

Задания для заочного тура олимпиады «Ломоносов» по робототехнике – 2016

10—11 классы (1 тур)

1. Учитель задал на уроке замысловатую задачу. В результате, количество мальчиков, решивших эту задачу, оказалось равным количеству девочек, не решивших эту задачу. Кого в классе больше – решивших эту задачу или девочек?

Решение.

Разобьем класс по признаку

«мальчик—девочка» и «решивший задачу – не решивший задачу».

Мальчики, решившие задачу	Девочки, решившие задачу
Мальчики, не решившие задачу	Девочки, не решившие задачу

Количество девочек = Девочки, решившие задачу + Девочки, не решившие задачу =
= Девочки, решившие задачу + Мальчики, решившие задачу =
= Количество решивших задачу.

Как видно, количество девочек совпадает с количеством решивших задачу.

2. В каждой клетке таблицы 3х3 стоит одно из трех чисел: -1, 0, 1. Докажите, что если посчитать суммы чисел в каждом столбце, в каждой строке и на каждой из больших диагоналей (то есть диагоналей, соединяющих угловые клетки), то хотя бы две из этих сумм окажутся равны.

Решение.

Максимальная сумма равна {3}, а минимальная – {-3}. Суммы могут принимать значения:
 $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Всего сумм 8: три – по вертикали, три – по горизонтали и две – по диагоналям. Так как значений, которые могут принимать эти суммы всего 7, то две из них будут совпадать.

3. Жильцы всех квартир, выходящих на одну лестничную клетку, решили прикрепить к своим дверям новые номера квартир. Кооператив, в который они обратились с просьбой изготовить необходимые 7 цифр, объявил, что он берет за изготовление каждой цифры столько рублей, какова эта цифра (нули изготавливаются бесплатно). Жильцы собрали по 3 рубля с квартиры, и им этого хватило. Какие цифры были заказаны?

Решение.

Рассмотрим вариант, при котором квартиры имеют однозначные номера, тогда их семь штук, и стоимость номерков составила $7 \times 3 = 21$ рубль. Номер первой квартиры на лестничной клетке либо 1, либо 2, либо 3. В любом из этих трёх вариантов, жильцы квартир с номерами $\{3, 4, 5, 6, 7\}$

участвуют в покупке. Но стоимость номерков для этих пяти квартир составляет 25 рублей, что превышает 21 рубль. Таким образом такой вариант невозможен.

Вариант только с двузначными квартирами и вариант только с трехзначными квартирами невозможен потому, что в них требуется четное число номерков, а по условию задачи номерков семь. Значит в номерах квартир происходит переход разряда.

Вариант {99, 100, 101} не подходит – для него нужно восемь цифр.

Вариант {98, 99, 100} не подходит, так как стоимость номерков по минимуму составит 27 рублей. Здесь нужно заметить, что цифры 6 и 9 отличаются поворотом на 180° , поэтому для квартиры, в номер которой входит цифра 9, дешевле покупать цифру 6.

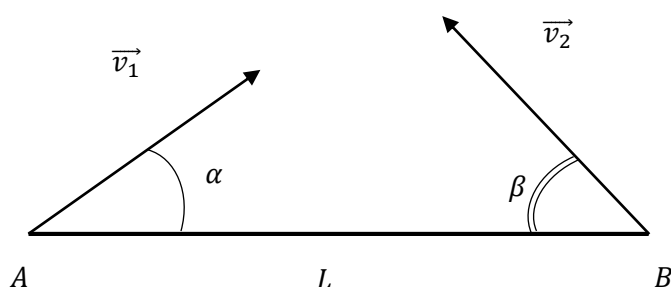
Рассмотрим варианты, при которых первая квартира на лестничной клетке имеет однозначный номер. Заметим, что когда этот номер четный, на однозначные квартиры потребуется четное число цифр.

Вариант {5, 6, 7, 8, 9, 10} – первые четыре цифры уже в сумме превосходят $6 \times 3 = 18$.

Вариант {7, 8, 9, 10, 11} – обойдется либо в 24 рубля (цифру 9 купили как 6), либо в 27 рублей, что больше $5 \times 3 = 15$.

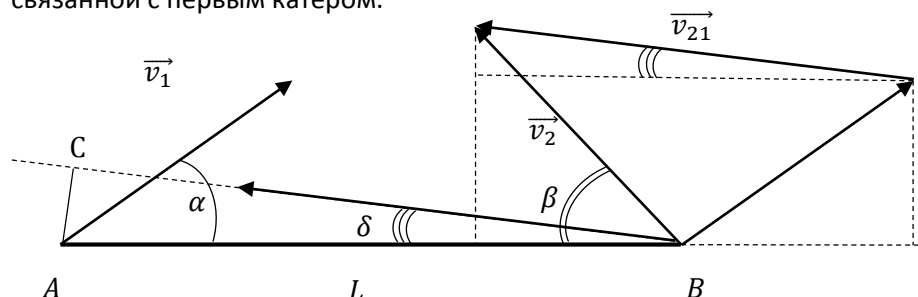
Вариант {9, 10, 11, 12} – обойдется в 12 рублей (цифру 9 купили как 6), как раз по 3 рубля с четырёх квартир.

4. Из двух портов **A** и **B**, расстояние между которыми равно L , одновременно выходят два катера, один из которых плывет со скоростью \vec{v}_1 , а второй – со скоростью \vec{v}_2 . Направление движения первого катера составляет с линией **AB** угол α , а второго – угол β . Каким будет наименьшее расстояние S между катерами?



Решение.

Рассмотрим движение второго катера в подвижной относительно Земли системе координат, связанной с первым катером.



В этой системе координат скорость второго относительно первого будет равна \vec{v}_{21} . Модуль этой скорости равен

$$v_{21} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos(\alpha + \beta)}.$$

Минимальное расстояние между катерами равно длине перпендикуляра **AC**, опущенного из точки **A** на траекторию второго катера:

$$AC = L \sin \delta,$$

где

$$\sin \delta = \frac{|v_2 \sin \beta - v_1 \sin \alpha|}{v_{21}}.$$

Ответ:

$$S = \frac{L|v_2 \sin \beta - v_1 \sin \alpha|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos(\alpha + \beta)}}.$$