

**Олимпиада школьников «Ломоносов» 2016/2017 учебного года  
по механике и математическому моделированию**

**ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ**

**Отборочный этап**

**9 класс**

Во всех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). Ответом на каждую из задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления.

::1:: Гаврила занимается бегом, а Глафира — конькобежным спортом. Тренировка Глафиры длится в 1,5 раза дольше, чем тренировка Гаврилы. Если бы Гаврила бегал столько времени, сколько Глафира катается на коньках, а Глафира — столько же времени каталась, сколько Гаврила бежит, то они преодолели бы одинаковое расстояние. Во сколько раз скорость Глафиры больше, чем скорость Гаврилы? Считать, что каждый из спортсменов на тренировке передвигается с постоянной скоростью.

{= 1,5}

::2:: Первую половину пути поезд двигался со скоростью 80 км/ч, а последнюю четверть — со скоростью 40 км/ч. С какой средней скоростью двигался поезд, если остальную часть пути он двигался равномерно? Ответ дайте в километрах в час, при необходимости округлив его до сотых.

{= 60}

::3:: На покраску забора Гаврила потратил белой краски на 20% меньше, чем желтой, а зеленой краски — на 50% больше, чем белой. При этом всего израсходовано 8 кг краски. Сколько понадобилось килограммов белой и желтой краски суммарно?

{= 4,8}

::4:: На наклонной плоскости, угол наклона которой к горизонту можно менять, находится брусок. При малых углах наклона плоскости брусок покоится. При постепенном увеличении угла наклона плоскости в тот момент, когда  $\alpha = \alpha_0$ , брусок начнет двигаться. С каким наименьшим ускорением надо начать двигать наклонную плоскость по горизонтали, чтобы брусок начал двигаться относительно наклонной плоскости при угле наклона  $\alpha_1 < \alpha_0$ . Вычисления проведите при условии, что  $\operatorname{tg} \alpha_0 = 1/2$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_1 = 2/5$ . Ответ дайте в единицах системы СИ, при необходимости округлив его до сотых.

{= 0,83}

::5:: Стекланный стакан цилиндрической формы массой  $m = 200$  г и внутренним объемом  $V = 0,2$  л опускают под воду плотности  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>. После того, как стакан наполнился водой, его перевернули вверх дном и подняли из воды так, что он ровно на три четверти остался в воде. Найдите силу, которую надо прикладывать к стакану для того, чтобы удерживать его в этом положении. Ответ дайте в единицах системы СИ, при необходимости округлив его до сотых.

{= 2,5}

**Решение.**

1. Во сколько раз меньше затраченное время, во столько раз больше скорости, если путь пройден одинаковый.

Ответ: 1,5

2. Средняя скорость  $V_m$  равна отношению пройденного пути  $S$  ко всему затраченному времени:

$$V_m = \frac{S}{t_1 + t_2 + t_3} (1)$$

, где  $t_1 = \frac{S/2}{80}$  — время на первой половине пути,  $t_3 = \frac{S/4}{40}$  — время на последней четверти пути,  $t_2 = \frac{S}{4} : \frac{80+40}{2}$  — время торможения.

Подставляя все в (1), в результате получим ответ: 60 км/ч.

3. Если было израсходовано  $x$  килограмм желтой краски, то белой будет  $0,8x$ , а зеленой —  $1,2x$ . Поэтому  $3x = 8$ , и  $x = \frac{8}{3}$ . Значит, белой и желтой краски нужно  $1,8x = 4,8$  (кг).

Ответ:  $\{= 4,8\}$

4. Из условия задачи следует, что коэффициент трения между бруском и наклонной плоскостью равен  $\mu = \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{1}{2}$ .

Предположим, что наклонная плоскость движется с ускорением  $a_0$ . Тогда в системе отсчета, связанной с наклонной плоскостью, законы Ньютона не выполняются. Для того, чтобы воспользоваться законами Ньютона, следует ввести в рассмотрение фиктивную силу инерции величиной  $ma_0$ , которая направлена горизонтально в противоположную сторону от ускорения  $a_0$ .

В этом случае предельному равновесию бруска на наклонной плоскости будет соответствовать следующая система уравнений:

$$\begin{cases} N = mg \cos \alpha - ma_0 \sin \alpha \\ mg \sin \alpha + ma_0 \cos \alpha = F_r \\ F_r = \mu N \end{cases}$$

Отсюда следует ответ:

$$a = g \frac{\operatorname{tg} \alpha_0 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{g}{12} \approx 0,83$$

5. После подъема стакана весь его внутренний объем будет заполнен жидкостью (при этом давление в жидкости, находящейся выше внешнего уровня воды, будет ниже атмосферного). Если стакан и всю находящуюся в нем жидкость мысленно заменить твердым телом, то равновесие окружающей жидкости не изменится, поэтому искомая сила равна силе, с которой нужно удерживать твердый цилиндр, погруженный в воду на три четверти, масса которого равна сумме масс стакана  $m$  и помещающейся в него жидкости  $\rho V$ . Учитывая силу Архимеда, получим силу  $mg + \rho g V - \frac{3}{4} \rho g V = mg + \frac{1}{4} \rho g V = 2,5$  Н.