

Олимпиада школьников «Ломоносов»
по механике и математическому моделированию

Задания заключительного этапа 2016/2017 учебного года для 9 класса

Вариант 2017-9

1. При входе в атмосферу астероид сильно разогрелся и при подлете к поверхности Земли взорвался и разлетелся на большое количество осколков. Ученые собрали все осколки и разделили их на группы по размеру. Было обнаружено, что пятая часть всех осколков имела диаметр от 1 м до 3 м, еще 26 были очень крупными (более 3 м в диаметре), а остальные – были разделены на несколько групп, численность каждой из которых составляет $1/7$ от общего количества осколков. Какое количество осколков собрали ученые?
2. Масса первого чугунного шара на 1462,5% больше массы второго шара. На сколько процентов меньше краски понадобится для окраски второго шара, чем для окраски первого? Объем шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$, площадь поверхности шара равна $4\pi R^2$.
3. Красная Шапочка идет по тропинке со скоростью 6 км/час, а Серый Волк бежит по просеке, перпендикулярной тропинке, со скоростью 8 км/час. Когда Красная Шапочка пересекала просеку, Волку оставалось добежать до тропинки 80 метров. Но он был уже старенький, стал подслеповат, да и чутье уже не очень. Заметит ли Волк Шапочку, если он чует добычу на расстоянии не более 45 метров?
4. Для того, чтобы тянуть вверх по наклонной плоскости блок, требуется сила, в три раза большая, чем для того, чтобы стаскивать этот блок вниз, а сумма этих сил равна весу блока. Определить коэффициент трения между блоком и плоскостью.
5. В деревне, где живет Глафира, есть небольшой пруд, который наполняется бьющими на дне ключами. Пытливая Глафира выяснила, что стадо из 17 коров полностью выпило этот пруд за 3 дня. Через какое-то время ключи снова наполнили пруд, после чего 2 коровы выпили его за 30 дней. За сколько дней может выпить этот пруд одна корова?
6. Гаврила путешествовал по Африке. В солнечный ветреный день, в полдень, когда лучи от Солнца падали вертикально, мальчик бросил мяч из-за головы со скоростью 5 м/с против ветра под углом к горизонту. Через 1 с мяч попал ему в живот на 1 м ниже точки броска. Определите, на какое наибольшее расстояние удалялась от ног Гаврилы тень мяча. Сила, действующая на мяч со стороны воздуха, направлена горизонтально и не зависит от положения и скорости. Ускорение свободного падения g равно 10 м/с^2 .

Решение.

1. Ответ: 70. Решение. Пусть X – общее число осколков. Условие задачи приводит к уравнению:

$\frac{X}{5} + 26 + n \cdot \frac{X}{7} = X$, где n – неизвестное число групп. Из условия задачи следует, что число осколков кратно 35

$$X = 35l, l \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Тогда первое уравнение можно переписать в другом виде: $7l + 26 + n \cdot 5l = 35l$. Отсюда выразим: $5n = 28 - \frac{26}{l}$. Ясно, что натуральная переменная l может принимать значения 1, 2, 13 и 26. Прямой проверкой убеждаемся, что возможен лишь единственный вариант $l = 2, n = 3$. Подставляем в (1) и получаем ответ $X = 70$.

2. Ответ: на 84%.

Обозначим радиусы шаров через R и r соответственно. Тогда первое условие означает, что

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} \cdot 100 = 1462,5 \Leftrightarrow \frac{R^3 - r^3}{r^3} = 14,625 \Leftrightarrow \frac{R^3}{r^3} = \frac{125}{8} \Leftrightarrow R = \frac{5}{2}r. \text{ Искомый}$$

процент равен:
$$\frac{4\pi R^2 - 4\pi r^2}{4\pi R^2} \cdot 100 = \frac{R^2 - r^2}{R^2} \cdot 100 = \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \cdot 100$$

$$= \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2\right) \cdot 100 = \frac{2100}{25} = 84.$$

3. Ответ: Нет.

Решение. Можно решить задачу в подвижной системе координат, связанной с Красной Шапочкой. Тогда Красная Шапочка неподвижна, а траекторией движения Волка является прямая. Кратчайшее расстояние от точки до прямой здесь равно (из соображений подобия):

$$80 \cdot \sin \alpha, \text{ при этом } \sin \alpha = \frac{3}{5}. \text{ Получается 48 м, что больше, чем 45 м.}$$

Другой способ решения: расстояние от точки пересечения до Красной Шапочки, в зависимости от времени t , равно $6t$; расстояние от точки пересечения до Волка равно $80 - 8t$.

Поэтому расстояние от Волка до Красной Шапочки по теореме Пифагора равно

$$\sqrt{36t^2 + (80 - 8t)^2} = 2\sqrt{5(5t^2 - 64t + 320)}. \text{ Минимум этой величины достигается при}$$

$$t = \frac{64}{2 \cdot 5} = \frac{32}{5}, \text{ и равен 48.}$$

4. Угол наклонной плоскости равен $\sin \alpha = (F \uparrow - F \downarrow) / (2P)$, $\cos \alpha = (F \uparrow + F \downarrow) / (2kP)$. Отсюда $k = 2/\sqrt{3}$.

5. Ответ: За 75 дней.

Решение. Пусть пруд имеет объем a (условных единиц), одна корова выпивает в день b (условных единиц), а ключи добавляют в день c (условных единиц) воды. Тогда первое условие задачи равносильно уравнению $a + 3c = 3 \cdot 17b$, а второе – уравнению $a + 30c = 30 \cdot 2b$. Отсюда получаем, что $b = 3c$, $a = 150c$. Если одна корова выпивает пруд за x дней, то получаем $a + xc = xb$, то есть $x = \frac{a}{b-c} = 75$.

6. Ответ: 75 см.

Решение. На тело, помимо силы тяжести, действует постоянная горизонтальная сила $F = m \cdot a$, направленная навстречу. В системе координат с началом в точке броска, горизонтальной осью x и вертикальной осью y закон движения имеет вид:

$$x(t) = V \cdot \cos \alpha \cdot t - \frac{at^2}{2},$$

$$y(t) = V \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Из условия известны координаты точки в момент времени τ :

$$0 = V \cdot \cos \alpha \cdot \tau - \frac{a\tau^2}{2},$$

$$-H = V \cdot \sin \alpha \cdot \tau - \frac{g\tau^2}{2}.$$

Из этой системы двух уравнений с двумя неизвестными находим ускорение, которое создает сила, действующая со стороны воздуха, и угол, под которым произведен бросок. Из второго уравнения: $\sin \alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{g\tau}{2} - \frac{H}{\tau} \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{10 \cdot 1}{2} - \frac{1}{1} \right) = \frac{4}{5}$. Поэтому $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, и из первого уравнения:

$$a = \frac{2V \cdot \cos \alpha}{\tau} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 3}{5 \cdot 1} = 6 \text{ м/с}^2.$$

Наибольшее удаление тени соответствует максимальному значению x , которое достигается при

$$t = \frac{V \cos \alpha}{a} \text{ (вершина параболы). Это значение равно } L = \frac{V^2 \cos^2 \alpha}{2a} = \frac{5^2 \cdot 3^2}{5^2 \cdot 2 \cdot 6} = \frac{3}{4} \text{ м.}$$