

**Олимпиада школьников «Ломоносов» 2016/2017 учебного года  
по механике и математическому моделированию**

**ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ**

**Отборочный этап 1**

**10-11 класс**

Во всех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). Ответом на каждую из задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления.

::1.1:: Материальная точка, двигаясь по прямой со скоростью  $U = 7$  м/с, начинает двигаться равнозамедленно и через несколько секунд скорость точки становится равной  $V = 1$  м/с. После этого точка продолжает двигаться с постоянной скоростью. Какова была скорость точки, в момент времени, когда точка прошла треть того пути, который она прошла за все время торможения? Ответ дайте в метрах в секунду, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

{= 5, 74}

::1.2:: Материальная точка, двигаясь по прямой со скоростью  $V = 1$  м/с, начинает двигаться равноускоренно и через несколько секунд скорость точки становится равной  $U = 7$  м/с. После этого точка продолжает двигаться с постоянной скоростью. Какова была скорость точки, в момент времени, когда точка прошла две трети того пути, который она прошла за все время разгона? Ответ дайте в метрах в секунду, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

{= 5, 74}

::1.3:: Материальная точка, двигаясь по прямой со скоростью  $U = 7$  м/с, начинает двигаться равнозамедленно и через несколько секунд скорость точки становится равной  $V = 1$  м/с. После этого точка продолжает двигаться с постоянной скоростью. Какова была скорость точки, в момент времени, когда точка прошла две трети того пути, который она прошла за все время торможения? Ответ дайте в метрах в секунду, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

{= 4, 12}

::1.4:: Материальная точка, двигаясь по прямой со скоростью  $V = 1$  м/с, начинает двигаться равноускоренно и через несколько секунд скорость точки становится равной  $U = 7$  м/с. После этого точка продолжает двигаться с постоянной скоростью. Какова была скорость точки, в момент времени, когда точка прошла треть того пути, который она прошла за все время разгона? Ответ дайте в метрах в секунду, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

{= 4, 12}

::1.5:: Материальная точка, двигаясь по прямой со скоростью  $U = 9$  м/с, начинает двигаться равнозамедленно и через несколько секунд скорость точки становится равной  $V = 5$  м/с. После этого точка продолжает двигаться с постоянной скоростью. Какова была скорость точки, в момент времени, когда точка прошла четверть того пути, который она прошла за все время торможения? Ответ дайте в метрах в секунду, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

{= 8, 19}

::1.6:: Материальная точка, двигаясь по прямой со скоростью  $V = 5$  м/с, начинает двигаться равноускоренно и через несколько секунд скорость точки становится равной  $U = 9$  м/с. После этого точка продолжает двигаться с постоянной скоростью. Какова была скорость точки, в момент времени, когда точка прошла три четверти того пути, который она прошла за все время разгона? Ответ дайте в метрах в секунду, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

{= 8, 19}

::1.7:: Материальная точка, двигаясь по прямой со скоростью  $U = 9$  м/с, начинает двигаться равнозамедленно и через несколько секунд скорость точки становится равной  $V = 5$  м/с. После этого точка продолжает двигаться с постоянной скоростью. Какова была скорость точки, в момент времени, когда точка прошла три четверти того пути, который она прошла за все время торможения? Ответ дайте в метрах в секунду, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

{= 6, 24}

::1.8:: Материальная точка, двигаясь по прямой со скоростью  $V = 5$  м/с, начинает двигаться равноускоренно и через несколько секунд скорость точки становится равной  $U = 9$  м/с. После этого точка продолжает двигаться с постоянной скоростью. Какова была скорость точки, в момент времени, когда точка прошла четверть того пути, который она прошла за все время разгона? Ответ дайте в метрах в секунду, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

{= 6, 24}

::2.1:: Школьник Гаврила, рост которого 160 см, со скоростью 1,3 м/с удаляется от висящего на высоте 3 м фонаря. Определите скорость роста длины его тени. Ответ дайте в метрах в секунду, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

{= 1, 49}

::2.2:: Школьник Гаврила, рост которого 160 см, со скоростью 1,6 м/с удаляется от висящего на высоте 3 м фонаря. Определите скорость роста длины его тени. Ответ дайте в метрах в секунду, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

{= 1, 83}

::2.3:: Школьник Гаврила, рост которого 160 см, со скоростью 1,5 м/с удаляется от висящего на высоте 3 м фонаря. Определите скорость роста длины его тени. Ответ дайте в метрах в секунду, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

{= 1, 71}

::2.4:: Школьник Гаврила, рост которого 160 см, со скоростью 1,4 м/с удаляется от висящего на высоте 3,5 м фонаря. Определите скорость роста длины его тени. Ответ дайте в метрах в секунду, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

{= 1, 18}

::2.5:: Школьник Гаврила, рост которого 160 см, со скоростью 1,6 м/с удаляется от висящего на высоте 3,5 м фонаря. Определите скорость роста длины его тени. Ответ дайте в метрах в секунду, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

{= 1, 35}

::2.6:: Школьник Гаврила, рост которого 160 см, со скоростью 1,5 м/с удаляется от висящего на высоте 3,5 м фонаря. Определите скорость роста длины его тени. Ответ дайте в метрах в секунду, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

{= 1, 26}

::2.7:: Школьник Гаврила, рост которого 160 см, со скоростью 1,3 м/с удаляется от висящего на высоте 3,5 м фонаря. Определите скорость роста длины его тени. Ответ дайте в метрах в секунду, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

{= 1,09}

::3.1:: Артиллерийское орудие горизонтально стреляет с невысоко расположенной плиты, высоту которой можно регулировать. Баллистики рассчитали, что для того, чтобы снаряд попал в находящуюся на поверхности земли цель, плита должна быть расположена на высоте  $h = 1,4$  м. Однако после реального выстрела выяснилось, что снаряд пролетел по горизонтали расстояние, составляющее  $3/4$  от того, которое было запланировано. Оказалось, что горе-баллистики забыли учесть сопротивление воздуха. На какой высоте (в метрах) должна быть расположена плита, чтобы с учетом силы сопротивления воздуха снаряд попал в цель? При расчете можно пренебречь вертикальной составляющей силы сопротивления воздуха, а горизонтальную составляющую считать постоянной величиной.

{=5,6}

::3.2:: Артиллерийское орудие горизонтально стреляет с невысоко расположенной плиты, высоту которой можно регулировать. Баллистики рассчитали, что для того, чтобы снаряд попал в находящуюся на поверхности земли цель, плита должна быть расположена на высоте  $h = 1,2$  м. Однако после реального выстрела выяснилось, что снаряд пролетел по горизонтали расстояние, составляющее  $3/4$  от того, которое было запланировано. Оказалось, что горе-баллистики забыли учесть сопротивление воздуха. На какой высоте (в метрах) должна быть расположена плита, чтобы с учетом силы сопротивления воздуха снаряд попал в цель? При расчете можно пренебречь вертикальной составляющей силы сопротивления воздуха, а горизонтальную составляющую считать постоянной величиной.

{=4,8}

::3.3:: Артиллерийское орудие горизонтально стреляет с невысоко расположенной плиты, высоту которой можно регулировать. Баллистики рассчитали, что для того, чтобы снаряд попал в находящуюся на поверхности земли цель, плита должна быть расположена на высоте  $h = 1,6$  м. Однако после реального выстрела выяснилось, что снаряд пролетел по горизонтали расстояние, составляющее  $3/4$  от того, которое было запланировано. Оказалось, что горе-баллистики забыли учесть сопротивление воздуха. На какой высоте (в метрах) должна быть расположена плита, чтобы с учетом силы сопротивления воздуха снаряд попал в цель? При расчете можно пренебречь вертикальной составляющей силы сопротивления воздуха, а горизонтальную составляющую считать постоянной величиной.

{=6,4}

::3.4:: Артиллерийское орудие горизонтально стреляет с невысоко расположенной плиты, высоту которой можно регулировать. Баллистики рассчитали, что для того, чтобы снаряд попал в находящуюся на поверхности земли цель, плита должна быть расположена на высоте  $h = 1,8$  м. Однако после реального выстрела выяснилось, что снаряд пролетел по горизонтали расстояние, составляющее  $3/4$  от того, которое было запланировано. Оказалось, что горе-баллистики забыли учесть сопротивление воздуха. На какой высоте (в метрах) должна быть расположена плита, чтобы с учетом силы сопротивления воздуха снаряд попал в цель? При расчете можно пренебречь вертикальной составляющей силы сопротивления воздуха, а горизонтальную составляющую считать постоянной величиной.

{=7,2}

::3.5:: Артиллерийское орудие горизонтально стреляет с невысоко расположенной плиты, высоту которой можно регулировать. Баллистики рассчитали, что для того, чтобы снаряд попал в находящуюся на поверхности земли цель, плита должна быть

расположена на высоте  $h = 2,4$  м. Однако после реального выстрела выяснилось, что снаряд пролетел по горизонтали расстояние, составляющее  $3/4$  от того, которое было запланировано. Оказалось, что горе-баллистики забыли учесть сопротивление воздуха. На какой высоте (в метрах) должна быть расположена плита, чтобы с учетом силы сопротивления воздуха снаряд попал в цель? При расчете можно пренебречь вертикальной составляющей силы сопротивления воздуха, а горизонтальную составляющую считать постоянной величиной.

{=9,6}

::3.6:: Артиллерийское орудие горизонтально стреляет с невысоко расположенной плиты, высоту которой можно регулировать. Баллистики рассчитали, что для того, чтобы снаряд попал в находящуюся на поверхности земли цель, плита должна быть расположена на высоте  $h = 2,2$  м. Однако после реального выстрела выяснилось, что снаряд пролетел по горизонтали расстояние, составляющее  $3/4$  от того, которое было запланировано. Оказалось, что горе-баллистики забыли учесть сопротивление воздуха. На какой высоте (в метрах) должна быть расположена плита, чтобы с учетом силы сопротивления воздуха снаряд попал в цель? При расчете можно пренебречь вертикальной составляющей силы сопротивления воздуха, а горизонтальную составляющую считать постоянной величиной.

{=8,8}

::3.7:: Артиллерийское орудие горизонтально стреляет с невысоко расположенной плиты, высоту которой можно регулировать. Баллистики рассчитали, что для того, чтобы снаряд попал в находящуюся на поверхности земли цель, плита должна быть расположена на высоте  $h = 2,6$  м. Однако после реального выстрела выяснилось, что снаряд пролетел по горизонтали расстояние, составляющее  $3/4$  от того, которое было запланировано. Оказалось, что горе-баллистики забыли учесть сопротивление воздуха. На какой высоте (в метрах) должна быть расположена плита, чтобы с учетом силы сопротивления воздуха снаряд попал в цель? При расчете можно пренебречь вертикальной составляющей силы сопротивления воздуха, а горизонтальную составляющую считать постоянной величиной.

{=10,4}

::3.8:: Артиллерийское орудие горизонтально стреляет с невысоко расположенной плиты, высоту которой можно регулировать. Баллистики рассчитали, что для того, чтобы снаряд попал в находящуюся на поверхности земли цель, плита должна быть расположена на высоте  $h = 2,8$  м. Однако после реального выстрела выяснилось, что снаряд пролетел по горизонтали расстояние, составляющее  $3/4$  от того, которое было запланировано. Оказалось, что горе-баллистики забыли учесть сопротивление воздуха. На какой высоте (в метрах) должна быть расположена плита, чтобы с учетом силы сопротивления воздуха снаряд попал в цель? При расчете можно пренебречь вертикальной составляющей силы сопротивления воздуха, а горизонтальную составляющую считать постоянной величиной.

{=11,2}

::4.1:: Гаврила приходит на каток в какой-то момент времени между 14 : 00 и 17 : 30 и катается в течение 30 минут (или до закрытия катка в 17 : 30, если он приходит менее, чем за 30 минут до закрытия). Его одноклассница Глафира также приходит на каток между 14 : 00 и 17 : 30 и катается 30 минут (или до закрытия, если приходит позже, чем в 17 : 00). Найдите вероятность того, что Гаврила и Глафира встретятся на катке. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

{=0,27}

::4.2:: Глафира приходит на каток в какой-то момент времени между 14 : 30 и 18 : 00 и катается в течение 30 минут (или до закрытия катка в 18 : 00, если она приходит менее, чем за 30 минут до закрытия). Ее одноклассник Гаврила также приходит на каток между 14 : 30 и 18 : 00 и катается 30 минут (или до закрытия, если приходит позже, чем в 17 : 30). Найдите вероятность того, что Гаврила и Глафира не встретятся на катке. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

{=0,73}

::4.3:: Гаврила приходит на каток в какой-то момент времени между 15 : 00 и 18 : 30 и катается в течение 40 минут (или до закрытия катка в 18 : 30, если он приходит менее, чем за 40 минут до закрытия). Его одноклассница Глафира также приходит на каток между 15 : 00 и 18 : 30 и катается 40 минут (или до закрытия, если приходит позже, чем в 17 : 50). Найдите вероятность того, что Гаврила и Глафира встретятся на катке. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

{=0,34}

::4.4:: Глафира приходит на каток в какой-то момент времени между 15 : 30 и 19 : 00 и катается в течение 40 минут (или до закрытия катка в 19 : 00, если она приходит менее, чем за 40 минут до закрытия). Ее одноклассник Гаврила также приходит на каток между 15 : 30 и 19 : 00 и катается 40 минут (или до закрытия, если приходит позже, чем в 18 : 20). Найдите вероятность того, что Гаврила и Глафира не встретятся на катке. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

{=0,66}

::5.1:: Цилиндрический сосуд объема  $120 \text{ дм}^3$  разделен подвижной перегородкой.

Первоначально в левой части сосуда находятся 3 моля водорода и 3 моля азота. В правой части находится 72 грамма воды. Перегородка проницаема для водорода, но непроницаема для азота и воды. Всю систему нагревают до температуры  $100^\circ\text{C}$ . Определите объем левой части сосуда после установления равновесия. Ответ дайте в кубических дециметрах, округлив до ближайшего целого.

{=93}

::5.2:: Цилиндрический сосуд объема  $90 \text{ дм}^3$  разделен подвижной перегородкой.

Первоначально в левой части сосуда находятся 2 моля водорода и 2 моля углекислого газа. В правой части находится 54 грамма воды. Перегородка проницаема для водорода, но непроницаема для углекислого газа и воды. Всю систему нагревают до температуры  $100^\circ\text{C}$ . Определите объем левой части сосуда после установления равновесия. Ответ дайте в кубических дециметрах, округлив до ближайшего целого.

{=62}

::5.3:: Цилиндрический сосуд объема  $60 \text{ дм}^3$  разделен подвижной перегородкой.

Первоначально в левой части сосуда находятся 1 моль водорода и 1 моль кислорода. В правой части находится 36 граммов воды. Перегородка проницаема для водорода, но непроницаема для кислорода и воды. Всю систему нагревают до температуры  $100^\circ\text{C}$ . Определите объем левой части сосуда после установления равновесия. Ответ дайте в кубических дециметрах, округлив до ближайшего целого.

{=31}

::5.4:: Цилиндрический сосуд объема  $150 \text{ дм}^3$  разделен подвижной перегородкой.

Первоначально в левой части сосуда находятся 4 моля водорода и 4 моля гелия. В правой части находится 90 граммов воды. Перегородка проницаема для водорода, но непроницаема для гелия и воды. Всю систему нагревают до температуры  $100^\circ\text{C}$ . Определите объем левой части сосуда после установления равновесия. Ответ дайте в кубических дециметрах, округлив до ближайшего целого.

{=124}

::5.5:: Цилиндрический сосуд объема  $120 \text{ дм}^3$  разделен подвижной перегородкой.

Первоначально в левой части сосуда находятся 3 моля водорода и 3 моля азота. В правой части находится 72 грамма воды. Перегородка проницаема для водорода, но непроницаема для азота и воды. Всю систему нагревают до температуры  $100^\circ\text{C}$ . Определите объем правой части сосуда после установления равновесия. Ответ дайте в кубических дециметрах, округлив до ближайшего целого.

{=27}

::5.6:: Цилиндрический сосуд объема  $90 \text{ дм}^3$  разделен подвижной перегородкой.

Первоначально в левой части сосуда находятся 2 моля водорода и 2 моля углекислого газа. В правой части находится 54 грамма воды. Перегородка проницаема для водорода, но непроницаема для углекислого газа и воды. Всю систему нагревают до температуры  $100^\circ\text{C}$ . Определите объем правой части сосуда после установления равновесия. Ответ дайте в кубических дециметрах, округлив до ближайшего целого.

{=28}

::5.7:: Цилиндрический сосуд объема  $60 \text{ дм}^3$  разделен подвижной перегородкой.

Первоначально в левой части сосуда находятся 1 моль водорода и 1 моль кислорода. В правой части находится 36 граммов воды. Перегородка проницаема для водорода, но непроницаема для кислорода и воды. Всю систему нагревают до температуры  $100^\circ\text{C}$ . Определите объем правой части сосуда после установления равновесия. Ответ дайте в кубических дециметрах, округлив до ближайшего целого.

{=29}

::5.8:: Цилиндрический сосуд объема  $150 \text{ дм}^3$  разделен подвижной перегородкой.

Первоначально в левой части сосуда находятся 4 моля водорода и 4 моля гелия. В правой части находится 90 граммов воды. Перегородка проницаема для водорода, но непроницаема для гелия и воды. Всю систему нагревают до температуры  $100^\circ\text{C}$ . Определите объем правой части сосуда после установления равновесия. Ответ дайте в кубических дециметрах, округлив до ближайшего целого.

{=26}

### Решение.

1. В осях координат зависимости скорости от времени получается трапеция с основаниями  $V$  и  $U$ . Так как пройденный путь — это площадь под графиком скорости, то задача сводится к нахождению параллельного основаниям трапеции отрезка, который делит площадь в отношении  $1 : 2(1 : k)$ . Искомая скорость получается равной

$$W = \frac{V^2 + kU^2}{1 + k}$$

. Ответ:  $\{= \sqrt{33} \approx 5,74\}$

2. Если обозначить через  $a$  расстояние от Гаврилы до точки, расположенной под фонарем, а через  $x$  — длину его тени, то получим из простых геометрических соображений:  $\frac{x}{x+a} = h/H$ , где  $h$  и  $H$  — высота Гаврилы и высота, на которой висит фонарь, соответственно. Отсюда находим длину тени:  $\frac{ah}{H-h}$ . Поэтому  $\dot{x} = \frac{ah}{H-h} = \frac{1,3 \cdot 1,6}{3,0-1,6} = 1,49$  (м/с). Здесь точками обозначается производная по времени, то есть скорость.

3. При горизонтальном выстреле с учетом горизонтальной силы сопротивления  $F$  воздуха закон движения снаряда массой  $m$  можно записать в форме:

$$\begin{cases} x = Vt - at^2/2, \\ y = h - gt^2/2. \end{cases}$$

Откуда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} L = \alpha L_0 = Vt - at^2/2, \\ 0 = h - gt^2/2. \end{cases}$$

Здесь  $L_0$  — расстояние до цели,  $0 < \alpha < 1$ . Время в полете выражается формулой  $t = \sqrt{2h/g}$ , а расстояние по горизонтали  $L = V\sqrt{2h/g} - kh$ , где  $k = a/g$  и  $a = F/m$ . В последнем уравнении первый член определяет дальность полета без учета силы сопротивления. То есть  $L_0 = V\sqrt{2h/g}$ . Тогда можно найти  $k$ :  $kh = L_0(1 - \alpha)$

Для попадания в цель необходимо поднять пушку на некоторую высоту  $h_1$ , такую что будет выполняться соотношение:  $L_0 = V\sqrt{2h_1/g} - kh_1$  или  $L_0 = V\sqrt{2h/g} \cdot x - kh \cdot x^2 \Rightarrow L_0 = L_0 \cdot x - L_0(1 - \alpha) \cdot x^2$ , где  $x = \sqrt{\frac{h_1}{h}}$  — искомая величина.

Полученное уравнение имеет единственное решение  $x = 2$ , поэтому высоту плиты надо увеличить в  $x^2 = 4$  раза.

4. Весь промежуток времени между 14 : 00 и 17 : 30 составляет 210 минут. Отложим на оси  $x$  на отрезке от 0 до 210 минут момент появления Гаврилы, а на оси  $y$  на отрезке от 0 до 210 минут — момент появления Глафиры. Тогда координаты любой точки внутри квадрата размерами  $210 \times 210$  соответствуют какой-то возможной ситуации. Если Гаврила приходит в момент времени  $x$ , то они встретятся, если Глафира пришла между моментами времени  $x - 30$  и  $x + 30$ . Это означает, что точки, расположенные внутри данного квадрата между прямыми  $y = x - 30$  и  $y = x + 30$ , соответствуют ситуациям, когда встреча происходит. Искомая вероятность равна отношению площади части квадрата, заключенной между параллельными диагоналями квадрата прямыми  $y = x \pm 30$ , ко всей площади квадрата. Она равняется:

$$\frac{210 \cdot 210 - 2 \cdot \frac{180 \cdot 180}{2}}{210 \cdot 210} = 1 - \frac{18^2}{21^2} = 1 - \frac{36}{49} = \frac{13}{49} = 0,2653...$$

5. Так как перегородка проницаема для водорода, то он займет весь объем сосуда. На положение перегородки распределение водорода не влияет.

В правой части сосуда образуется водяной пар и вода. Давление насыщенного пара при температуре  $100^\circ\text{C}$  равно атмосферному давлению  $P_0$ . Из закона М-К видно, что

72 грамма насыщенного водяного пара занимают объем  $V = \frac{mRT}{\mu P_0} = 122,4 \text{ дм}^3$ . Это больше, чем всего сосуда. Значит, вода вся не испарится. И давление водяного пара будет атмосферным. Оно должно быть равно давлению азота. Находим объем азот  $V_A = \frac{\nu RT}{P_0} \approx 62 \text{ дм}^3$ .