

**Олимпиада школьников «Ломоносов» 2016/2017 учебного года  
по механике и математическому моделированию**

**ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ**

**Отборочный этап 2**

**10-11 класс**

Во всех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). Ответом на каждую из задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления.

::1.1:: На покраску забора Гаврила потратил белой краски на 20% меньше, чем желтой, а зеленой краски — на 50% больше, чем белой. При этом всего израсходовано 16 кг краски. Сколько понадобилось килограммов зеленой краски?

$\{= 6,4\}$

::1.2:: Глафира в течение каникул выпила кваса на 20% меньше, чем лимонада, а чая — на 50% больше, чем кваса. При этом всех этих напитков было выпито 18 литров. Сколько литров кваса было выпито?

$\{= 4,8\}$

::1.3:: На покраску забора Гаврила потратил синей краски на 40% меньше, чем зеленой, а белой краски — на 50% больше, чем синей. При этом всего было израсходовано 15 кг краски. Сколько понадобилось килограммов синей краски?

$\{= 3,6\}$

::1.4:: Глафира в течение каникул выпила лимонада на 40% меньше, чем кваса, а чая — на 50% больше, чем лимонада. При этом всех этих напитков было выпито 20 литров. Сколько литров чая было выпито?

$\{= 7,2\}$

::2.1:: Лестница длиной 3 м стоит вертикально, вплотную прижатая к стене. Нижний ее конец начинают отодвигать от стены с постоянным ускорением  $1 \text{ м/с}^2$  (с нулевой начальной скоростью). С какой скоростью (в м/с) будет опускаться верхний конец лестницы через 2 секунды после начала движения? При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ:  $\{= 1,79\}$

::2.2:: Лестница длиной 3 м стоит вертикально, вплотную прижатая к стене. Нижний ее конец начинают отодвигать от стены с постоянным ускорением  $0,5 \text{ м/с}^2$  (с нулевой начальной скоростью). С какой скоростью (в м/с) будет опускаться верхний конец лестницы через 2 секунды после начала движения? При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ:  $\{= 0,35\}$

::2.3:: Лестница длиной 3 м стоит вертикально, вплотную прижатая к стене. Нижний ее конец начинают отодвигать от стены с постоянным ускорением  $0,5 \text{ м/с}^2$  (с нулевой начальной скоростью). С какой скоростью (в м/с) будет опускаться верхний конец лестницы через 3 секунды после начала движения? При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ:  $\{= 1,70\}$

::2.4:: Лестница длиной 4 м стоит вертикально, вплотную прижатая к стене. Нижний ее конец начинают отодвигать от стены с постоянным ускорением  $1 \text{ м/с}^2$  (с нулевой начальной скоростью). С какой скоростью (в м/с) будет опускаться верхний конец лестницы через 2 секунды после начала движения? При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ:  $\{= 1,15\}$

::2.5:: Лестница длиной 4 м стоит вертикально, вплотную прижатая к стене. Нижний ее конец начинают отодвигать от стены с постоянным ускорением  $0,5 \text{ м/с}^2$  (с нулевой начальной скоростью). С какой скоростью (в м/с) будет опускаться верхний конец лестницы через 2 секунды после начала движения? При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ:  $\{= 0,26\}$

::2.6:: Лестница длиной 4 м стоит вертикально, вплотную прижатая к стене. Нижний ее конец начинают отодвигать от стены с постоянным ускорением  $0,5 \text{ м/с}^2$  (с нулевой начальной скоростью). С какой скоростью (в м/с) будет опускаться верхний конец лестницы через 3 секунды после начала движения? При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ:  $\{= 1,02\}$

::3.1:: На наклонной плоскости, угол наклона которой к горизонту можно менять, находится брусок. При малых углах наклона плоскости брусок покоится. При постепенном увеличении угла наклона плоскости в тот момент, когда  $\alpha = \alpha_0$ , брусок начнет двигаться. С каким наименьшим ускорением надо начать двигать наклонную плоскость по горизонтали, чтобы брусок начал двигаться относительно наклонной плоскости при угле наклона  $\alpha_1 < \alpha_0$ . Вычисления проведите при условии, что  $\text{tg}\alpha_0 = 1/2$ ,  $\text{tg}\alpha_1 = 3/7$ . Ответ дайте в единицах системы СИ, при необходимости округлив его до сотых. Принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

$\{= 0,59\}$

::3.2:: На наклонной плоскости, угол наклона которой к горизонту можно менять, находится брусок. При малых углах наклона плоскости брусок покоится. При постепенном увеличении угла наклона плоскости в тот момент, когда  $\alpha = \alpha_0$ , брусок начнет двигаться. С каким наименьшим ускорением надо начать двигать наклонную плоскость по горизонтали, чтобы брусок начал двигаться относительно наклонной плоскости при угле наклона  $\alpha_1 < \alpha_0$ . Вычисления проведите при условии, что  $\operatorname{tg}\alpha_0 = 1/2$ ,  $\operatorname{tg}\alpha_1 = 3/8$ . Ответ дайте в единицах системы СИ, при необходимости округлив его до сотых. Принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

$$\{= 1,05\}$$

::3.3:: На наклонной плоскости, угол наклона которой к горизонту можно менять, находится брусок. При малых углах наклона плоскости брусок покоится. При постепенном увеличении угла наклона плоскости в тот момент, когда  $\alpha = \alpha_0$ , брусок начнет двигаться. С каким наименьшим ускорением надо начать двигать наклонную плоскость по горизонтали, чтобы брусок начал двигаться относительно наклонной плоскости при угле наклона  $\alpha_1 < \alpha_0$ . Вычисления проведите при условии, что  $\operatorname{tg}\alpha_0 = 1/2$ ,  $\operatorname{tg}\alpha_1 = 2/5$ . Ответ дайте в единицах системы СИ, при необходимости округлив его до сотых. Принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

$$\{= 0,83\}$$

::3.4:: На наклонной плоскости, угол наклона которой к горизонту можно менять, находится брусок. При малых углах наклона плоскости брусок покоится. При постепенном увеличении угла наклона плоскости в тот момент, когда  $\alpha = \alpha_0$ , брусок начнет двигаться. С каким наименьшим ускорением надо начать двигать наклонную плоскость по горизонтали, чтобы брусок начал двигаться относительно наклонной плоскости при угле наклона  $\alpha_1 < \alpha_0$ . Вычисления проведите при условии, что  $\operatorname{tg}\alpha_0 = 1/2$ ,  $\operatorname{tg}\alpha_1 = 1/3$ . Ответ дайте в единицах системы СИ, при необходимости округлив его до сотых. Принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

$$\{= 1,43\}$$

::3.5:: На наклонной плоскости, угол наклона которой к горизонту можно менять, находится брусок. При малых углах наклона плоскости брусок покоится. При постепенном увеличении угла наклона плоскости в тот момент, когда  $\alpha = \alpha_0$ , брусок начнет двигаться. С каким наименьшим ускорением надо начать двигать наклонную плоскость по горизонтали, чтобы брусок начал двигаться относительно наклонной плоскости при угле наклона  $\alpha_1 < \alpha_0$ . Вычисления проведите при условии, что  $\operatorname{tg}\alpha_0 = 2/3$ ,  $\operatorname{tg}\alpha_1 = 1/2$ . Ответ дайте в единицах системы СИ, при необходимости округлив его до сотых. Принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

$$\{= 1,25\}$$

::3.6:: На наклонной плоскости, угол наклона которой к горизонту можно менять, находится брусок. При малых углах наклона плоскости брусок покоится. При постепенном увеличении угла наклона плоскости в тот момент, когда  $\alpha = \alpha_0$ , брусок начнет двигаться. С каким наименьшим ускорением надо начать двигать наклонную плоскость по горизонтали, чтобы брусок начал двигаться относительно наклонной плоскости при угле наклона  $\alpha_1 < \alpha_0$ . Вычисления проведите при условии, что  $\operatorname{tg}\alpha_0 = 3/5$ ,  $\operatorname{tg}\alpha_1 = 1/2$ . Ответ дайте в единицах системы СИ, при необходимости округлив его до сотых. Принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

$$\{= 0,77\}$$

::3.7:: На наклонной плоскости, угол наклона которой к горизонту можно менять, находится брусок. При малых углах наклона плоскости брусок покоится. При постепенном увеличении угла наклона плоскости в тот момент, когда  $\alpha = \alpha_0$ , брусок начнет двигаться. С каким наименьшим ускорением надо начать двигать наклонную плоскость

по горизонтали, чтобы брусок начал двигаться относительно наклонной плоскости при угле наклона  $\alpha_1 < \alpha_0$ . Вычисления проведите при условии, что  $\operatorname{tg}\alpha_0 = 4/7$ ,  $\operatorname{tg}\alpha_1 = 1/2$ . Ответ дайте в единицах системы СИ, при необходимости округлив его до сотых. Принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

{= 0,56}

::3.8:: На наклонной плоскости, угол наклона которой к горизонту можно менять, находится брусок. При малых углах наклона плоскости брусок покоится. При постепенном увеличении угла наклона плоскости в тот момент, когда  $\alpha = \alpha_0$ , брусок начнет двигаться. С каким наименьшим ускорением надо начать двигать наклонную плоскость по горизонтали, чтобы брусок начал двигаться относительно наклонной плоскости при угле наклона  $\alpha_1 < \alpha_0$ . Вычисления проведите при условии, что  $\operatorname{tg}\alpha_0 = 5/8$ ,  $\operatorname{tg}\alpha_1 = 1/2$ . Ответ дайте в единицах системы СИ, при необходимости округлив его до сотых. Принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

{= 0,48}

::4.1:: Из города Энска в деревню Безымянная вниз по течению реки отправился плот. Через 50 минут вслед за ним вышел скоростной катер, который через 10 минут обогнал плот, дошел до деревни, мгновенно развернулся и поплыл обратно, снова встретив плот ровно через 1 час после обгона. Сколько минут займет у плота путь от Энска до Безымянной?

{= 240}

::4.2:: Из города Энска в деревню Безымянная вниз по течению реки отправился плот. Через 40 минут вслед за ним вышла моторная лодка, которая через 20 минут обогнала плот, дошла до деревни, мгновенно развернулась и поплыла обратно, снова встретив плот ровно через 1 час после обгона. Сколько минут займет у плота путь от Энска до Безымянной?

{=150}

::4.3:: Из города Энска в деревню Безымянная вниз по течению реки отправился плот. Через 40 минут вслед за ним вышел скоростной катер, который через 10 минут обогнал плот, дошел до деревни, мгновенно развернулся и поплыл обратно, снова встретив плот ровно через 1 час после обгона. Сколько минут займет у плота путь от Энска до Безымянной?

{=200}

::4.4:: Из города Энска в деревню Безымянная вниз по течению реки отправился плот. Через 1 час вслед за ним вышла моторная лодка, которая через 30 минут обогнала плот, дошла до деревни, мгновенно развернулась и поплыла обратно, снова встретив плот через 50 минут после обгона. Сколько минут займет у плота путь от Энска до Безымянной?

{=165}

::5.1:: Стекланный стакан цилиндрической формы массой  $m = 200 \text{ г}$  и внутренним объемом  $V = 0,2 \text{ л}$  опускают под воду плотности  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ . После того, как стакан наполнился водой, его перевернули вверх дном и подняли из воды так, что он ровно на половину остался в воде. Найти силу (в ньютонах), которую надо прикладывать к стакану для того, чтобы удерживать его в этом положении. Толщиной стенок стакана пренебречь; принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

{= 3}

::5.2:: Стекланный стакан цилиндрической формы массой  $m = 200 \text{ г}$  и внутренним объемом  $V = 0,2 \text{ л}$  опускают под воду плотности  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ . После того, как стакан

наполнился водой, его перевернули вверх дном и подняли из воды так, что он ровно на три четверти остался в воде. Найти силу (в ньютонах), которую надо прикладывать к стакану для того, чтобы удерживать его в этом положении. Толщиной стенок стакана пренебречь; принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

{= 2,5}

::5.3:: Стекланный стакан цилиндрической формы массой  $m = 200 \text{ г}$  и внутренним объемом  $V = 0,2 \text{ л}$  опускают под воду плотности  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ . После того, как стакан наполнился водой, его перевернули вверх дном и подняли из воды так, что он ровно на четверть остался в воде. Найти силу (в ньютонах), которую надо прикладывать к стакану для того, чтобы удерживать его в этом положении. Толщиной стенок стакана пренебречь; принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

{= 3,5}

::5.4:: Стекланный стакан цилиндрической формы массой  $m = 200 \text{ г}$  и внутренним объемом  $V = 0,2 \text{ л}$  опускают под воду плотности  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ . После того, как стакан наполнился водой, его перевернули вверх дном и подняли из воды так, что он ровно на две пятых остался в воде. Найти силу (в ньютонах), которую надо прикладывать к стакану для того, чтобы удерживать его в этом положении. Толщиной стенок стакана пренебречь; принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

{= 3,2}

::5.5:: Стекланный стакан цилиндрической формы массой  $m = 250 \text{ г}$  и внутренним объемом  $V = 0,25 \text{ л}$  опускают под воду плотности  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ . После того, как стакан наполнился водой, его перевернули вверх дном и подняли из воды так, что он ровно на две пятых остался в воде. Найти силу (в ньютонах), которую надо прикладывать к стакану для того, чтобы удерживать его в этом положении. Толщиной стенок стакана пренебречь; принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

{= 4}

::5.6:: Стекланный стакан цилиндрической формы массой  $m = 250 \text{ г}$  и внутренним объемом  $V = 0,25 \text{ л}$  опускают под воду плотности  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ . После того, как стакан наполнился водой, его перевернули вверх дном и подняли из воды так, что он ровно на три пятых остался в воде. Найти силу (в ньютонах), которую надо прикладывать к стакану для того, чтобы удерживать его в этом положении. Толщиной стенок стакана пренебречь; принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

{= 3,5}

::5.7:: Стекланный стакан цилиндрической формы массой  $m = 250 \text{ г}$  и внутренним объемом  $V = 0,25 \text{ л}$  опускают под воду плотности  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ . После того, как стакан наполнился водой, его перевернули вверх дном и подняли из воды так, что он ровно на одну пятую остался в воде. Найти силу (в ньютонах), которую надо прикладывать к стакану для того, чтобы удерживать его в этом положении. Толщиной стенок стакана пренебречь; принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

{= 4,5}

::5.8:: Стекланный стакан цилиндрической формы массой  $m = 250 \text{ г}$  и внутренним объемом  $V = 0,25 \text{ л}$  опускают под воду плотности  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ . После того, как стакан наполнился водой, его перевернули вверх дном и подняли из воды так, что он ровно на четыре пятых остался в воде. Найти силу (в ньютонах), которую надо прикладывать к стакану для того, чтобы удерживать его в этом положении. Толщиной стенок стакана пренебречь; принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

{= 3}

### Решение.

1. Если было израсходовано  $x$  килограмм желтой краски, то белой будет  $0,8x$ , а зеленой —  $1,2x$ . Поэтому  $3x = 16$ , и  $x = \frac{16}{3}$ . Значит, зеленой краски нужно  $1,2x = 6,4$  (кг).

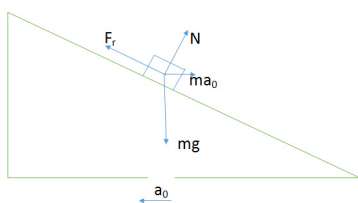
Ответ:  $\{= 6,4\}$

2. Через время  $\tau$  нижний конец лестницы отойдет от угла расстояние  $x = a\tau^2/2$  и приобретет скорость  $v_1 = a\tau$ . При этом лестница будет наклонена под углом  $\alpha$  к вертикали:  $\sin \alpha = a\tau^2/(2l)$ . Так как длина лестницы неизменна, проекции скоростей ее концов на направление лестницы одинаковы. Обозначая скорость верхнего конца через  $v_2$ , получаем  $v_1 \sin \alpha = v_2 \cos \alpha$ , откуда

$$v_2 = v_1 \tan \alpha = \frac{a^2 \tau^3}{\sqrt{4l^2 - a^2 \tau^4}}.$$

Ответ:  $a^2 \tau^3 / \sqrt{4l^2 - a^2 \tau^4}$

3. Из условия задачи следует, что коэффициент трения между бруском и наклонной



плоскостью равен  $\mu = \tan \alpha_0 = \frac{1}{2}$ .

Предположим, что наклонная плоскость движется с ускорением  $a_0$ . Тогда в системе отсчета, связанной с наклонной плоскостью, законы Ньютона не выполняются. Для того, чтобы воспользоваться законами Ньютона, следует ввести в рассмотрение фиктивную силу инерции величиной  $ma_0$ , которая направлена горизонтально в противоположную сторону от ускорения  $a_0$ .

В этом случае предельному равновесию бруска на наклонной плоскости будет соответствовать следующая система уравнений:

$$\begin{cases} N = mg \cos \alpha - ma_0 \sin \alpha \\ mg \sin \alpha + ma_0 \cos \alpha = F_r \\ F_r = \mu N \end{cases}$$

Отсюда следует ответ:

$$a = g \frac{\tan \alpha_0 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_0 \cdot \tan \alpha_1} = \frac{g}{12} \approx 0,83$$

4. Если ввести неизвестные и составить систему уравнений, получается система, в которой количество неизвестных больше, чем количество уравнений. Её решение довольно громоздко. Поэтому лучше рассуждать иначе. Катер относительно плота движется с одной и той же скоростью, поэтому 1 час от момента обгона плота до момента встречи с плотом разделится поровну: 30 минут катер плыл от плота до деревни и 30 минут — от деревни к плоту. Значит, катер потратил на путь от Энска до Безымянной минут. Если катер потратил на путь от старта до обгона плота 10 минут, а плот на этот же путь потратил  $50 + 10 = 60$  минут, то скорость катера по течению в 6 раз больше скорости плота. Значит, плот потратит на путь от Энска до Безымянной в 6 раз больше времени, то есть 240 минут.

5. После подъема стакана весь его внутренний объем будет заполнен жидкостью (при этом давление в жидкости, находящейся выше внешнего уровня воды, будет ниже атмосферного). Если стакан и всю находящуюся в нем жидкость мысленно заменить твердым телом, то равновесие окружающей жидкости не изменится, поэтому искомая

сила равна силе, с которой нужно удерживать твердый цилиндр, погруженный в воду на три четверти, масса которого равна сумме масс стакана  $m$  и помещающейся в него жидкости  $\rho V$ . Учитывая силу Архимеда, получим силу  $mg + \rho g V - \frac{3}{4}\rho g V = mg + \frac{1}{4}\rho g V$ .