координат в этой системе отсчёта совпадает с началом координат системы отсчёта S, ось OZ' совпадает с осью OZ системы координат S, а ось OX' направлена в сторону неподвижного наблюдателя на экваторе. Ясно, что система отсчета S' вращается относительно системы отсчета S вокруг той же оси и с той же угловой

скоростью $\omega_0 = 2\pi / T$, что и Земля, где *T* – период обращения Земли вокруг своей оси. Поэтому, поскольку в системе отсчета *S* спутник обращается -3спутник движется по окружности радиуса *r* с угловой скоростью, равной по величине

$$\omega' = \omega - \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{R_З}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T},$$

так как суточное вращение Земли происходит с запада на восток.



На рисунке показано экваториальное сечение Земли. Точка *C* на оси *OX′* обозначает положение наблюдателя на экваторе Земли в системе координат *S′*, прямая *ACB* представляет собой касательную к поверхности Земли в точке *C*, точки *A* и *B* являются точками пересечения касательной *ACB* с окружностью радиусом $r = OA$, представляющей орбиту спутника. Из рисунка видно, что дуга *AB* отвечает положениям спутника на небосводе, при которых он виден из точки *C*, причём угол *AOB* равен $2\alpha = 2\arccos\left(\frac{R_З}{r}\right)$. Следовательно, время нахождения спутника в поле зрения наблюдателя в точке *C*, совпадающее с временем движения спутника по дуге *AB*, составляет

$$t = \frac{2\alpha}{\omega'} = \frac{2\arccos\left(\frac{R_З}{r}\right)}{\frac{R_З}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\arccos\left(\frac{6400}{6650}\right)}{\frac{6400}{6650}\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{\frac{10}{6{,}65}} - \frac{2\pi}{86400}} \approx 497 \text{ с.}$$

Ответ: 497

Вариант 4.3

Искусственный спутник Земли обращается с запада на восток по круговой орбите радиуса $r = 6700$ км, лежащей в плоскости экватора. Сколько времени за один оборот вокруг Земли спутник находится в поле зрения наблюдателя, неподвижно стоящего на экваторе? Считать, что радиус Земли $R_З = 6400$ км, ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 10$ м/с^2. Рельефом местности и растительностью вокруг наблюдателя, а также ростом наблюдателя пренебречь. Ответ в секундах округлите до целых.

Решение. Рассмотрим движение спутника в геоцентрической системе отсчёта S, у которой начало координат O совпадает с центром Земли, ось OZ совпадает с осью вращения Земли, а оси OX и OY направлены к «неподвижным» звёздам. В этой системе отсчёта Земля вращается вокруг неподвижной оси. Приближённо считая данную систему отсчёта инерциальной, найдём скорость движения спутника по круговой орбите радиусом r в указанной системе координат. Спутник движется под действием силы гравитационного притяжения Земли $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$, где m – масса спутника, M – масса Земли, G – гравитационная постоянная, и поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение спутника $g(r) = \dfrac{GM}{r^2}$. Если положить в этой формуле $r = R_З$, то получим значение ускорения свободного падения на поверхности Земли g. Следовательно, $g = \dfrac{GM}{R_З^2}$, т.е. $GM = gR_З^2$, так что формула для величины ускорения спутника на круговой орбите радиусом r принимает вид:

$$g(r) = g \cdot \left(\frac{R_З}{r}\right)^2. \tag{1}$$

С другой стороны, поскольку спутник движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью, ускорение спутника сводится к центростремительному:

$$g(r) = \frac{v^2}{r}. \tag{2}$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получим, что скорость движения спутника по орбите в геоцентрической системе отсчёта равна

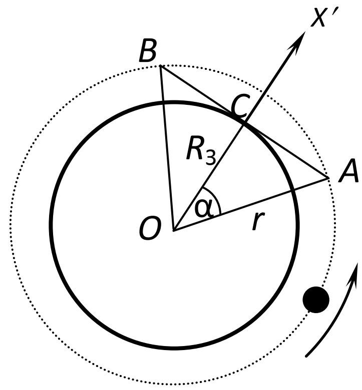
$$v = R_З\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Рассмотрим теперь систему отсчёта S', неподвижную относительно Земли. Начало координат в этой системе отсчёта совпадает с началом координат системы отсчёта S, ось OZ' совпадает с осью OZ системы координат S, а ось OX' направлена в сторону неподвижного наблюдателя на экваторе. Ясно, что система отсчета S' вращается относительно системы отсчета S вокруг той же оси и с той же угловой

скоростью $\omega_0 = 2\pi / T$, что и Земля, где T – период обращения Земли вокруг своей оси. Поэтому, поскольку в системе отсчета *S* спутник обращается -3спутник движется по окружности радиуса *r* с угловой скоростью, равной по величине

$$\omega' = \omega - \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{R_3}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T},$$

так как суточное вращение Земли происходит с запада на восток.



На рисунке показано экваториальное сечение Земли. Точка *C* на оси *OX′* обозначает положение наблюдателя на экваторе Земли в системе координат *S′*, прямая *ACB* представляет собой касательную к поверхности Земли в точке *C*, точки *A* и *B* являются точками пересечения касательной *ACB* с окружностью радиусом $r = OA$, представляющей орбиту спутника. Из рисунка видно, что дуга *AB* отвечает положениям спутника на небосводе, при которых он виден из точки *C*, причём угол *AOB* равен $2\alpha = 2\arccos\left(\frac{R_3}{r}\right)$. Следовательно, время нахождения спутника в поле зрения наблюдателя в точке *C*, совпадающее с временем движения спутника по дуге *AB*, составляет

$$t = \frac{2\alpha}{\omega'} = \frac{2\arccos\left(\frac{R_3}{r}\right)}{\frac{R_3}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\arccos\left(\frac{6400}{6700}\right)}{\frac{6400}{6700}\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{\frac{10}{6,7}} - \frac{2\pi}{86400}} \approx 549 \text{ с.}$$

Ответ: 549

Вариант 4.4

Искусственный спутник Земли обращается с запада на восток по круговой орбите радиуса r = 6750 км, лежащей в плоскости экватора. Сколько времени за один оборот вокруг Земли спутник находится в поле зрения наблюдателя, неподвижно стоящего на экваторе? Считать, что радиус Земли $R_З$ = 6400 км, ускорение свободного падения на поверхности Земли g = 10 м/с^2. Рельефом местности и растительностью вокруг наблюдателя, а также ростом наблюдателя пренебречь. Ответ в секундах округлите до целых.

Решение. Рассмотрим движение спутника в геоцентрической системе отсчёта S, у которой начало координат O совпадает с центром Земли, ось OZ совпадает с осью вращения Земли, а оси OX и OY направлены к «неподвижным» звёздам. В этой системе отсчёта Земля вращается вокруг неподвижной оси. Приближённо считая данную систему отсчёта инерциальной, найдём скорость движения спутника по круговой орбите радиусом r в указанной системе координат. Спутник движется под действием силы гравитационного притяжения Земли $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$, где m – масса спутника, M – масса Земли, G – гравитационная постоянная, и поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение спутника $g(r) = \dfrac{GM}{r^2}$. Если положить в этой формуле $r = R_З$, то получим значение ускорения свободного падения на поверхности Земли g. Следовательно, $g = \dfrac{GM}{R_З^2}$, т.е. $GM = gR_З^2$, так что формула для величины ускорения спутника на круговой орбите радиусом r принимает вид:

$$g(r) = g \cdot \left(\frac{R_З}{r}\right)^2. \tag{1}$$

С другой стороны, поскольку спутник движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью, ускорение спутника сводится к центростремительному:

$$g(r) = \frac{v^2}{r}. \tag{2}$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получим, что скорость движения спутника по орбите в геоцентрической системе отсчёта равна

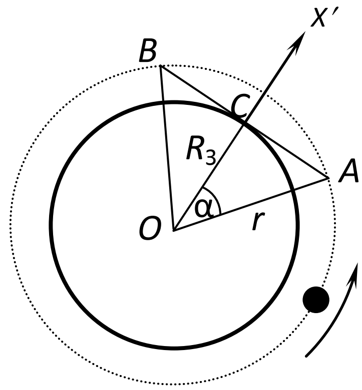
$$v = R_З\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Рассмотрим теперь систему отсчёта S', неподвижную относительно Земли. Начало координат в этой системе отсчёта совпадает с началом координат системы отсчёта S, ось OZ' совпадает с осью OZ системы координат S, а ось OX' направлена в сторону неподвижного наблюдателя на экваторе. Ясно, что система отсчета S' вращается относительно системы отсчета S вокруг той же оси и с той же угловой

скоростью $\omega_0 = 2\pi/T$, что и Земля, где *T* – период обращения Земли вокруг своей оси. Поэтому, поскольку в системе отсчета *S* спутник обращается -Зспутник движется по окружности радиуса *r* с угловой скоростью, равной по величине

$$\omega' = \omega - \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{R_З}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T},$$

так как суточное вращение Земли происходит с запада на восток.



На рисунке показано экваториальное сечение Земли. Точка *C* на оси *OX′* обозначает положение наблюдателя на экваторе Земли в системе координат *S′*, прямая *ACB* представляет собой касательную к поверхности Земли в точке *C*, точки *A* и *B* являются точками пересечения касательной *ACB* с окружностью радиусом $r = OA$, представляющей орбиту спутника. Из рисунка видно, что дуга *AB* отвечает положениям спутника на небосводе, при которых он виден из точки *C*, причём угол *AOB* равен $2\alpha = 2\arccos\left(\frac{R_З}{r}\right)$. Следовательно, время нахождения спутника в поле зрения наблюдателя в точке *C*, совпадающее с временем движения спутника по дуге *AB*, составляет

$$t = \frac{2\alpha}{\omega'} = \frac{2\arccos\left(\frac{R_З}{r}\right)}{\frac{R_З}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\arccos\left(\frac{6400}{6750}\right)}{\frac{6400}{6750}\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{\frac{10}{6,75}} - \frac{2\pi}{86400}} \approx 598\,\text{с}.$$

Ответ: 598

Вариант 4.5

Искусственный спутник Земли обращается с запада на восток по круговой орбите радиуса r = 7000 км, лежащей в плоскости экватора. Сколько времени за один оборот вокруг Земли спутник находится в поле зрения наблюдателя, неподвижно стоящего на экваторе? Считать, что радиус Земли R_3 = 6400 км, ускорение свободного падения на поверхности Земли g = 10 м/с^2. Рельефом местности и растительностью вокруг наблюдателя, а также ростом наблюдателя пренебречь. Ответ в секундах округлите до целых.

Решение. Рассмотрим движение спутника в геоцентрической системе отсчёта S, у которой начало координат O совпадает с центром Земли, ось OZ совпадает с осью вращения Земли, а оси OX и OY направлены к «неподвижным» звёздам. В этой системе отсчёта Земля вращается вокруг неподвижной оси. Приближённо считая данную систему отсчёта инерциальной, найдём скорость движения спутника по круговой орбите радиусом r в указанной системе координат. Спутник движется под действием силы гравитационного притяжения Земли $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$, где m – масса спутника, M – масса Земли, G – гравитационная постоянная, и поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение спутника $g(r) = \dfrac{GM}{r^2}$. Если положить в этой формуле $r = R_3$, то получим значение ускорения свободного падения на поверхности Земли g. Следовательно, $g = \dfrac{GM}{R_3^2}$, т.е. $GM = gR_3^2$, так что формула для величины ускорения спутника на круговой орбите радиусом r принимает вид:

$$g(r) = g\cdot\left(\frac{R_3}{r}\right)^2. \qquad (1)$$

С другой стороны, поскольку спутник движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью, ускорение спутника сводится к центростремительному:

$$g(r) = \frac{v^2}{r}. \qquad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получим, что скорость движения спутника по орбите в геоцентрической системе отсчёта равна

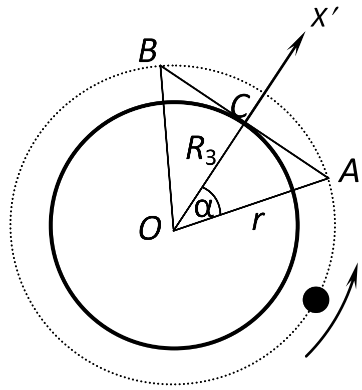
$$v = R_3\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Рассмотрим теперь систему отсчёта S', неподвижную относительно Земли. Начало координат в этой системе отсчёта совпадает с началом координат системы отсчёта S, ось OZ' совпадает с осью OZ системы координат S, а ось OX' направлена в сторону неподвижного наблюдателя на экваторе. Ясно, что система отсчета S' вращается относительно системы отсчета S вокруг той же оси и с той же угловой

скоростью $\omega_0 = 2\pi / T$, что и Земля, где *T* – период обращения Земли вокруг своей оси. Поэтому, поскольку в системе отсчета *S* спутник обращается -Зспутник движется по окружности радиуса *r* с угловой скоростью, равной по величине

$$\omega' = \omega - \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{R_3}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T},$$

так как суточное вращение Земли происходит с запада на восток.



На рисунке показано экваториальное сечение Земли. Точка *C* на оси *OX′* обозначает положение наблюдателя на экваторе Земли в системе координат *S′*, прямая *ACB* представляет собой касательную к поверхности Земли в точке *C*, точки *A* и *B* являются точками пересечения касательной *ACB* с окружностью радиусом $r = OA$, представляющей орбиту спутника. Из рисунка видно, что дуга *AB* отвечает положениям спутника на небосводе, при которых он виден из точки *C*, причём угол *AOB* равен $2\alpha = 2\arccos\left(\frac{R_3}{r}\right)$. Следовательно, время нахождения спутника в поле зрения наблюдателя в точке *C*, совпадающее с временем движения спутника по дуге *AB*, составляет

$$t = \frac{2\alpha}{\omega'} = \frac{2\arccos\left(\frac{R_3}{r}\right)}{\frac{R_3}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\arccos\left(\frac{6400}{7000}\right)}{\frac{6400}{7000}\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{\frac{10}{7{,}0}} - \frac{2\pi}{86400}} \approx 818\,\text{с.}$$

Ответ: 818

Вариант 4.6

Искусственный спутник Земли обращается с запада на восток по круговой орбите радиуса r = 7050 км, лежащей в плоскости экватора. Сколько времени за один оборот вокруг Земли спутник находится в поле зрения наблюдателя, неподвижно стоящего на экваторе? Считать, что радиус Земли $R_З$ = 6400 км, ускорение свободного падения на поверхности Земли g = 10 м/с^2. Рельефом местности и растительностью вокруг наблюдателя, а также ростом наблюдателя пренебречь. Ответ в секундах округлите до целых.

Решение. Рассмотрим движение спутника в геоцентрической системе отсчёта *S*, у которой начало координат *O* совпадает с центром Земли, ось *OZ* совпадает с осью вращения Земли, а оси *OX* и *OY* направлены к «неподвижным» звёздам. В этой системе отсчёта Земля вращается вокруг неподвижной оси. Приближённо считая данную систему отсчёта инерциальной, найдём скорость движения спутника по круговой орбите радиусом r в указанной системе координат. Спутник движется под действием силы гравитационного притяжения Земли $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$, где m – масса спутника, M – масса Земли, G – гравитационная постоянная, и поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение спутника $g(r) = \dfrac{GM}{r^2}$. Если положить в этой формуле $r = R_З$, то получим значение ускорения свободного падения на поверхности Земли g. Следовательно, $g = \dfrac{GM}{R_З^2}$, т.е. $GM = gR_З^2$, так что формула для величины ускорения спутника на круговой орбите радиусом r принимает вид:

$$g(r) = g \cdot \left(\frac{R_З}{r}\right)^2. \tag{1}$$

С другой стороны, поскольку спутник движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью, ускорение спутника сводится к центростремительному:

$$g(r) = \frac{v^2}{r}. \tag{2}$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получим, что скорость движения спутника по орбите в геоцентрической системе отсчёта равна

$$v = R_З\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

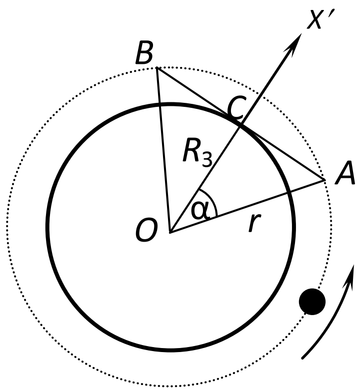
Рассмотрим теперь систему отсчёта *S′*, неподвижную относительно Земли. Начало координат в этой системе отсчёта совпадает с началом координат системы отсчёта *S*, ось *OZ′* совпадает с осью *OZ* системы координат *S*, а ось *OX′* направлена в сторону неподвижного наблюдателя на экваторе. Ясно, что система отсчета *S′* вращается относительно системы отсчета *S* вокруг той же оси и с той же угловой

скоростью $\omega_0 = 2\pi / T$, что и Земля, где *T* – период обращения Земли вокруг своей оси. Поэтому, поскольку в системе отсчета *S* спутник обращается -Зспутник движется по окружности радиуса *r* с угловой скоростью, равной по величине

$$\omega' = \omega - \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{R_3}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T},$$

так как суточное вращение Земли происходит с запада на восток.

На рисунке показано экваториальное сечение Земли. Точка *C* на оси *OX'* обозначает положение наблюдателя на экваторе Земли в системе координат *S'*, прямая *ACB* представляет собой касательную к поверхности Земли в точке *C*, точки *A* и *B* являются точками пересечения касательной *ACB* с окружностью радиусом $r = OA$, представляющей орбиту спутника. Из рисунка видно, что дуга *AB* отвечает положениям спутника на небосводе, при которых он виден из точки *C*, причём угол *AOB* равен $2\alpha = 2\arccos\left(\frac{R_3}{r}\right)$. Следовательно, время нахождения спутника в поле зрения наблюдателя в точке *C*, совпадающее с временем движения спутника по дуге *AB*, составляет



$$t = \frac{2\alpha}{\omega'} = \frac{2\arccos\left(\frac{R_3}{r}\right)}{\frac{R_3}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\arccos\left(\frac{6400}{7050}\right)}{\frac{6400}{7050}\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{\frac{10}{7{,}05}} - \frac{2\pi}{86400}} \approx 858 \text{ с.}$$

Ответ: 858

Вариант 4.7

Искусственный спутник Земли обращается с запада на восток по круговой орбите радиуса r = 7100 км, лежащей в плоскости экватора. Сколько времени за один оборот вокруг Земли спутник находится в поле зрения наблюдателя, неподвижно стоящего на экваторе? Считать, что радиус Земли $R_З$ = 6400 км, ускорение свободного падения на поверхности Земли g = 10 м/с^2. Рельефом местности и растительностью вокруг наблюдателя, а также ростом наблюдателя пренебречь. Ответ в секундах округлите до целых.

Решение. Рассмотрим движение спутника в геоцентрической системе отсчёта S, у которой начало координат O совпадает с центром Земли, ось OZ совпадает с осью вращения Земли, а оси OX и OY направлены к «неподвижным» звёздам. В этой системе отсчёта Земля вращается вокруг неподвижной оси. Приближённо считая данную систему отсчёта инерциальной, найдём скорость движения спутника по круговой орбите радиусом r в указанной системе координат. Спутник движется под действием силы гравитационного притяжения Земли $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$, где m – масса спутника, M – масса Земли, G – гравитационная постоянная, и поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение спутника $g(r) = \dfrac{GM}{r^2}$. Если положить в этой формуле $r = R_З$, то получим значение ускорения свободного падения на поверхности Земли g. Следовательно, $g = \dfrac{GM}{R_З^2}$, т.е. $GM = gR_З^2$, так что формула для величины ускорения спутника на круговой орбите радиусом r принимает вид:

$$g(r) = g \cdot \left(\frac{R_З}{r}\right)^2. \qquad (1)$$

С другой стороны, поскольку спутник движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью, ускорение спутника сводится к центростремительному:

$$g(r) = \frac{v^2}{r}. \qquad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получим, что скорость движения спутника по орбите в геоцентрической системе отсчёта равна

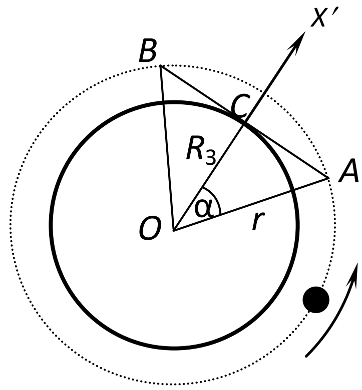
$$v = R_З\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Рассмотрим теперь систему отсчёта S', неподвижную относительно Земли. Начало координат в этой системе отсчёта совпадает с началом координат системы отсчёта S, ось OZ' совпадает с осью OZ системы координат S, а ось OX' направлена в сторону неподвижного наблюдателя на экваторе. Ясно, что система отсчета S' вращается относительно системы отсчета S вокруг той же оси и с той же угловой

скоростью $\omega_0 = 2\pi / T$, что и Земля, где *T* – период обращения Земли вокруг своей оси. Поэтому, поскольку в системе отсчета *S* спутник обращается -3спутник движется по окружности радиуса *r* с угловой скоростью, равной по величине

$$\omega' = \omega - \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{R_3}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T},$$

так как суточное вращение Земли происходит с запада на восток.



На рисунке показано экваториальное сечение Земли. Точка *C* на оси *OX′* обозначает положение наблюдателя на экваторе Земли в системе координат *S′*, прямая *ACB* представляет собой касательную к поверхности Земли в точке *C*, точки *A* и *B* являются точками пересечения касательной *ACB* с окружностью радиусом $r = OA$, представляющей орбиту спутника. Из рисунка видно, что дуга *AB* отвечает положениям спутника на небосводе, при которых он виден из точки *C*, причём угол *AOB* равен $2\alpha = 2\arccos\left(\frac{R_3}{r}\right)$. Следовательно, время нахождения спутника в поле зрения наблюдателя в точке *C*, совпадающее с временем движения спутника по дуге *AB*, составляет

$$t = \frac{2\alpha}{\omega'} = \frac{2\arccos\left(\frac{R_3}{r}\right)}{\frac{R_3}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\arccos\left(\frac{6400}{7100}\right)}{\frac{6400}{7100}\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{\frac{10}{7{,}1}} - \frac{2\pi}{86400}} \approx 898\,\text{с}.$$

Ответ: 898

Вариант 4.8

Искусственный спутник Земли обращается с запада на восток по круговой орбите радиуса r = 7150 км, лежащей в плоскости экватора. Сколько времени за один оборот вокруг Земли спутник находится в поле зрения наблюдателя, неподвижно стоящего на экваторе? Считать, что радиус Земли $R_З$ = 6400 км, ускорение свободного падения на поверхности Земли g = 10 м/с^2. Рельефом местности и растительностью вокруг наблюдателя, а также ростом наблюдателя пренебречь. Ответ в секундах округлите до целых.

Решение. Рассмотрим движение спутника в геоцентрической системе отсчёта S, у которой начало координат O совпадает с центром Земли, ось OZ совпадает с осью вращения Земли, а оси OX и OY направлены к «неподвижным» звёздам. В этой системе отсчёта Земля вращается вокруг неподвижной оси. Приближённо считая данную систему отсчёта инерциальной, найдём скорость движения спутника по круговой орбите радиусом r в указанной системе координат. Спутник движется под действием силы гравитационного притяжения Земли $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$, где m – масса спутника, M – масса Земли, G – гравитационная постоянная, и поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение спутника $g(r) = \dfrac{GM}{r^2}$. Если положить в этой формуле $r = R_З$, то получим значение ускорения свободного падения на поверхности Земли g. Следовательно, $g = \dfrac{GM}{R_З^2}$, т.е. $GM = gR_З^2$, так что формула для величины ускорения спутника на круговой орбите радиусом r принимает вид:

$$g(r) = g\cdot\left(\frac{R_З}{r}\right)^2. \tag{1}$$

С другой стороны, поскольку спутник движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью, ускорение спутника сводится к центростремительному:

$$g(r) = \frac{v^2}{r}. \tag{2}$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получим, что скорость движения спутника по орбите в геоцентрической системе отсчёта равна

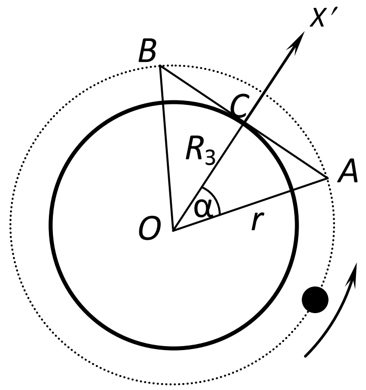
$$v = R_З\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Рассмотрим теперь систему отсчёта S', неподвижную относительно Земли. Начало координат в этой системе отсчёта совпадает с началом координат системы отсчёта S, ось OZ' совпадает с осью OZ системы координат S, а ось OX' направлена в сторону неподвижного наблюдателя на экваторе. Ясно, что система отсчета S' вращается относительно системы отсчета S вокруг той же оси и с той же угловой

скоростью $\omega_0 = 2\pi / T$, что и Земля, где *T* – период обращения Земли вокруг своей оси. Поэтому, поскольку в системе отсчета *S* спутник обращается -Зспутник движется по окружности радиуса *r* с угловой скоростью, равной по величине

$$\omega' = \omega - \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{R_3}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T},$$

так как суточное вращение Земли происходит с запада на восток.



На рисунке показано экваториальное сечение Земли. Точка *C* на оси *OX′* обозначает положение наблюдателя на экваторе Земли в системе координат *S′*, прямая *ACB* представляет собой касательную к поверхности Земли в точке *C*, точки *A* и *B* являются точками пересечения касательной *ACB* с окружностью радиусом $r = OA$, представляющей орбиту спутника. Из рисунка видно, что дуга *AB* отвечает положениям спутника на небосводе, при которых он виден из точки *C*, причём угол *AOB* равен $2\alpha = 2\arccos\left(\frac{R_3}{r}\right)$. Следовательно, время нахождения спутника в поле зрения наблюдателя в точке *C*, совпадающее с временем движения спутника по дуге *AB*, составляет

$$t = \frac{2\alpha}{\omega'} = \frac{2\arccos\left(\frac{R_3}{r}\right)}{\frac{R_3}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\arccos\left(\frac{6400}{7150}\right)}{\frac{6400}{7150}\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{\frac{10}{7{,}15}} - \frac{2\pi}{86400}} \approx 938\,\text{c}.$$

Ответ: 938

Тестовые задания для разминки 1-го тура (10-11 классы):

Тестовые задания для разминки

Как называются легкий ветер на побережье морей, меняющий направление дважды в сутки?
Муссон
Бриз
Пассат

Как называются низкая намывная полоса суши на берегу моря, соединяющаяся одним концом с берегом?
Дельта
Атолл
Коса

Как называются низменность в низовьях реки, сложенная речными отложениями и разделенная разветвленной сетью рукавов и протоков?
Дельта
Терраса
Меандр

Как называются мелкий водоём, отделённый от моря намытым песком или коралловыми рифами?
Болото
Коса
Лагуна

Как называются прибор для измерения глубины океана на основе измерения времени получения отражённого от морского дна сигнала при его известной скорости?
Эхолот
Сейсмограф
Глубомер

Как называются наиболее крупная положительная тектоническая структура платформ, в которой на поверхность выходит ее фундамент, лишенный осадочного чехла?
Плита
Щит
Плоскогорье

Как называются концентрат тяжелых минералов, получаемый при промывке рыхлых горных пород?
Песок
Шлих
Россыпь

Как называются обломки вулканических пород и частиц вулканического стекла, поднятые в воздух при извержении вулкана?
Песок

Галька
Тефра

Как называется кусок природного металла (золота, платины) больших размеров, найденный в россыпных или коренных месторождениях?
Самородок
Слиток
Сплав

Как называются мелкие живые организмы, живущие во взвешенном состоянии в толще морской воды?
Рыбы
Кораллы
Планктон

Как называется ископаемая смола деревьев?
Янтарь
Кварцит
Торф

Как называется обширная выровненная поверхность Земли (обычно не выше 200 м над уровнем моря)?
Балка
Равнина
Пойма

Как называется совокупность неровностей поверхности земли?
Терраса
Пустыня
Рельеф

Как называется узкая V-образная долина реки?
Каньон
Овраг
Терраса

Как называется выступающая из воды постройка из морских известковых организмов?
Валун
Вулкан
Риф

Как называется естественный выход подземных вод на поверхность?
Родник

Водопад
Пруд

Как называется источник горячей воды в областях активной вулканической деятельности?
Родник
Гейзер
Горячая точка

Как называется канал, через который выбрасывается лава?
Жерло
Шахта
Колодец

Как называется процесс разрушения и химического изменения горных пород вследствие перепадов температуры, химического и механического воздействия атмосферы, воды и организмов?
Выветривание
Сальтация
Литогенез

Как называется агрегат кристаллов, наросших на общее основание?
Конгломерат
Брекчия
Друза

Как называется форма рельефа в виде понижения, узкое по сравнению со своей длиной, в основном извилистое углубление в земной поверхности?
Бархан
Долина
Плато

Как называется углубление (воронка), возникающее в результате взрыва, который происходит при ударе крупного метеорита о твердую поверхность?
Метеоритный кратер
Метеоритный желоб
Метеоритный колодец

Как называется твердое тело, имеющее естественную форму правильного многогранника, атомы которого образуют трехмерно-периодическую пространственную укладку?
Горная порода
Диапир
Кристалл

Как называется оболочка Земли между земной корой и ядром Земли?
Мантия
Литосфера

Осадочный чехол

Как называется однородное по физическим свойствам и химическому составу природное тело, образующееся в результате физико-химических процессов в глубинах или на поверхности Земли?

Резервуар

Минерал

Коралл

Как называется скопление на суше или на дне морей мелких обломков, включающих в себя зерна или кристаллы в промышленных концентрациях?

Залежь

Карст

Россыпь

Как называется рыхлые отложения, состоящие из остроугольных неокатанных обломков горных пород размером от 1 до 10 мм?

Галька

Туф

Щебень

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
2016-2017 учебный год

ЗАДАНИЯ 2-го ТУРА ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ «ГЕОЛОГИЯ»
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ

<u>Задание 1</u>

Задание 1

Вариант 1.
Зависимость амплитуды *A* от времени *t* для первой сейсмической волны подчиняется закону $A(t)=\sin(2t+\frac{4}{t})-\sin(4\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{2}))-\frac{4}{t}$, t>0, аналогичная зависимость для второй волны имеет вид $A(t)=2(t-2\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{2}))$, t>0. При каком наибольшем значении $a, a\le 30$, амплитуды этих двух волн могут совпадать? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Введем обозначения для значений параметров задачи: *k*=2, A_k=30. Кроме того, рассмотрим обозначения $u=2\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k}), v=k(t+\frac{2}{t})$. Уравнение представим в виде $f(u)=f(v)$, где функция $f(x)=x-\sin x$. Функция $f(x)=x-\sin x$ возрастает, следовательно уравнение $f(u)=f(v)$ означает $u=v$, откуда

$\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k})=k(t+\frac{2}{t})\ge\sqrt{2}k>0 \Leftrightarrow t-\frac{a}{k}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z, t=\sqrt{2}$. Следовательно, амплитуды волн могут совпадать лишь при значении $t=\sqrt{2}$, которое доставляет минимальное значение функции $f(t)=t+\frac{2}{t}$. Соответствующие значения параметра а находятся из равенства

$\frac{a}{k}=\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$. Наибольшее значение *a* соответствует

$$a=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n)\le 80 \Rightarrow n_{\max}=[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}] \Rightarrow$$.

$$a_{\max}=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}])$$

Ответ: 24.82

Вариант 2.
Зависимость амплитуды A от времени t для первой сейсмической волны подчиняется закону $A(t)=\sin(4t+\frac{8}{t})-\sin(8\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{4}))-\frac{8}{t}$, t>0, аналогичная зависимость для второй волны имеет вид $A(t)=4(t-2\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{4}))$, t>0. При каком наибольшем значении $a, a\le 50$, амплитуды этих двух волн могут совпадать? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Введем обозначения для значений параметров задачи: k=4, A_k=50. Кроме того, рассмотрим обозначения $u=2\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k}), v=k(t+\frac{2}{t})$. Уравнение представим в виде $f(u)=f(v)$, где функция $f(x)=x-\sin x$. Функция $f(x)=x-\sin x$ возрастает, следовательно уравнение $f(u)=f(v)$ означает $u=v$, откуда

$\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k})=k(t+\frac{2}{t})\ge\sqrt{2}k>0 \Leftrightarrow t-\frac{a}{k}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z, t=\sqrt{2}$. Следовательно, амплитуды волн могут совпадать лишь при значении $t=\sqrt{2}$, которое доставляет минимальное значение функции $f(t)=t+\frac{2}{t}$. Соответствующие значения параметра а находятся из равенства

$\frac{a}{k}=\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$. Наибольшее значение a соответствует

$$a=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n)\le 80 \Rightarrow n_{\max}=[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}] \Rightarrow .$$

$$a_{\max}=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}])$$

Ответ: 49.64

Вариант 3.
Зависимость амплитуды A от времени t для первой сейсмической волны подчиняется закону $A(t)=\sin(3t+\frac{6}{t})-\sin(6\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{3}))-\frac{6}{t}$, t>0, аналогичная зависимость для второй волны имеет вид $A(t)=3(t-2\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{3}))$, t>0. При каком наибольшем значении $a, a\le 40$, амплитуды этих двух волн могут совпадать? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Введем обозначения для значений параметров задачи: k=3, A_k=40. Кроме того, рассмотрим обозначения $u=2\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k}), v=k(t+\frac{2}{t})$. Уравнение представим в виде $f(u)=f(v)$, где функция $f(x)=x-\sin x$. Функция $f(x)=x-\sin x$ возрастает, следовательно уравнение $f(u)=f(v)$ означает $u=v$, откуда

$\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k})=k(t+\frac{2}{t})\ge\sqrt{2}k>0\Leftrightarrow t-\frac{a}{k}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z, t=\sqrt{2}$. Следовательно, амплитуды волн могут совпадать лишь при значении $t=\sqrt{2}$, которое доставляет минимальное значение функции $f(t)=t+\frac{2}{t}$. Соответствующие значения параметра а находятся из равенства

$\frac{a}{k}=\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$. Наибольшее значение a соответствует

$$a=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n)\le 80\Rightarrow n_{\max}=[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}]\Rightarrow$$

$$a_{\max}=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}])$$

Ответ: 37.23

Вариант 4.

Зависимость амплитуды A от времени t для первой сейсмической волны подчиняется закону $A(t)=\sin(5t+\frac{10}{t})-\sin(10\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{5}))-\frac{10}{t}$, t>0, аналогичная зависимость для второй волны имеет вид $A(t)=5(t-2\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{5}))$, t>0. При каком наибольшем значении $a, a\le 60$, амплитуды этих двух волн могут совпадать? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Введем обозначения для значений параметров задачи: k=5, A_k=60. Кроме того, рассмотрим обозначения $u=2\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k}), v=k(t+\frac{2}{t})$. Уравнение представим в виде $f(u)=f(v)$, где функция $f(x)=x-\sin x$. Функция $f(x)=x-\sin x$ возрастает, следовательно уравнение $f(u)=f(v)$ означает $u=v$, откуда

$\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k})=k(t+\frac{2}{t})\ge\sqrt{2}k>0 \Leftrightarrow t-\frac{a}{k}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z, t=\sqrt{2}$. Следовательно, амплитуды волн могут совпадать лишь при значении $t=\sqrt{2}$, которое доставляет минимальное значение функции $f(t)=t+\frac{2}{t}$. Соответствующие значения параметра а находятся из равенства

$\frac{a}{k}=\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$. Наибольшее значение a соответствует

$$a=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n)\le 80 \Rightarrow n_{\max}=[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}] \Rightarrow$$

$$a_{\max}=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}])$$

Ответ: 30.63

Вариант 5.
Зависимость амплитуды A от времени t для первой сейсмической волны подчиняется закону $A(t) = \sin(6t + \frac{12}{t}) - \sin(12\sqrt{2}\sin(t - \frac{a}{6})) - \frac{12}{t}$, t>0, аналогичная зависимость для второй волны имеет вид $A(t) = 6(t - 2\sqrt{2}\sin(t - \frac{a}{6}))$, t>0. При каком наибольшем значении $a, a \le 70$, амплитуды этих двух волн могут совпадать? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Введем обозначения для значений параметров задачи: k=6, A_k=70. Кроме того, рассмотрим обозначения $u = 2\sqrt{2}k\sin(t - \frac{a}{k}), v = k(t + \frac{2}{t})$. Уравнение представим в виде $f(u) = f(v)$, где функция $f(x) = x - \sin x$. Функция $f(x) = x - \sin x$ возрастает, следовательно уравнение $f(u) = f(v)$ означает $u = v$, откуда

$\sqrt{2}k\sin(t - \frac{a}{k}) = k(t + \frac{2}{t}) \ge \sqrt{2}k > 0 \Leftrightarrow t - \frac{a}{k} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, t = \sqrt{2}$. Следовательно, амплитуды волн могут совпадать лишь при значении $t = \sqrt{2}$, которое доставляет минимальное значение функции $f(t) = t + \frac{2}{t}$. Соответствующие значения параметра а находятся из равенства

$\frac{a}{k} = \sqrt{2} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$. Наибольшее значение a соответствует

$$a = k(\sqrt{2} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n) \le 80 \Rightarrow n_{\max} = [\frac{40}{\pi} + \frac{k}{4} - \frac{\sqrt{2}k}{2\pi}] \Rightarrow$$
.
$$a_{\max} = k(\sqrt{2} - \frac{\pi}{2} + 2\pi[\frac{40}{\pi} + \frac{k}{4} - \frac{\sqrt{2}k}{2\pi}])$$

Ответ: 36.76

Вариант 6.
Зависимость амплитуды A от времени t для первой сейсмической волны подчиняется закону $A(t)=\sin(12t+\frac{24}{t})-\sin(24\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{12}))-\frac{24}{t}$, t>0, аналогичная зависимость для второй волны имеет вид $A(t)=12(t-2\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{12}))$, t>0. При каком наибольшем значении $a, a\le 80$, амплитуды этих двух волн могут совпадать? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Введем обозначения для значений параметров задачи: k=12, A_k=80. Кроме того, рассмотрим обозначения $u=2\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k}), v=k(t+\frac{2}{t})$. Уравнение представим в виде $f(u)=f(v)$, где функция $f(x)=x-\sin x$. Функция $f(x)=x-\sin x$ возрастает, следовательно уравнение $f(u)=f(v)$ означает $u=v$, откуда

$\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k})=k(t+\frac{2}{t})\ge\sqrt{2}k>0 \Leftrightarrow t-\frac{a}{k}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z, t=\sqrt{2}$. Следовательно, амплитуды волн могут совпадать лишь при значении $t=\sqrt{2}$, которое доставляет минимальное значение функции $f(t)=t+\frac{2}{t}$. Соответствующие значения параметра а находятся из равенства

$\frac{a}{k}=\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$. Наибольшее значение a соответствует

$$a=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n)\le 80 \Rightarrow n_{\max}=[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}] \Rightarrow$$
.
$$a_{\max}=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}])$$

Ответ: 73.52

Вариант 7.

Зависимость амплитуды A от времени t для первой сейсмической волны подчиняется закону $A(t)=\sin(8t+\frac{16}{t})-\sin(16\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{8}))-\frac{16}{t}$, t>0, аналогичная зависимость для второй волны имеет вид $A(t)=8(t-2\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{8}))$, t>0. При каком наибольшем значении $a, a\le 90$, амплитуды этих двух волн могут совпадать? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Введем обозначения для значений параметров задачи: k=8, A_k=90. Кроме того, рассмотрим обозначения $u=2\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k}), v=k(t+\frac{2}{t})$. Уравнение представим в виде $f(u)=f(v)$, где функция $f(x)=x-\sin x$. Функция $f(x)=x-\sin x$ возрастает, следовательно уравнение $f(u)=f(v)$ означает $u=v$, откуда

$\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k})=k(t+\frac{2}{t})\ge\sqrt{2}k>0 \Leftrightarrow t-\frac{a}{k}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z, t=\sqrt{2}$. Следовательно, амплитуды волн могут совпадать лишь при значении $t=\sqrt{2}$, которое доставляет минимальное значение функции $f(t)=t+\frac{2}{t}$. Соответствующие значения параметра а находятся из равенства

$\frac{a}{k}=\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$. Наибольшее значение a соответствует

$$a=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n)\le 80 \Rightarrow n_{\max}=[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}] \Rightarrow$$
.
$$a_{\max}=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}])$$

Ответ: 49.01

Вариант 8.

Зависимость амплитуды A от времени t для первой сейсмической волны подчиняется закону $A(t) = \sin(9t + \frac{18}{t}) - \sin(18\sqrt{2}\sin(t - \frac{a}{9})) - \frac{18}{t}$, t>0, аналогичная зависимость для второй волны имеет вид $A(t) = 9(t - 2\sqrt{2}\sin(t - \frac{a}{9}))$, t>0. При каком наибольшем значении $a, a \le 100$, амплитуды этих двух волн могут совпадать? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Введем обозначения для значений параметров задачи: k=9, A_k=100. Кроме того, рассмотрим обозначения $u = 2\sqrt{2}k\sin(t - \frac{a}{k}), v = k(t + \frac{2}{t})$. Уравнение представим в виде $f(u) = f(v)$, где функция $f(x) = x - \sin x$. Функция $f(x) = x - \sin x$ возрастает, следовательно уравнение $f(u) = f(v)$ означает $u = v$, откуда

$\sqrt{2}k\sin(t - \frac{a}{k}) = k(t + \frac{2}{t}) \ge \sqrt{2}k > 0 \Leftrightarrow t - \frac{a}{k} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, t = \sqrt{2}$. Следовательно, амплитуды волн могут совпадать лишь при значении $t = \sqrt{2}$, которое доставляет минимальное значение функции $f(t) = t + \frac{2}{t}$. Соответствующие значения параметра а находятся из равенства

$\frac{a}{k} = \sqrt{2} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$. Наибольшее значение a соответствует

$$a = k(\sqrt{2} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n) \le 80 \Rightarrow n_{\max} = [\frac{40}{\pi} + \frac{k}{4} - \frac{\sqrt{2}k}{2\pi}] \Rightarrow$$

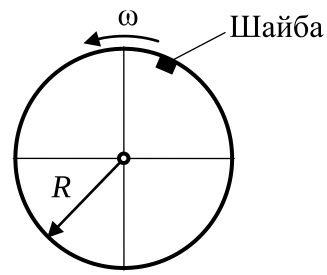
.

$$a_{\max} = k(\sqrt{2} - \frac{\pi}{2} + 2\pi[\frac{40}{\pi} + \frac{k}{4} - \frac{\sqrt{2}k}{2\pi}])$$

Ответ: 55.14

<u>Задание 2</u>

В лабораторных исследованиях и в промышленности, например горнорудной, для разделения неоднородных систем: жидких смесей, эмульсий, жидкостей с примесями и т.д. на компоненты используются центрифуги. Центрифуга представляет собой полый барабан, который может вращаться относительно своей оси с большой скоростью, в результате чего происходит расслоение содержимого барабана на компоненты.



В полом тонкостенном цилиндре радиусом R = 40 см, который может вращаться относительно горизонтальной оси (см. рисунок), находится небольшая шайба. При каких значениях угловой скорости ω вращения цилиндра шайба может двигаться вместе с цилиндром, не смещаясь относительно его поверхности? Коэффициент трения шайбы о поверхность цилиндра $\mu = 0{,}1$. Ускорение свободного падения считать $g = 10$ м/с^2. Ответ в с$^{-1}$ округлите до целых.

<u>Входные параметры:</u>
R от 10 до 40 см;
μ от 0,1 до 0,4;
Значение *g* менять НЕЛЬЗЯ !

Решение: Формула для расчетов: $\omega \geq \sqrt{\dfrac{g}{R}} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{\mu^2}\right)^{1/4}$

<u>Задание 3</u>

Вариант 1.

На прямой дороге последовательно расположены буровые станции A,D и C. Буферные склады расположены в пунктах B и F, при этом пункт F находится на прямом отрезке AB, прямой путь из B в D перпендикулярен AC, прямой путь из F в C пересекается с путем BD в точке O, при этом OD=0.62BD, AF=0.8AB, угол BAC равен 35 градусов. Чему равно отношение длин $\dfrac{CF}{BD}$? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Для заданных значений коэффициентов p,k, 0<p<k<1, имеем OD=pBD, AF=kAB. В треугольнике ABC из точки F опустим перпендикуляр FP на AC, прямоугольный треугольник AFP таким образом подобен треугольнику ABD, FP=kBD, из подобия треугольников COD и CFP следует: $CO = \dfrac{p}{k}CF \Rightarrow CD = \sqrt{(\dfrac{p}{k} \cdot CF)^2 - (p \cdot BD)^2}$. Далее по теореме Пифагора

$$CP = \sqrt{CF^2 - (k \cdot BD)^2} \Rightarrow DP = \sqrt{CF^2 - (k \cdot BD)^2} - \frac{p}{k}\sqrt{CF^2 - (k \cdot BD)^2} =$$
$$= (1 - \frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - (k \cdot BD)^2}$$

Из подобия треугольников AFP и ABD :

$$\frac{AP}{DP} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow AP = \frac{k}{1-k} \cdot (1 - \frac{p}{k}) \cdot \sqrt{CF^2 - k^2BD^2} ,$$

Из треугольника AFP выражаем

$$tgBAC = \frac{kBD}{\frac{k}{1-k}(1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - k^2 BD^2}} = \frac{1-k}{1-\frac{p}{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\frac{CF}{BD})^2 - k^2}}.$$

Из полученного равенства выражаем

$$\frac{CF}{BD} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\right)^2 \cdot \frac{1}{tg^2 BAC}},$$

$$0 < p < k < 1$$

Ответ: 1.50

Вариант 2.

На прямой дороге последовательно расположены буровые станции A,D и C. Буферные склады расположены в пунктах B и F, при этом пункт F находится на прямом отрезке AB, прямой путь из B в D перпендикулярен AC, прямой путь из F в C пересекается с путем BD в точке O, при этом OD=0.5BD, AF=0.75AB, угол BAC равен 42 градусам. Чему равно отношение длин $\frac{CF}{BD}$? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Для заданных значений коэффициентов p,k, 0<p<k<1, имеем OD=pBD, AF=kAB. В треугольнике ABC из точки F опустим перпендикуляр FP на AC, прямоугольный треугольник AFP таким образом подобен треугольнику ABD, FP=kBD, из подобия треугольников COD и CFP следует: $CO = \frac{p}{k}CF \Rightarrow CD = \sqrt{(\frac{p}{k}\cdot CF)^2 - (p\cdot BD)^2}$. Далее по теореме Пифагора

$$CP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} \Rightarrow DP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} - \frac{p}{k}\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} =$$

$$= (1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2}$$

Из подобия треугольников AFP и ABD :

$$\frac{AP}{DP} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow AP = \frac{k}{1-k}\cdot(1-\frac{p}{k})\cdot\sqrt{CF^2 - k^2BD^2}\ ,$$

Из треугольника AFP выражаем

$$tgBAC = \frac{kBD}{\frac{k}{1-k}(1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - k^2BD^2}} = \frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\frac{CF}{BD})^2 - k^2}}.$$

Из полученного равенства выражаем

$$\frac{CF}{BD} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\right)^2 \cdot \frac{1}{tg^2BAC}},$$

$$0 < p < k < 1$$

Ответ: 1.12

Вариант 3.

На прямой дороге последовательно расположены буровые станции A,D и C. Буферные склады расположены в пунктах B и F, при этом пункт F находится на прямом отрезке AB, прямой путь из B в D перпендикулярен AC, прямой путь из F в C пересекается с путем BD в точке O, при этом OD=0.5BD, AF=0.75AB, угол BAC равен 45 градусам. Чему равно отношение длин $\frac{CF}{BD}$? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Для заданных значений коэффициентов p,k, 0<p<k<1, имеем OD=pBD, AF=kAB. В треугольнике ABC из точки F опустим перпендикуляр FP на AC, прямоугольный треугольник AFP таким образом подобен треугольнику ABD, FP=kBD, из подобия треугольников COD и CFP следует: $CO = \frac{p}{k}CF \Rightarrow CD = \sqrt{(\frac{p}{k}\cdot CF)^2 - (p\cdot BD)^2}$. Далее по теореме Пифагора

$$CP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} \Rightarrow DP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} - \frac{p}{k}\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} =$$

$$= (1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2}$$

Из подобия треугольников AFP и ABD :

$$\frac{AP}{DP} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow AP = \frac{k}{1-k}\cdot(1-\frac{p}{k})\cdot\sqrt{CF^2 - k^2BD^2},$$

Из треугольника AFP выражаем

$$tgBAC = \frac{kBD}{\frac{k}{1-k}(1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - k^2BD^2}} = \frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\frac{CF}{BD})^2 - k^2}}.$$

Из полученного равенства выражаем

$$\frac{CF}{BD} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\right)^2\cdot\frac{1}{tg^2BAC}},$$

$$0 < p < k < 1$$

Ответ: 1.06

Вариант 4.

На прямой дороге последовательно расположены буровые станции A,D и C. Буферные склады расположены в пунктах B и F, при этом пункт F находится на прямом отрезке AB, прямой путь из B в D перпендикулярен AC, прямой путь из F в C пересекается с путем BD в точке O, при этом OD=0.52BD, AF=0.7AB, угол BAC равен 54 градусам. Чему равно отношение длин $\frac{CF}{BD}$? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Для заданных значений коэффициентов p,k, 0<p<k<1, имеем OD=pBD, AF=kAB. В треугольнике ABC из точки F опустим перпендикуляр FP на AC, прямоугольный треугольник AFP таким образом подобен треугольнику ABD, FP=kBD, из подобия треугольников COD и CFP следует: $CO=\frac{p}{k}CF \Rightarrow CD=\sqrt{(\frac{p}{k}\cdot CF)^2-(p\cdot BD)^2}$. Далее по теореме Пифагора

$$CP=\sqrt{CF^2-(k\cdot BD)^2} \Rightarrow DP=\sqrt{CF^2-(k\cdot BD)^2}-\frac{p}{k}\sqrt{CF^2-(k\cdot BD)^2}=$$

$$=(1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2-(k\cdot BD)^2}$$

Из подобия треугольников AFP и ABD :

$$\frac{AP}{DP}=\frac{k}{1-k} \Rightarrow AP=\frac{k}{1-k}\cdot(1-\frac{p}{k})\cdot\sqrt{CF^2-k^2BD^2},$$

Из треугольника AFP выражаем

$$tgBAC=\frac{kBD}{\frac{k}{1-k}(1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2-k^2BD^2}}=\frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\frac{CF}{BD})^2-k^2}}.$$

Из полученного равенства выражаем

$$\frac{CF}{BD}=\sqrt{k^2+\left(\frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\right)^2\cdot\frac{1}{tg^2BAC}},$$

$$0<p<k<1$$

Ответ: 1.10

Вариант 5.

На прямой дороге последовательно расположены буровые станции A,D и C. Буферные склады расположены в пунктах B и F, при этом пункт F находится на прямом отрезке AB, прямой путь из B в D перпендикулярен AC, прямой путь из F в C пересекается с путем BD в точке O, при этом OD=0.5BD, AF=0.68AB, угол BAC равен 50 градусам.

Чему равно отношение длин $\frac{CF}{BD}$? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Для заданных значений коэффициентов p,k, 0<p<k<1, имеем OD=pBD, AF=kAB. В треугольнике ABC из точки F опустим перпендикуляр FP на AC, прямоугольный треугольник AFP таким образом подобен треугольнику ABD, FP=kBD, из подобия треугольников COD и CFP следует: $CO = \frac{p}{k}CF \Rightarrow CD = \sqrt{(\frac{p}{k}\cdot CF)^2 - (p\cdot BD)^2}$. Далее по теореме Пифагора

$$CP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} \Rightarrow DP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} - \frac{p}{k}\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} =$$

$$= (1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2}$$

Из подобия треугольников AFP и ABD :

$$\frac{AP}{DP} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow AP = \frac{k}{1-k}\cdot(1-\frac{p}{k})\cdot\sqrt{CF^2 - k^2BD^2},$$

Из треугольника AFP выражаем

$$tgBAC = \frac{kBD}{\frac{k}{1-k}(1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - k^2BD^2}} = \frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\frac{CF}{BD})^2 - k^2}}.$$

Из полученного равенства выражаем

$$\frac{CF}{BD} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\right)^2 \cdot \frac{1}{tg^2BAC}},$$

$$0 < p < k < 1$$

Ответ: 1.22

Вариант 6.

На прямой дороге последовательно расположены буровые станции A,D и C. Буферные склады расположены в пунктах B и F, при этом пункт F находится на прямом отрезке AB, прямой путь из B в D перпендикулярен AC, прямой путь из F в C пересекается с путем BD в точке O, при этом OD=0.18BD, AF=0.34AB, угол BAC равен 55 градусам. Чему равно отношение длин $\frac{CF}{BD}$? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Для заданных значений коэффициентов p,k, 0<p<k<1, имеем OD=pBD, AF=kAB. В треугольнике ABC из точки F опустим перпендикуляр FP на AC, прямоугольный треугольник AFP таким образом подобен треугольнику ABD, FP=kBD, из подобия треугольников COD и CFP следует: $CO = \frac{p}{k}CF \Rightarrow CD = \sqrt{(\frac{p}{k} \cdot CF)^2 - (p \cdot BD)^2}$. Далее по теореме Пифагора

$$CP = \sqrt{CF^2 - (k \cdot BD)^2} \Rightarrow DP = \sqrt{CF^2 - (k \cdot BD)^2} - \frac{p}{k}\sqrt{CF^2 - (k \cdot BD)^2} =$$

$$= (1 - \frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - (k \cdot BD)^2}$$

Из подобия треугольников AFP и ABD :

$$\frac{AP}{DP} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow AP = \frac{k}{1-k} \cdot (1 - \frac{p}{k}) \cdot \sqrt{CF^2 - k^2 BD^2} \ ,$$

Из треугольника AFP выражаем

$$tgBAC = \frac{kBD}{\frac{k}{1-k}(1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - k^2BD^2}} = \frac{1-k}{1-\frac{p}{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\frac{CF}{BD})^2 - k^2}} .$$

Из полученного равенства выражаем

$$\frac{CF}{BD} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\right)^2 \cdot \frac{1}{tg^2 BAC}},$$

$$0 < p < k < 1$$

Ответ: 1.04

Вариант 7.

На прямой дороге последовательно расположены буровые станции A,D и C. Буферные склады расположены в пунктах B и F, при этом пункт F находится на прямом отрезке AB, прямой путь из B в D перпендикулярен AC, прямой путь из F в C пересекается с путем BD в точке O, при этом OD=0.24BD, AF=0.34AB, угол BAC равен 65 градусам. Чему равно отношение длин $\frac{CF}{BD}$? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Для заданных значений коэффициентов p,k, 0<p<k<1, имеем OD=pBD, AF=kAB. В треугольнике ABC из точки F опустим перпендикуляр FP на AC, прямоугольный треугольник AFP таким образом подобен треугольнику ABD, FP=kBD, из подобия треугольников COD и CFP следует: $CO=\frac{p}{k}CF \Rightarrow CD=\sqrt{(\frac{p}{k}\cdot CF)^2-(p\cdot BD)^2}$. Далее по теореме Пифагора

$$CP=\sqrt{CF^2-(k\cdot BD)^2} \Rightarrow DP=\sqrt{CF^2-(k\cdot BD)^2}-\frac{p}{k}\sqrt{CF^2-(k\cdot BD)^2}=$$

$$=(1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2-(k\cdot BD)^2}$$

Из подобия треугольников AFP и ABD :

$$\frac{AP}{DP}=\frac{k}{1-k} \Rightarrow AP=\frac{k}{1-k}\cdot(1-\frac{p}{k})\cdot\sqrt{CF^2-k^2BD^2},$$

Из треугольника AFP выражаем

$$tgBAC=\frac{kBD}{\frac{k}{1-k}(1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2-k^2BD^2}}=\frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\frac{CF}{BD})^2-k^2}}.$$

Из полученного равенства выражаем

$$\frac{CF}{BD}=\sqrt{k^2+\left(\frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\right)^2\cdot\frac{1}{tg^2BAC}},$$

$$0<p<k<1$$

Ответ: 1.10

Вариант 8.

На прямой дороге последовательно расположены буровые станции A,D и C. Буферные склады расположены в пунктах B и F, при этом пункт F находится на прямом отрезке AB, прямой путь из B в D перпендикулярен AC, прямой путь из F в C пересекается с путем BD в точке O, при этом OD=0.36BD, AF=0.4AB, угол BAC равен 70 градусам. Чему равно отношение длин $\frac{CF}{BD}$? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Для заданных значений коэффициентов p,k, 0<p<k<1, имеем OD=pBD, AF=kAB. В треугольнике ABC из точки F опустим перпендикуляр FP на AC, прямоугольный треугольник AFP таким образом подобен треугольнику ABD, FP=kBD, из подобия треугольников COD и CFP следует: $CO = \frac{p}{k}CF \Rightarrow CD = \sqrt{(\frac{p}{k}\cdot CF)^2 - (p\cdot BD)^2}$. Далее по теореме Пифагора

$$CP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} \Rightarrow DP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} - \frac{p}{k}\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} =$$

$$= (1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2}$$

Из подобия треугольников AFP и ABD :

$$\frac{AP}{DP} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow AP = \frac{k}{1-k}\cdot(1-\frac{p}{k})\cdot\sqrt{CF^2 - k^2BD^2},$$

Из треугольника AFP выражаем

$$tgBAC = \frac{kBD}{\frac{k}{1-k}(1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - k^2BD^2}} = \frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\frac{CF}{BD})^2 - k^2}}.$$

Из полученного равенства выражаем

$$\frac{CF}{BD} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\right)^2\cdot\frac{1}{tg^2BAC}},$$

$$0 < p < k < 1$$

Ответ: 2.22

Задание 4

Электрическая лампочка накаливания в осветителях, используемых горняками на рудниках, с нитью накала из вольфрама, рассчитана на напряжение U_0 = 4,0 В и мощность P_0 = 3,75 Вт при этом напряжении. Имеется источник напряжения с ЭДС E = 6,0 В. Для того чтобы лампочка осветителя не перегорела при подключении к этому источнику, последовательно с этой лампочкой подключили ещё одну такую же. На какую величину ΔT температура нити накала в лампочках будет ниже расчётной, если известно, что суммарная мощность, выделяемая в цепи при таком подключении двух лампочек, P_1 = 4,80 Вт? При понижении температуры спирали на 1 К от расчётной сопротивление вольфрамовой спирали понижается на 0,058%, т.е. температурный коэффициент сопротивления вольфрамовой нити в рабочем режиме $\alpha = 0{,}00058$ К$^{-1}$. Внутренним сопротивлением источника напряжения пренебречь. Ответ в К округлите до десятков (например: 60 К, 360 К, 1520 К).

Входные параметры:

Величина α от 0,00046 К$^{-1}$ до 0,00058 К$^{-1}$; меняется ВМЕСТЕ с %, как в условии:

0,058% и α = 0,00058 К$^{-1}$.

E и P_1 меняются ТОЛЬКО ПАРОЙ:

E = 7,2 В, P_1 = 6,37 Вт,
E = 6,8 В, P_1 = 5,83 Вт,
E = 6,4 В, P_1 = 5,31 Вт,
E = 6,0 В, P_1 = 4,80 Вт,
E = 5,6 В, P_1 = 4,31 Вт,
E = 5,2 В, P_1 = 3,85 Вт,
E = 4,8 В, P_1 = 3,40 Вт,
E = 4,4 В, P_1 = 2,97 Вт.

Значения *E* задаются в диапазоне от 4,4 В до 7,2 В. Иначе будет бессмыслица в условии или в ответах.

Значения *E* и P_0 менять НЕЛЬЗЯ.

Решение: Формула для расчетов: $\Delta T = \dfrac{1}{\alpha}\left(1 - \dfrac{E^2 P_0}{2 P_1 U_0^2}\right)$

Тестовые задания для разминки 2-го тура (10-11 классы):

Вид высококалорийного угля, ценное энергетическое топливо
Графит
Антрацит
Россыпь

Форма рельефа, образованная временным водотоком, прекратившая свое развитие
Балка
Долина
Низина

Часть земной поверхности, с которой сток воды поступает в речную систему
Терраса
Исток
Бассейн

Поднятие одного блока земной коры относительно другого
Взброс
Уступ
Сброс

Понижение на земной поверхности
Пустыня
Впадина
Болото

Стремительное схождение снеговых масс по горным склонам
Сель
Цунами
Лавина

Кратковременный подъем уровня воды в реке, вызванный поступление в реку обильных осадков
Паводок
Прилив
Наводнение

Относительно устойчивые участки литосферных плит
Горы
Прогиб
Платформа

Бурный грязекаменный поток

Сель
Цунами
Лавина

Выходы фундамента, сложенного кристаллическими породами, на поверхность
Бассейн
Чехол
Щит

Группа островов, лежащих на небольшом расстоянии друг от друга, с однородным геологическим происхождением и близких по строению
Агломерация
Скопление
Архипелаг

Место в горном хребте, пониженное и наиболее удобное для перехода с одной его стороны на другую
Ущелье
Перевал
Ледник

Полость в поверхностных толщах земной коры различной формы и размеров, сообщающаяся с поверхностью
Пещера
Балка
Грот

Слабонаклоненная к морю полоса суши, сложенная песком, гравием, галькой, валунами, ракушечником, отлагающимися под действием прибоя
Терраса
Пляж
Коса

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2016-2016 учебный год

ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 5-9 КЛАССОВ

Задание 1

На золоторудном предприятии резервуар для промывки песка имеет форму прямоугольного параллелепипеда высотой 0.5 м, стороны основания AB=1.5 м, AD=1.1 м. Резервуар наклонен на угол 11 градусов к плоскости Земли относительно нижнего горизонтального ребра AB как оси вращения. В резервуар налит максимально возможный объем воды. Сколько процентов воды выльется при медленном увеличении угла наклона до 26 градусов? Ответ дайте с точностью до 0.1 процента.

Решение.

Обозначим высоту емкости через h, ось вращения AB через b, сторону AD через a. Начальный угол наклона α, окончательный β. Тогда объем воды до поднятия равен $abh - \frac{1}{6}a^2b \cdot tg\alpha = V_1$, а после $\frac{1}{6}h^2b \cdot ctg\beta = V_2$. Искомое значение равно $\frac{V_1 - V_2}{V_1} \cdot 100\%$. Подставляя значения задачи, получаем

Ответ: 83.0%

Задание 2

В озеро, расположенное в кратере вулкана, через разлом на дне начинает поступать раскаленная жидкая лава. Озеро занимает площадь S = 5000 м^2, его средняя глубина h = 2 м, первоначальная температура воды в озере t_1 = 30 °C. Оценить минимальный объем лавы, который потребуется, чтобы озеро выкипело целиком (ответ дайте с точностью до сотен м^3).

Для оценки примем, что температура поступающей лавы t_2 = 1200 °C, температура затвердевания лавы t_3 = 1100 °C, ее удельная теплоемкость как в жидком, так и в твердом состоянии c_1 = 840 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления лавы λ = 350 кДж/кг, плотность жидкой лавы ρ_1 = 2700 кг/м^3.

Удельная теплоемкость воды c_2=4,2 кДж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды r=2300 кДж/кг, температура ее кипения при нормальном давлении t_4=100 °C, плотность воды ρ_2=1000 кг/м^3.

Решение.

Если считать, что кипение воды идет при t_4 = 100 °С, то решение задачи сводится к уравнению теплового баланса:

$Q_1 = Q_2$, где

$Q_1 = \rho_1 V\left[c_1(t_2 - t_3) + \lambda + c_1(t_3 - t_4)\right]$ – отданное лавой количество теплоты, $Q_2 = \rho_2 Sh\left[c_2(t_4 - t_1) + r\right]$ – полученное водой количество теплоты.

Искомый объем лавы равен

$$V = \frac{\rho_2 Sh\left[c_2(t_4 - t_1) + r\right]}{\rho_1\left[c_1(t_2 - t_4) + \lambda\right]} \approx 7500 \text{ м}^3.$$

Ответ: 7500 м^3.

Задание 3

Экологи проводят наблюдения за уровнем акрилонитрила в водоеме, куда ежедневно указанное вещество сбрасывается в конце каждого рабочего дня вместе с производственными отходами. В первый день наблюдений, т.е. в конце первого рабочего дня непосредственно перед сбросом отходов, концентрация этого вещества была равна 1 мг/л, каждый сброс повышает концентрацию акрилонитрила на 0.2 мг/л. Через сутки после каждого сброса непосредственно перед следующим сбросом концентрация данного вещества уменьшается на 25% за счет естественных причин. Найдите уровень концентрации акрилонитрила после 11 – ого сброса. Ответ дайте с точностью до 4 –го знака.

Решение.

После первого сброса уровень концентрации равен 1+0.2=1.2 мг/л, после второго сброса она станет равной 1.2·0.75+0.2=1.1 мг/л, после третьего – (1.2·0.75+0.2)·0.75+0.2=0.2·(1+0.75)+1.2·0.75·0.75. После n –го сброса уровень концентрации станет равным $\frac{0.2}{0.25}\cdot(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}) + 1.2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$. При n=11 последнее значение равно $0.8 + 0.4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ =0.8225.

Ответ: 0.8225.

Задание 4

Самолёт с геофизической лабораторией на борту взлетает с аэродрома на Шпицбергене (приблизительно 78° северной широты; 16° восточной долготы), берёт курс строго на север (азимут 0°) и летит, не меняя направления, 2,5 часа. Затем самолёт ложится на курс азимут 270° (строго на запад) и летит этим курсом ещё 2,5 часа. На каком расстоянии от аэродрома вылета окажется самолёт в конце этого маршрута, если средняя скорость самолёта равна 780 км/ч? Ответ в километрах округлите до сотен (например: 0 км, 200 км, 1800 км). Считать, что Земля имеет форму шара с длиной экватора L = 40000 км.

Решение.

Первые 2,5 часа самолёт летит вдоль меридиана. Изменение широты на 1° означает перемещение по меридиану на $\frac{L}{360} = \frac{40000}{360} \approx 111$ км. Поэтому при скорости 780 км/ч самолёт за час проходит по меридиану $\frac{780}{111} \approx 7°$. Значит, за 2,5 часа он пройдет по меридиану $7° \cdot 2{,}5 = 17{,}5°$. От Шпицбергена до Северного полюса $90° - 78° = 12°$. Значит, самолёт пройдёт над Северным полюсом и в конце своего движения вдоль меридиана окажется в точке с широтой $90° - (17{,}5° - 12°) = 84{,}5°$ в западном полушарии. После этого, повернув на запад и выдерживая этот курс, самолёт 2,5 часа движется по параллели с широтой $84{,}5°$, то есть по окружности, перпендикулярной оси суточного вращения Земли. Радиус этой окружности $r = R\cos 84{,}5° = R\sin 5{,}5° \approx L \cdot \frac{5{,}5°}{360°} \approx 610$ км. За 2,5 часа самолёт пролетит по этой окружности дугу длиной $780 \cdot 2{,}5 = 1950$ км. Это всего на 35 км больше, чем длина полуокружности радиусом *r*: $610 \cdot \pi \approx 1915$ км. Таким образом, самолёт за 5 часов полёта приходит в точку вблизи исходного меридиана на удалении 5,5° от Северного полюса и $12° - 5{,}5° = 6{,}5°$ от аэродрома вылета. Поэтому расстояние от этой точки до аэродрома вылета $x = \sqrt{(111 \cdot 6{,}5)^2 + 35^2} \approx 720$ км (мы посчитали Землю в пределах этих расстояний плоской). Отметим: тот же результат получится, если 35 км забыть на фоне $111 \cdot 6{,}5$ км.

Ответ: 700 км.

Тестовые вопросы для 5-9 классов

Какая горная порода относится к классу магматических горных пород?

гранит

песчаник

известняк

Какая горная порода относится к классу осадочных горных пород?

базальт

известняк

мрамор

Какая горная порода относится к классу метаморфических горных пород?

гранит

песчаник

мрамор

Из какой горной породы образуется мрамор?

известняк
песчаник
гранит

Из какой горной породы образуется кварцит?
глина
песчаник
гранит

Из какой горной породы образуется аргиллит?
глина
известняк
гранит

Из какой горной породы образуется гнейс?
известняк
песчаник
гранит

Какая горная порода относится к хемогенным осадочным горным породам?
гранит
песчаник
каменная соль

Какая горная порода относится к органогенным осадочным горным породам?
гранит
известняк
песчаник

Какая горная порода относится к терригенным осадочным горным породам?
известняк
песчаник
каменная соль

Какая горная порода образовалась при застывании магмы в недрах Земной коры?
базальт
гранит
известняк

Какая горная порода образовалась при застывании лавы на поверхности Земли?
базальт
гранит
песчаник

Какой минерал входит в состав гранита?
кварц

пирит
галит

Какого цвета базальт?
желтый
темно-серый
красно-коричневый

Что является горной породой?
пирит
гранит
полевой шпат

Что является минералом?
гранит
базальт
пирит

Какой минерал наши предки вставляли в окна вместо стекла?
мусковит
каолинит
серпентинит

Какой минерал можно употреблять в пищу?
мусковит
каолинит
галит

Из какого минерала древние люди делали наконечники для копий и стрел?
пирит
мусковит
обсидиан

Как называется процесс разрушения горной породы на поверхности Земли?
выветривание
магматизм
метаморфизм

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2016-2017 учебный год

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

2017 г.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ

Заключительный этап (10-11 классы)

Вариант 1 - Решения

Задание 1. (15 баллов)

Процесс изменения рельефа Русской равнины в четвертичный период имеет неравномерный характер. В частности, уровень поверхности поднимался с различной интенсивностью в Воронежской области, Заволжье, на Кольском полуострове.

Для простоты предполагается, что поверхность Земли в указанных трех регионах поднималась равномерно, при этом на Кольском полуострове этот процесс начался ранее, чем в Воронежской области, на 1 млн. лет, а в Заволжье процесс начался ранее, чем в Воронежской области, но позднее, чем на Кольском полуострове. Через некоторое время после начала подъема региона Воронежской области был момент, когда прирост высоты уровней поверхности Земли в трех регионах был одинаковым, после этого момента уровни поднялись везде еще на 100 м, и сразу после этого рельеф стабилизировался, во всех регионах в разное время. Известно, что процесс повышения уровня поверхности Земли закончился в Воронежской области на 600 тыс. лет ранее, чем на Кольском полуострове, и на 200 тыс. лет ранее, чем в Заволжье. На сколько млн. лет процесс поднятия поверхности Земли на Кольском полуострове начался ранее, чем в Заволжье?

Решение. Скорости поднятия уровня поверхности на Кольском полуострове, в Заволжье и в Воронежской области обозначим соответственно через $v_1, v_2, v_3; v_1 < v_2 < v_3$. Далее, введем следующие обозначения. Пусть в Заволжье процесс начался на x млн лет позднее, чем на Кольском полуострове, при этом сначала уровни во всех регионах преодолели a м высоты, после этого 100 м. Выпишем соответствующие уравнения:

$$\frac{a}{v_1} - \frac{a}{v_3} = 1; \frac{100}{v_1} - \frac{100}{v_3} = 0.6; \frac{100}{v_2} - \frac{100}{v_3} = 0.2$$

Для ответа нужна величина $x = \frac{a}{v_1} - \frac{a}{v_2}$. Из условий задачи следует

$$a = \frac{1}{\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_3}}; 100 = \frac{0.6}{\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_3}} \Rightarrow a = \frac{500}{3};$$

$$\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_3} = \frac{0.6}{100}; \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_3} = \frac{0.2}{100} \Rightarrow \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} = \frac{0.4}{100}$$

Отсюда вытекает, что $x = a \cdot \frac{0.4}{100} = \frac{500}{3} \cdot \frac{0.4}{100} = \frac{2}{3}$.

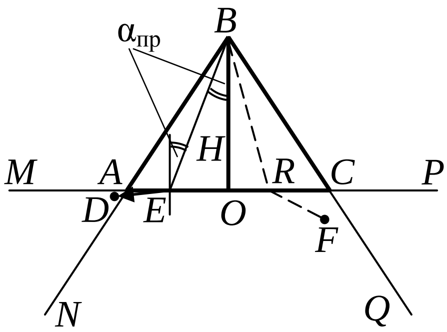
Ответ: На 2/3 млн. лет

Задание 2. (20 баллов)

Кусочек янтаря имеет форму прямого кругового конуса высотой H = 15 мм и радиусом основания R. По оси конуса пропущена тонкая нить. При каких значениях R любая точка нити будет видна из любой точки A, находящейся вне конуса, причем через **каждую** из видимых из точки A частей его поверхности – как поверхность основания, так и боковую поверхность конуса? Показатель преломления янтаря n = 1,52. Отражением лучей на поверхности янтаря пренебречь.

Решение.

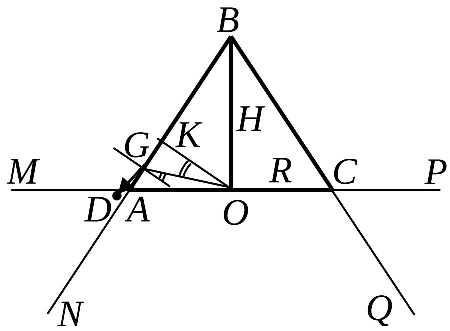
Основание конуса видно из любой точки, находящейся ниже плоскости основания. Боковая поверхность конуса видна из любой точки вне конической поверхности NBQ, образованной поверхностью конуса и ее продолжением вниз. Таким образом, существуют области MAN и PCQ, из которых видно как основание конуса, так и его боковую поверхность.



Выберем в области MAN произвольную точку D вблизи точки A. В эту точку лучи от произвольной точки нити придут после преломления на основании конуса практически параллельно плоскости основания. Значит, угол преломления такого луча равен 90º, а угол его падения на основание конуса равен $\alpha_{пр}$ – предельному углу полного внутреннего отражения. На рисунке видно, что такой луч упадет на основание конуса в точке E на самом большом расстоянии от центра основания O, если этот луч исходит из точки B. Очевидно, что должно выполняться неравенство:

$OE \leq R$, то есть $H\,\mathrm{tg}\,\alpha_{пр} \leq R$.

Что касается произвольной точки F, лежащей ниже основания конуса, то до нее лучи от точки B, как и от всякой другой точки нити, при выполнении только что полученного условия дойдут, что видно из рисунка (угол падения такого луча на основание конуса меньше $\alpha_{пр}$).



Лучи, исходящие от нити и прошедшие через боковую поверхность конуса, придут в точку D практически параллельно образующей AB конической поверхности. Поэтому угол их падения на коническую поверхность равен $\alpha_{пр}$. Это ограничение сильнее всего сказывается на лучах, идущих от точки O. Пусть $OK \perp AB$, $\angle KOG = \alpha_{пр}$. Тогда, чтобы точка O была видна из точки D, должно выполняться неравенство $\angle KOA \geq \alpha_{пр}$. Поскольку $\angle KOA = \angle OBC$, то в первой четверти тригонометрического круга введенное требование равносильно неравенству

$$\mathrm{tg}\,\angle KOA = \mathrm{tg}\,\angle OBC = \frac{R}{H} \geq \mathrm{tg}\,\alpha_{пр}.$$

Что касается произвольной точки, лежащей левее прямой BN, то до нее при выполнении только что полученного условия лучи дойдут от любой точки нити, так как угол падения такого луча на боковую поверхность конуса меньше $\alpha_{пр}$.

Таким образом, нить видна целиком через основание и боковую поверхность конуса при выполнении одного и того же условия:

$$\frac{R}{H} \geq \operatorname{tg} \alpha_{\text{пр}}.$$

Отсюда получаем:

$$R \geq H \operatorname{tg} \alpha_{\text{пр}}.$$

Из условия $n \sin \alpha_{\text{пр}} = \sin 90°$ следует, что для предельного угла полного внутреннего отражения

$$\sin \alpha_{\text{пр}} = \frac{1}{n}, \quad \cos \alpha_{\text{пр}} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{\text{пр}}} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - 1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{\text{пр}} = \frac{\sin \alpha_{\text{пр}}}{\cos \alpha_{\text{пр}}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Таким образом, $R \geq \frac{H}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{15}{\sqrt{1{,}52^2 - 1}} \approx 13\,\text{мм}$.

Ответ: $R \geq \frac{H}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 13\,\text{мм}$

Задание 3. (20 баллов)

Осадочная порода содержит кремний и фосфат, объемы которых, x и y соответственно, связаны условиями $3x + y \leq 10, \log_y(xy) \geq \log_x(\frac{1}{\sqrt[4]{y}})$. Какие значения может принимать величина объема фосфата?

Решение.

Второе неравенство запишем в виде $1 + \log_y x \geq -\frac{1}{4}\log_x y, x > 0, y > 0$. Последнее неравенство эквивалентно $\frac{(2\log_y x + 1)^2}{\log_y x} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_y x = -\frac{1}{2} \\ \log_y x > 0 \end{array}\right.$.

В первом случае $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$, подставив это в первое неравенство условия, получим

$$\frac{3}{\sqrt{y}} + y \leq 10 \Leftrightarrow 3 + y \cdot \sqrt{y} \leq 10 \cdot \sqrt{y} \Leftrightarrow (\sqrt{y} - 3)(y + 3\sqrt{y} - 1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y \in [\frac{11 - 3\sqrt{13}}{2}, 9]$$

Во втором случае, т.е. $\log_y x > 0$, получаем $\left[\begin{array}{l} x, y \in (0,1) \\ x, y > 1 \end{array}\right.$, далее учет неравенства $3x + y \leq 10$ дает $y \in (0,1) \cup (1,7)$. Объединяя два случая, получаем

Ответ: $y \in (0,1) \cup (1,9]$

Задание 4. (15 баллов)

При тектоническом сдвиге пород произошло нарушение геологической изоляции между двумя пластами осадочных пород, в которых находился природный газ при давлениях соответственно p_1= 15 МПа и p_2= 20 МПа, в результате чего давление газа в пластах стало одинаковым и равным p. Найти значение p, если отношение количеств вещества природного газа, находящегося в каждом из пластов **после** тектонического сдвига, $k = \nu_1/\nu_2 = 1{,}5$. Считать температуры осадочных пород в пластах различными и не меняющимися при тектоническом сдвиге.

Решение. Пусть температуры пластов осадочных пород составляют T_1 и T_2, а объемы, занимаемые природным газом в этих пластах, равны V_1 и V_2.Количества вещества природного газа, содержащегося в пластах **после** тектонического сдвига, равны соответственно ν_1 и ν_2 ,а **до** тектонического сдвига равны соответственно ν_1' и ν_2'. Используя для природного газа уравнение Клапейрона – Менделеева $pV = \nu RT$, получим для количества вещества выражение: $\nu = \dfrac{pV}{RT}$. Тогда согласно условию задачи

$$\nu_1 = \frac{pV_1}{RT_1},$$

$$\nu_2 = \frac{pV_2}{RT_2},$$

$$\nu_1' = \frac{p_1V_1}{RT_1},$$

$$\nu_2' = \frac{p_2V_2}{RT_2}.$$

Отношение количеств вещества газа в пластах **после** сдвига $k = \dfrac{\nu_1}{\nu_2}$ принимает вид:

$$k = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \left(\frac{V_1}{T_1}\right) \Big/ \left(\frac{V_2}{T_2}\right).$$

По условию задачи $k = 1{,}5$.

Теперь учтем, что при тектоническом сдвиге общее количество вещества природного газа в пластах сохраняется, т.е.

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu_1' + \nu_2'.$$

Подставляя в это равенство выражения для ν_1, ν_2, ν_1' и ν_2', получим после упрощения

$$\frac{pV_1}{T_1} + \frac{pV_2}{T_2} = \frac{p_1V_1}{T_1} + \frac{p_2V_2}{T_2},$$

откуда

$$(p - p_1)\frac{V_1}{T_1} = (p_2 - p)\frac{V_2}{T_2}.$$

Таким образом,

$$k = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \left(\frac{V_1}{T_1}\right) \Big/ \left(\frac{V_2}{T_2}\right) = \frac{p_2 - p}{p - p_1}.$$

Разрешая уравнение

$$\frac{p_2 - p}{p - p_1} = k$$

относительно p, получим

$$p = \frac{kp_1 + p_2}{k+1}.$$

Числовое значение:

$$p = \frac{kp_1 + p_2}{k+1} = \frac{1{,}5 \cdot 15 + 20}{1{,}5+1} = \frac{22{,}5+20}{2{,}5} = 17\,\text{МПа}.$$

Ответ: $p = \dfrac{kp_1 + p_2}{k+1} = 17\,\text{МПа}.$

Задание 5. (15 баллов)

Дайте развернутый ответ на вопрос: «*Почему эпицентры современных землетрясений нередко сконцентрированы в определенных частях Земли? Приведите примеры сейсмически активных зон*»

Ответ:
Землетрясения представляют собой подземные толчки и колебания земной коры (реже мантии) Земли, вызванные быстрым смещением пород в момент снятия напряжения в очаге землетрясения. Место, в котором происходит подвижка пород, называется гипоцентром, а точка – проекция на земной поверхности – эпицентром землетрясения.
Места концентрации очагов землетрясений распределены на Земле не равномерно. Почти все они связаны с границами литосферных плит, т.е. там, где происходят либо сжатие – 85% всех случаев (в зонах субдукции, коллизии плит), либо растяжение – 15% (наращивание океанской коры, раздвиг континентальной коры).
Полный ответ включает описание всех четырех случаев:
В зонах субдукции более тяжелая океаническая кора погружается под континентальную, формируя в местах соприкосновения глубинную сейсмоактивную зону Беньофа (Тихоокеанский пояс, в т.ч. Курильские острова, Камчатка и др.). Коллизия двух плит приводит к активному горообразованию и формированию обычно не глубоких очагов землетрясений (Крымские горы, Кавказ, Альпы, Памир и др.).
В зонах растяжения землетрясения не высокой силы сопровождают образование рифтов в срединно-океанических хребтах (Атлантический океан) и на континентах (В.Африка).
Дополнительные баллы могут быть начислены за упоминания о землетрясениях, связанных с взрывной вулканической деятельностью, с крупными обвалами (в том числе в пещерах) и оползнями, а также о техногенных землетрясениях.

Задание 6. (15 баллов)

На фотографии изображено побережье Черного моря. Внимательно изучите фотографию и опишите геологические процессы, которые формируют данное побережье.

Ответ:

На картине изображено морское побережье. В его формировании участвовали такие экзогенные геологические процессы, как: работа моря (преимущественно), ветра, выветривание и гравитационные явления. Для полного ответа на вопрос необходимо описать вклад всех четырех процессов.

Работа моря выражается в разрушении берега и аккумуляции (накоплении) разрушенного материала. Разрушительная работа моря (абразия) осуществляется сильными волнами, которые подмывают берег, вызывая его обрушение и формирование отвесных уступов – клифа. Приливно-отливные явления не оказывают существенного влияния на разрушение берега и не считаются правильным ответом. Более прочные породы образуют одиночные скалы – останцы (на фото вдалеке). Одновременно море аккумулирует разрушенный материал и формирует узкий пляж.

Ослабление прочности береговых уступов, их подмыв приводит к интенсивным гравитационным явлениям – оползням, осыпям, обвалам. На данной фотографии отчетливо видны оползневые тела, которые сформировались при оползании больших масс горных пород в сторону моря.

Разрушение пород берега усиливается выветриванием при участии химических (окисление, гидролиз и т.д.), физических (морозное расклинивание) и биологических факторов (корни деревьев, растений), а также работой ветра (выдувание, механическое обтачивание переносимыми частицами).

2017 г.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ

Заключительный этап (10-11 классы)

Вариант 2 - Решения

Задание 1. (15 баллов)

Процесс изменения рельефа Русской равнины в четвертичный период имеет неравномерный характер. В частности, уровень поверхности поднимался с различной интенсивностью в Воронежской области, Заволжье, на Кольском полуострове.

Для простоты предполагается, что поверхность Земли в указанных трех регионах поднималась равномерно, при этом на Кольском полуострове этот процесс начался ранее, чем в Воронежской области, на 1 млн. лет, а в Заволжье процесс начался ранее, чем в Воронежской области, но позднее, чем на Кольском полуострове. Через некоторое время после начала подъема региона Воронежской области был момент, когда прирост высоты уровней поверхности Земли в трех регионах был одинаковым, после этого момента уровни поднялись везде еще на 100 м, и сразу после этого рельеф стабилизировался, во всех регионах в разное время. Известно, что процесс повышения уровня поверхности Земли закончился в Воронежской области на 700 тыс. лет ранее, чем на Кольском полуострове, и на 200 тыс. лет ранее, чем в Заволжье. На сколько млн. лет процесс поднятия поверхности Земли на Кольском полуострове начался ранее, чем в Заволжье?

Решение. Скорости поднятия уровня поверхности на Кольском полуострове, в Заволжье и в Воронежской области обозначим соответственно через $v_1, v_2, v_3; v_1 < v_2 < v_3$. Далее, введем следующие обозначения. Пусть в Заволжье процесс начался на x млн лет позднее, чем на Кольском полуострове, при этом сначала уровни во всех регионах преодолели a м высоты, после этого 100 м. Выпишем соответствующие уравнения:

$$\frac{a}{v_1} - \frac{a}{v_3} = 1; \frac{100}{v_1} - \frac{100}{v_3} = 0.7; \frac{100}{v_2} - \frac{100}{v_3} = 0.2$$

Для ответа нужна величина $x = \frac{a}{v_1} - \frac{a}{v_2}$. Из условий задачи следует

$$a = \frac{1}{\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_3}}; 100 = \frac{0.7}{\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_3}} \Rightarrow a = \frac{1000}{7};$$

$$\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_3} = \frac{0.7}{100}; \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_3} = \frac{0.2}{100} \Rightarrow \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} = \frac{0.5}{100}$$

Отсюда вытекает, что $x = a \cdot \frac{0.5}{100} = \frac{1000}{7} \cdot \frac{0.5}{100} = \frac{5}{7}$.

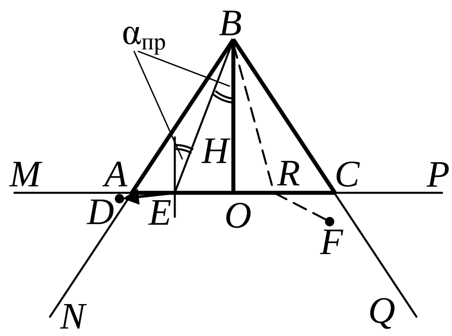
Ответ: На 5/7 млн. лет

Задание 2. (20 баллов)

Кусочек янтаря имеет форму прямого кругового конуса высотой H = 12 мм и радиусом основания R. По оси конуса пропущена тонкая нить. При каких значениях R любая точка нити будет видна из любой точки A, находящейся вне конуса, причем через **каждую** из видимых из точки A частей его поверхности – как поверхность основания, так и боковую поверхность конуса? Показатель преломления янтаря n = 1,55. Отражением лучей на поверхности янтаря пренебречь.

Решение.

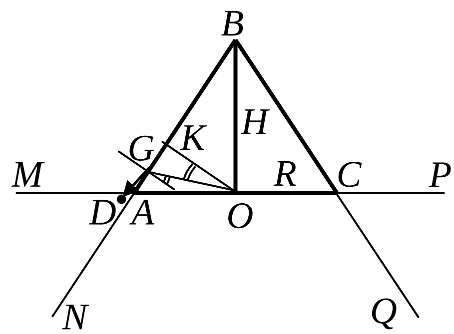
Основание конуса видно из любой точки, находящейся ниже плоскости основания. Боковая поверхность конуса видна из любой точки вне конической поверхности *NBQ*, образованной поверхностью конуса и ее продолжением вниз. Таким образом, существуют области *MAN* и *PCQ*, из которых видно как основание конуса, так и его боковую поверхность.



Выберем в области *MAN* произвольную точку D вблизи точки A. В эту точку лучи от произвольной точки нити придут после преломления на основании конуса практически параллельно плоскости основания. Значит, угол преломления такого луча равен 90º, а угол его падения на основание конуса равен $\alpha_{пр}$ – предельному углу полного внутреннего отражения. На рисунке видно, что такой луч упадет на основание конуса в точке E на самом большом расстоянии от центра основания O, если этот луч исходит из точки B. Очевидно, что должно выполняться неравенство:

$OE \le R$, то есть $H\,\mathrm{tg}\,\alpha_{пр} \le R$.

Что касается произвольной точки F, лежащей ниже основания конуса, то до нее лучи от точки B, как и от всякой другой точки нити, при выполнении только что полученного условия дойдут, что видно из рисунка (угол падения такого луча на основание конуса меньше $\alpha_{пр}$).



Лучи, исходящие от нити и прошедшие через боковую поверхность конуса, придут в точку D практически параллельно образующей AB конической поверхности. Поэтому угол их падения на коническую поверхность равен $\alpha_{пр}$. Это ограничение сильнее всего сказывается на лучах, идущих от точки O. Пусть $OK \perp AB$, $\angle KOG = \alpha_{пр}$. Тогда, чтобы точка O была видна из точки D, должно выполняться неравенство $\angle KOA \ge \alpha_{пр}$. Поскольку $\angle KOA = \angle OBC$, то в первой четверти тригонометрического круга введенное требование равносильно неравенству $\mathrm{tg}\,\angle KOA = \mathrm{tg}\,\angle OBC = \dfrac{R}{H} \ge \mathrm{tg}\,\alpha_{пр}$.

Что касается произвольной точки, лежащей левее прямой BN, то до нее при выполнении только что полученного условия лучи дойдут от любой точки нити, так как угол падения такого луча на боковую поверхность конуса меньше $\alpha_{пр}$.

Таким образом, нить видна целиком через основание и боковую поверхность конуса при выполнении одного и того же условия:

$$\frac{R}{H} \geq \operatorname{tg} \alpha_{\text{пр}}.$$

Отсюда получаем:

$$R \geq H \operatorname{tg} \alpha_{\text{пр}}.$$

Из условия $n \sin \alpha_{\text{пр}} = \sin 90°$ следует, что для предельного угла полного внутреннего отражения

$$\sin \alpha_{\text{пр}} = \frac{1}{n}, \quad \cos \alpha_{\text{пр}} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{\text{пр}}} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - 1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{\text{пр}} = \frac{\sin \alpha_{\text{пр}}}{\cos \alpha_{\text{пр}}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Таким образом, $R \geq \frac{H}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{12}{\sqrt{1{,}55^2 - 1}} \approx 10$ мм.

Ответ: $R \geq \frac{H}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 10$ мм

Задание 3. (20 баллов)

Осадочная порода содержит кремний и фосфат, объемы которых, x и y соответственно, связаны условиями $x + 2y \leq 5, \log_x(xy) \geq \log_y(\frac{1}{\sqrt[4]{x}})$. Какие значения может принимать величина объема кремния?

Решение.

Второе неравенство запишем в виде $1 + \log_x y \geq -\frac{1}{4}\log_y x, x > 0, y > 0$. Последнее неравенство эквивалентно $\frac{(2\log_x y + 1)^2}{\log_x y} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_x y = -\frac{1}{2} \\ \log_x y > 0 \end{array}\right.$.

В первом случае $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, подставив это в первое неравенство условия, получим

$$\frac{2}{\sqrt{x}} + x \leq 5 \Leftrightarrow 2 + x \cdot \sqrt{x} \leq 5 \cdot \sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(x + 2\sqrt{x} - 1) \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in [3 - 2\sqrt{2}, 4]$$

Во втором случае, т.е. $\log_y x > 0$, получаем $\left[\begin{array}{l} x, y \in (0,1) \\ x, y > 1 \end{array}\right.$, далее учет неравенства $x + 2y \leq 5$ дает $x \in (0,1) \cup (1,3)$. Объединяя два случая, получаем

Ответ: $x \in (0,1) \cup (1,4]$

Задание 4. (15 баллов)

При тектоническом сдвиге пород произошло нарушение геологической изоляции между двумя пластами осадочных пород, в которых находился природный газ при давлениях соответственно p_1= 17 МПа и p_2, в результате чего давление газа в пластах стало одинаковым и равным p= 19 МПа. Найти значение p_2, если отношение количеств вещества природного газа, находящегося в каждом из пластов **после** тектонического сдвига, $k = \nu_1/\nu_2 = 2$. Считать температуры осадочных пород в пластах различными и не меняющимися при тектоническом сдвиге.

Решение. Пусть температуры пластов осадочных пород составляют T_1 и T_2, а объемы, занимаемые природным газом в этих пластах, равны V_1 и V_2.Количества вещества природного газа, содержащегося в пластах **после** тектонического сдвига, равны соответственно ν_1 и ν_2 ,а **до** тектонического сдвига равны соответственно ν_1' и ν_2'. Используя для природного газа уравнение Клапейрона – Менделеева $pV = \nu RT$, получим для количества вещества выражение: $\nu = \frac{pV}{RT}$. Тогда согласно условию задачи

$$\nu_1 = \frac{pV_1}{RT_1},$$

$$\nu_2 = \frac{pV_2}{RT_2},$$

$$\nu_1' = \frac{p_1V_1}{RT_1},$$

$$\nu_2' = \frac{p_2V_2}{RT_2}.$$

Отношение количеств вещества газа в пластах **после** сдвига $k = \frac{\nu_1}{\nu_2}$ принимает вид:

$$k = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \left(\frac{V_1}{T_1}\right)\Big/\left(\frac{V_2}{T_2}\right).$$

По условию задачи $k = 2$.

Теперь учтем, что при тектоническом сдвиге общее количество вещества природного газа в пластах сохраняется, т.е.

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu_1' + \nu_2'.$$

Подставляя в это равенство выражения для ν_1, ν_2, ν_1' и ν_2', получим после упрощения

$$\frac{pV_1}{T_1} + \frac{pV_2}{T_2} = \frac{p_1V_1}{T_1} + \frac{p_2V_2}{T_2},$$

откуда

$$(p - p_1)\frac{V_1}{T_1} = (p_2 - p)\frac{V_2}{T_2}.$$

Таким образом,

$$k = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \left(\frac{V_1}{T_1}\right)\Big/\left(\frac{V_2}{T_2}\right) = \frac{p_2 - p}{p - p_1}.$$

Разрешая уравнение

$$\frac{p_2 - p}{p - p_1} = k$$

относительно p_2, получим

$$p_2 = (k+1)p - kp_1.$$

Числовое значение:
$$p_2 = (k+1)p - kp_1 = (2+1)19 - 2 \cdot 17 = 57 - 34 = 23 \text{МПа}.$$

Ответ: $p_2 = (k+1)p - kp_1 = 23$ МПа.

Задание 5. (15 баллов)

Дайте развернутый ответ на вопрос: «*Почему действующие вулканы нередко сконцентрированы в определенных частях Земли? Приведите примеры зон активного вулканизма*»

Ответ:
Места проявления вулканизма распределены на Земле не равномерно. Большинство вулканов расположены на континентах и островах, значительно меньше – на дне океанов. Чаще всего извержения вулканов происходят на границах литосферных плит, где происходят либо сжатие (в зонах субдукции), либо растяжение (наращивание океанской коры, раздвиг континентальной коры). Ещё одним представителем является внутриплитный магматизм.
Полный ответ включает описание всех четырех случаев:
В зонах субдукции более тяжелая океаническая кора погружается под континентальную. По мере погружения происходит нагревание, плавление вещества (чему способствует выделение воды из погружающихся осадочных пород), образование магматических очагов, а затем и вулканов (Тихоокеанское «огненное» кольцо, в т.ч. Курильские острова, Камчатка и др.).
В зонах растяжения (наращивания коры) извержения вулканов связаны с океаническими рифтовыми зоны, располагающимися в осевой части срединно-океанских хребтов (Атлантический океан, вулканы Исландии), либо с континентальными рифтами (В.Африка).
Образование активных вулканов внутри плит связано с так называемыми «горячими точками» - узкими пучками интенсивного теплового потока. Литосферная плита, проходя над такой «точкой», проплавляется и возникает цепочка вулканических островов (Гавайские, Канарские и другие).

Задание 6. (15 баллов)
На фотографии изображено побережье Черного моря. Внимательно изучите фотографию и опишите геологические процессы, которые формируют данное побережье.

Ответ:

На картине изображено морское побережье. В его формировании участвовали такие экзогенные геологические процессы, как: работа моря (преимущественно), ветра, выветривание и гравитационные явления. Для полного ответа на вопрос необходимо описать вклад всех четырех процессов.

Работа моря выражается в разрушении берега и аккумуляции (накоплении) разрушенного материала. Разрушительная работа моря (абразия) осуществляется сильными волнами, которые подмывают берег, вызывая его обрушение и формирование отвесных уступов – клифа. Приливно-отливные явления не оказывают существенного влияния на разрушение берега и не считаются правильным ответом. Одновременно море аккумулирует разрушенный материал и формирует узкий пляж.

Ослабление прочности береговых уступов, их подмыв приводит к интенсивным гравитационным явлениям – оползням, осыпям, обвалам. На данной фотографии отчетливо видны оползневые тела, которые сформировались при оползании больших масс горных пород в сторону моря.

Разрушение пород берега усиливается выветриванием при участии химических (окисление, гидролиз и т.д.), физических (морозное расклинивание) и биологических факторов (корни деревьев, растений), а также работой ветра (выдувание, механическое обтачивание переносимыми частицами).

2017 г.

Критерии оценки решений

Критерии оценки	Баллы					
	Задание 1	**Задание 2**	**Задание 3**	**Задание 4**	**Задание 5**	**Задание 6**
Задание выполнено правильно: - ответ верен, в работе есть полное обоснование полученного ответа (для заданий 1-4); - в работе дан исчерпывающий ответ на поставленное геологическое задание (для заданий 5 и 6)	15	20	20	15	15	15
Задание выполнено с небольшими недочетами: - арифметическая ошибка на завершающем этапе при полностью правильном алгоритме решения, что повлекло за собой неверный ответ; - правильный ответ при недостаточно полном обосновании, как он получен; - недостаточно полное обоснование ответов на геологические задания.	10	10	10	10	10	10
Задание выполнено с существенными недочетами: - решение было начато правильно, но не доведено до ответа из-за принципиальной ошибки в рассуждениях; - ответы на геологические задания даны крайне поверхностно и неполно.	5	5	5	5	5	5

Задание не выполнено: - решение с самого начала велось неверным путем; - отсутствие выполненного задания в работе.	0	0	0	0	0	0

2017 г.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ

Заключительный этап (5-9 классы)

Решения

Задание 1. (25 баллов)

Процесс формирования пластов торфяника – чрезвычайно медленный геологический процесс. Прирост толщины слоя торфяника не является равномерным. Начиная с нулевого значения, этот прирост на году с номером *t*, где *t* измеряется в годах относительно начала формирования пласта, равен (в м) $0.0002 \cdot t + 0.01, t = 0,1,2,...$ Чему равна толщина слоя после 1000 лет после начала его формирования?

Решение.

Пусть h(t) – толщина слоя после t лет его формирования. Тогда $h(t+1) - h(t) = 0.0002 \cdot t + 0.01, t = 0,1,2,...$, $h(0)$=0. Складывая равенства

$$h(t+1) - h(t) = 0.0002 \cdot t + 0.01, t = 0,1,2,...$$

при $t \le 1000$, получим $h(1000) = 0.0002 \cdot \dfrac{1+999}{2} \cdot 999 + 0.01 \cdot 1000$ =109.9.

Ответ: 109.9 м

Задание 2. (25 баллов)

Самородок неизвестного легкоплавкого металла плавится при температуре t_1 = 230 ºС. Расплавленную часть металла массой m_1 = 0,66 кг по каплям добавляют в воду, налитую в калориметр. Начальная масса воды m_2 = 1 кг, ее начальная температура t_2 = 20 ºС. В результате заливки металла часть воды k = 2 % выкипела, а в калориметре установилась температура t = 24 ºС. Из другого опыта известно, что удельная теплоемкость этого металла в твердом агрегатном состоянии c_1 = 220 Дж/(кг·ºС). Какова удельная теплота плавления λ данного металла? Теплопотерями на нагрев калориметра пренебречь. Удельная теплоемкость воды c_2 = 4200 Дж/(кг·ºС), ее удельная теплота парообразования r = 2300 кДж/кг.

Решение.

1. По условию задачи количество теплоты, отданное металлом при отвердевании и остывании, расходуется на нагревание воды и выкипание ее части: $Q_1 = Q_2$.
2. Металл отдает количество теплоты

$$Q_1 = m_1\lambda + m_1 c_1 (t_1 - t).$$

3. Выкипающая вода получает количество теплоты

$$Q' = k m_2 c_2 (t_к - t_2) + k m_2 r,$$

где $t_к$ = 100 ºС – температура кипения воды при нормальном давлении.

4. Вода, оставшаяся в калориметре, получает количество теплоты

$$Q'' = (1-k) m_2 c_2 (t - t_2).$$

5. Учитывая, что $Q_2 = Q' + Q''$, получим, подставляя полученные выражения для Q_1, Q' и Q'' в исходное равенство $Q_1 = Q_2$:

$$m_1\lambda + m_1 c_1 (t_1 - t) = k m_2 c_2 (t_k - t_2) + k m_2 r + (1-k) m_2 c_2 (t - t_2).$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{m_2}{m_1}\left[k\left(c_2(t_k - t_2) + r\right) + (1-k)c_2(t - t_2)\right] - c_1(t_1 - t) \approx 59{,}5 \text{ кДж/кг.}$$

Ответ: $\lambda = \frac{m_2}{m_1}\left[k\left(c_2(t_k - t_2) + r\right) + (1-k)c_2(t - t_2)\right] - c_1(t_1 - t) \approx 59{,}5 \text{ кДж/кг}$

Задание 3. (25 баллов)

Дайте развернутый ответ на вопрос: «*Где на Земле происходят землетрясения? Какие особенности геологического строения имеет данная территория?*»

Ответ:

Землетрясения представляют собой подземные толчки и колебания земной коры (реже мантии) Земли, вызванные быстрым смещением пород в момент снятия напряжения в очаге землетрясения.

Места концентрации очагов землетрясений распределены на Земле не равномерно. Почти все они связаны с границами литосферных плит, т.е. там, где происходят либо сжатие (в зонах субдукции, коллизии плит), либо растяжение (наращивание океанской коры, раздвиг континентальной коры).

Полный ответ включает описание всех четырех случаев:

В зонах субдукции более тяжелая океаническая кора погружается под континентальную, формируя в местах соприкосновения глубинную сейсмоактивную зону Беньофа (Курильские острова, Камчатка и др.). Коллизия двух плит приводит к активному горообразованию и формированию обычно не глубоких очагов землетрясений (Крымские горы, Кавказ, Альпы, Памир и др.).

В зонах растяжения землетрясения не высокой силы сопровождают образование рифтов в срединно-океанических хребтах (Атлантический океан) и на континентах (В.Африка).

Задание 4. (25 баллов)

Перед Вами репродукция картины Ивана Константиновича Айвазовского «Крым».

Опишите геологические процессы, формирующие это побережье. Какие береговые формы рельефа изобразил художник?

Ответ:
На картине изображено морское побережье. В его формировании участвовали такие экзогенные геологические процессы, как: работа моря (преимущественно), ветра, выветривание и гравитационные явления. Для полного ответа на вопрос необходимо описать вклад всех четырех процессов.
Работа моря выражается в разрушении берега и аккумуляции (накоплении) разрушенного материала. Разрушительная работа моря (абразия) осуществляется сильными волнами, которые подмывают берег, вызывая его обрушение и формирование отвесных уступов – клифа (на фото вдалеке). Более прочные породы образуют одиночные скалы – останцы (на фото вдалеке). Приливно-отливные явления не оказывают существенного влияния на разрушение берега и не считаются правильным ответом. Одновременно море аккумулирует разрушенный материал и формирует пляж (на фото вблизи).
Разрушение пород берегового уступа усиливается выветриванием при участии химических (окисление, гидролиз и т.д.), физических (морозное расклинивание) и биологических факторов (корни деревьев), а также работой ветра (выдувание, механическое обтачивание переносимыми частицами).
Ослабление прочности береговых уступов приводит к гравитационным явлениям – осыпям, обвалам (крупные обломки на фото).

Критерии оценки решений

Критерии оценки	**Баллы**			
	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4
Задание выполнено правильно: ответ верен, в работе есть полное обоснование полученного ответа (для заданий 1-2); в работе дан исчерпывающий ответ на поставленное геологическое задание (для заданий 3 и 4)	25	25	25	25
Задание выполнено с небольшими недочетами: - арифметическая ошибка на завершающем этапе при полностью правильном алгоритме решения, что повлекло за собой неверный ответ; - правильный ответ при недостаточно полном обосновании, как он получен; - недостаточно полное обоснование ответов на геологические задания.	15	15	15	15

Задание выполнено с существенными недочетами: решение было начато правильно, но не доведено до ответа из-за принципиальной ошибки в рассуждениях.	5	5	5	5
Задание не выполнено: - решение с самого начала велось неверным путем; - отсутствие решения в работе.	0	0	0	0