

## Олимпиада школьников «Ломоносов»

### по механике и математическому моделированию

Задания заключительного этапа 2016/2017 учебного года для 7-8 класса

---

### Вариант 2017-7-8

1. От квадратного стального листа со стороной 1 метр с четырёх углов отрезается по одинаковому прямоугольному равнобедренному треугольнику так, что остаётся квадрат меньших размеров. Определите его массу, если толщина листа равна 3 мм, а плотность стали 7,8 г/см<sup>3</sup>.
2. При входе в атмосферу астероид сильно разогрелся и при подлете к поверхности Земли взорвался и разлетелся на большое количество осколков. Ученые собрали все осколки и разделили их на группы по размеру. Было обнаружено, что пятая часть всех осколков имела диаметр от 1 м до 3 м, еще 26 были очень крупными (более 3 м в диаметре), а остальные – были разделены на несколько групп, численность каждой из которых составляет 1/7 от общего количества осколков. Какое количество осколков собрали ученые?
3. Учительница сказала, что для получения температуры в градусах Фаренгейта нужно значение температуры в градусах Цельсия увеличить на 80% и прибавить к результату 32. После этого Гаврила решил, что для получения температуры в градусах Фаренгейта нужно значение температуры в градусах Цельсия уменьшить на 80% и после этого отнять 32. Глафира же считает, что нужно вначале отнять 32, а потом уменьшить результат на 80%. Верные ли формулы получили Гаврила и Глафира? При каких значениях температуры в градусах Цельсия Гаврила и Глафира получают правильные результаты?
4. Красная Шапочка идет по тропинке со скоростью 6 км/час, а Серый Волк бежит по просеке, перпендикулярной тропинке, со скоростью 8 км/час. Когда Красная Шапочка пересекала просеку, Волку оставалось добежать до тропинки 80 метров. Но он был уже старенький, стал подслеповат, да и чутье уже не очень. Заметит ли Волк Шапочку, если он чует добычу на расстоянии не более 45 метров?
5. В деревне, где живет Глафира, есть небольшой пруд, который наполняется бьющими на дне ключами. Пытливая Глафира выяснила, что стадо из 17 коров полностью выпило этот пруд за 3 дня. Через какое-то время ключи снова наполнили пруд, после чего 2 коровы выпили его за 30 дней. За сколько дней может выпить этот пруд одна корова?

4 марта 2017 г.

## Решения.

1. От квадратного стального листа со стороной 1 метр с четырёх углов отрезается по одинаковому прямоугольному равнобедренному треугольнику так, что остаётся квадрат меньших размеров. Определите его массу, если толщина листа равна 3 мм, а плотность стали 7,8 г/см<sup>3</sup>.

Ответ: 11,7 кг.

Решение. Площадь получившегося квадрата равна половине площади исходного квадрата и равна  $\frac{10000}{2} = 5000$  (см<sup>2</sup>), его объём равен  $5000 \cdot 0,3 = 1500$  (см<sup>3</sup>), а масса равна  $1500 \cdot 7,8 = 11700$  (г).

2. Ответ: 70. Решение. Пусть  $X$  – общее число осколков. Условие задачи приводит к уравнению:

$$\frac{X}{5} + 26 + n \cdot \frac{X}{7} = X, \text{ где } n \text{ – неизвестное число групп. Из условия задачи следует, что}$$

$$X = 35l, l \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Тогда первое уравнение можно переписать в другом виде:  $7l + 26 + n \cdot 5l = 35l$ . Отсюда выразим  $n$ :  $5n = 28 - \frac{26}{l}$ . Ясно, что натуральная переменная  $l$  может принимать значения 1, 2, 13 и 26. Прямой проверкой убеждаемся, что возможен лишь единственный вариант  $l = 2, n = 3$ . Подставляем в (1) и получаем ответ  $X = 70$ .

3. Нет; у Гаврилы при  $C^\circ = -40$ ; у Глафиры при  $C^\circ = 0$ .

Решение. Из формулы  $\Phi^\circ = C^\circ \cdot \left(1 + \frac{80}{100}\right) + 32 = 1,8 \cdot C^\circ + 32$  вытекает обратная форму-

ла  $C^\circ = \frac{\Phi^\circ - 32}{1,8}$ . Как результат Гаврилы  $C^\circ = \Phi^\circ \left(1 - \frac{80}{100}\right) - 32 = \frac{\Phi^\circ}{5} - 32$ , так и результат

Глафиры  $C^\circ = (\Phi^\circ - 32) \cdot \left(1 - \frac{80}{100}\right) = \frac{\Phi^\circ - 32}{5}$  отличаются от правильного.

При этом у Гаврилы совпадение будет при  $\frac{\Phi^\circ}{5} - 32 = \frac{\Phi^\circ - 32}{1,8} \Leftrightarrow$

$$9(\Phi^\circ - 160) = 25(\Phi^\circ - 32) \Leftrightarrow 16\Phi^\circ = 25 \cdot 32 - 9 \cdot 160 \Leftrightarrow \Phi^\circ = -40. \text{ Это соответствует}$$

температуре  $C^\circ = -40^\circ$ . У Глафиры совпадение будет при  $\frac{\Phi^\circ - 32}{1,8} = \frac{\Phi^\circ - 32}{5} \Leftrightarrow$

$\Phi^\circ = 32$ . Это соответствует  $C^\circ = 0^\circ$ .

4. Красная Шапочка идет по тропинке со скоростью 6 км/час, а Серый Волк бежит по просеке, перпендикулярной тропинке, со скоростью 8 км/час. Когда Красная Шапочка пересекала просеку, Волку оставалось добежать до тропинки 80 метров. Но он был уже старенький,

стал подслеповат, да и чутье уже не очень. Заметит ли Волк Шапочку, если он чует добычу на расстоянии не более 45 метров?

Ответ: Нет.

Решение. Можно решить задачу в подвижной системе координат, связанной с Красной Шапочкой. Тогда Красная Шапочка неподвижна, а траекторией движения Волка является прямая. Кратчайшее расстояние от точки до прямой здесь равно (из соображений подобия):  $80 \cdot \sin \alpha$ , при этом  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ . Получается 48 м, что больше, чем 45 м.

Другой способ решения: расстояние от точки пересечения до Красной Шапочки, в зависимости от времени  $t$ , равно  $6t$ ; расстояние от точки пересечения до Волка равно  $80 - 8t$ . Поэтому расстояние от Волка до Красной Шапочки по теореме Пифагора равно  $\sqrt{36t^2 + (80 - 8t)^2}$   
 $= 2\sqrt{5(5t^2 - 64t + 320)}$ . Минимум этой величины достигается при  $t = \frac{64}{2 \cdot 5} = \frac{32}{5}$ , и равен 48.

5. Ответ: За 75 дней.

Решение. Пусть пруд имеет объем  $a$  (условных единиц), одна корова выпивает в день  $b$  (условных единиц), а ключи добавляют в день  $c$  (условных единиц) воды. Тогда первое условие задачи равносильно уравнению  $a + 3c = 3 \cdot 17b$ , а второе – уравнению  $a + 30c = 30 \cdot 2b$ . Отсюда получаем, что  $b = 3c, a = 150c$ . Если одна корова выпивает пруд за  $x$  дней, то получаем  $a + xc = xb$ , то есть  $x = \frac{a}{b - c} = 75$ .