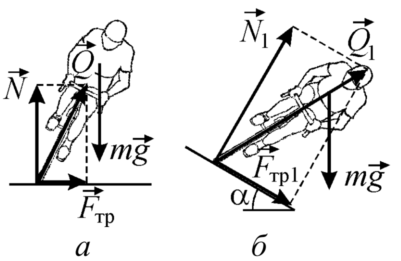
Олимпиада «Ломоносов 2016 – 2017» по физике
Отборочный этап, первый тур
Решения задач для 10-х – 11-х классов

Тест. Пусть S расстояние, пройденное пассажиром за время t_0, в течение которого поезд будет его догонять. Обозначим ускорение поезда через a. Тогда для пассажира имеем $S = vt_0$, для поезда $S = \frac{at_0^2}{2}$ и $u = at_0$. Исключая из записанных выражений время t_0, находим, что $u = 2v$.
Ответ: $u = 2v$.

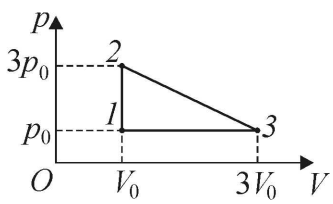
1. Каждая из звезд движется под действием гравитационного притяжения к другой звезде. Пусть v – скорость движения звезды по орбите. По второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения для каждой из звезд имеем: $\frac{Mv^2}{R} = G\frac{M^2}{4R^2}$. Учитывая, что $T = \frac{2\pi R}{v}$, получаем, что $M = \frac{16\pi^2 R^3}{GT^2}$. **Ответ:** $M = \frac{16\pi^2 R^3}{GT^2}$.

2. Рассмотрим вначале движение велосипедиста на треке с горизонтально расположенным дорожным полотном. Силы, действующих на велосипедиста в этом случае, изображены на рис. *а*,



где $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{Q}$ – сила реакции дорожного полотна, которую удобно разложить на две составляющие: нормальную к полотну силу $\vec{N}$ и касательную к полотну силу трения покоя $\vec{F}_{тр}$. Учитывая, что $F_{тр} \le \mu N$, по второму закону Ньютона в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления имеем $\frac{mv^2}{R} = \mu N$, $N - mg = 0$. Отсюда получаем связь между коэффициентом трения μ и максимально возможной скоростью v прохождения поворота на горизонтальном дорожном полотне, а именно, $\mu = \frac{v^2}{Rg}$. Силы, действующие на велосипедиста на треке с наклоненным дорожным полотном, изображены на рис. *б*. Применяя вновь второй закон Ньютона, имеем: $\frac{mu^2}{R} = N_1 \sin\alpha + \mu N_1 \cos\alpha$, $N_1 \cos\alpha - \mu N_1 \sin\alpha - mg = 0$. Исключая из этих уравнений N_1 и подставляя ранее найденное значение μ, находим, что $u = \sqrt{\frac{(Rg\,\mathrm{tg}\,\alpha + v^2)Rg}{Rg - v^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}}$. **Ответ.** $u = \sqrt{\frac{(Rg\,\mathrm{tg}\,\alpha + v^2)Rg}{Rg - v^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}}$.

3. Внутренняя энергия идеального одноатомного газа, которым является аргон, равна $U = \frac{3}{2}pV$. Поэтому в рассматриваемом цикле участок *1 – 2* – изохора, причём $p_2 = 3p_0$, где p_0 – исходное

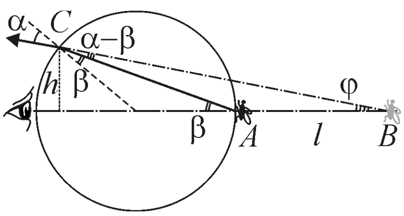


давление газа. На участке *2 – 3* внутренняя энергия аргона меняется с объемом по закону $U(V) = U_0\left(4\frac{V}{V_0} - \frac{V^2}{V_0^2}\right)$, а давление аргона на этом отрезке $p = p_0\left(4 - \frac{V}{V_0}\right)$, т.е. линейно уменьшается от $p_2 = 3p_0$ до $p_3 = p_0$

при расширении газа от $V_2 = V_0$ до $V_3 = 3V_0$. Участок *3 – 1* – изобарное сжатие газа до исходных параметров. Таким образом, в координатах $p – V$ цикл имеет вид прямоугольного треугольника и работу газа можно найти, вычислив его площадь: $A = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_3 - V_1) = \frac{1}{2} \cdot 2p_0 \cdot 2V_0 = 2p_0V_0$. Так как $p_0V_0 = \nu RT_0$, то $p_0V_0 = \frac{2}{3}U_0$ и в итоге получаем, что исходная внутренняя энергия газа: $U_0 = \frac{3}{2}p_0V_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}A = \frac{3}{4}A$. **Ответ:** $U_0 = \frac{3}{4}A$.

4. На бусинку будет действовать вихревое электрическое поле, напряженность E которого направлена по касательной к кольцу. По закону электромагнитной индукции $|\mathcal{E}| = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}$, где $\mathcal{E} = E \cdot 2\pi R$ – ЭДС индукции, Δt – время изменения магнитного потока, а $|\Delta\Phi| = \Phi$. Пусть Δr – модуль перемещения бусинки вдоль кольца за время Δt. Тогда работа вихревого поля E по перемещению бусинки $\Delta A = \frac{\Delta r}{2\pi R}A$, где $A = q \cdot |\mathcal{E}|$ – работа, которая совершается при обходе бусинкой всего кольца. Кинетическая энергия бусинки равна работе действующих на нее сил. Следовательно, $\frac{mv^2}{2} = \Delta A$. Поскольку модуль тангенциального ускорения бусинки постоянен, ее перемещение и скорость связаны соотношением $\Delta r = \frac{1}{2}v \cdot \Delta t$. Имеем равенства $\frac{mv^2}{2} = \frac{\Delta r}{2\pi R} q \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{q}{2\pi R}\Phi \cdot \frac{1}{2}v$, откуда $v = \frac{q}{m} \cdot \frac{\Phi}{2\pi R}$. **Ответ:** $v = \frac{q}{m} \cdot \frac{\Phi}{2\pi R}$.

5. На рисунке показан ход одного из лучей, идущих от мухи (точка *A*) в точку *C* и далее в воздух.



Школьнику кажется, что муха находится в точке *B* и, следовательно, поверхность шара, на которой сидит муха, удалена от передней его поверхности на расстояние $L = 2R + l$, где R – радиус шара. Поэтому шар кажется школьнику больше, чем на самом деле, в $k = \frac{L}{2R}$ раз. Поскольку размер шара много больше диаметра зрачка человеческого глаза, углы падения и преломления всех лучей, попадающих в зрачок, являются малыми. Следовательно, по закону преломления $\alpha \approx n\beta$. Кроме того, $h \approx 2R \cdot \beta \approx L \cdot \varphi$. Сумма углов в треугольнике *ABC* равна $\varphi + (\alpha - \beta) + (\pi - \beta) = \pi$, отсюда следует, что $\varphi = 2\beta - \alpha$. Из записанных равенств находим, что $k = \frac{1}{2 - n}$, откуда $n = 2 - \frac{1}{k}$.

Ответ: $n = 2 - \frac{1}{k}$.

Олимпиада «Ломоносов 2016 – 2017» по физике
Отборочный этап, второй тур
Решения задач для 10-х – 11-х классов

Тест. Из известного кинематического соотношения $\frac{v_B^2 - v_A^2}{2g} = h$ находим, что $v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh}$.

Ответ: $v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh}$.

1. Масса планеты $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$. Из уравнения движения тела массой m по круговой орбите радиуса R, а именно $\frac{mv_{1к}^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$, следует, что первая космическая скорость $v_{1к} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$.

Ответ: $v_{1к} = 2R\sqrt{\frac{G\pi\rho}{3}}$.

2. Поскольку массы шайб одинаковы, из законов сохранения импульса и механической энергии следуют выражения: $\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{v}_0^2 = \vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2$. Возведя в квадрат первое соотношение и сравнивая его со вторым, получаем, что скалярное произведение $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$. Поэтому угол между векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ прямой; следовательно, расстояние между шайбами после удара $L = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$, где l_1 и l_2 – расстояния, пройденные первой и второй шайбами после столкновения. Кинетическая энергия первой шайбы расходуется на работу против сил трения: $\frac{mv_0^2}{2} = \mu mg(l_1 + l_2)$. Отсюда получаем, что $l_2 = \frac{v_0^2}{2\mu g} - l_1$. В итоге приходим к искомой величине $L = \sqrt{l_1^2 + \left(\frac{v_0^2}{2\mu g} - l_1\right)^2}$.

Ответ: $L = l_1\sqrt{1 + \left(\frac{v_0^2}{2\mu g l_1} - 1\right)^2}$.

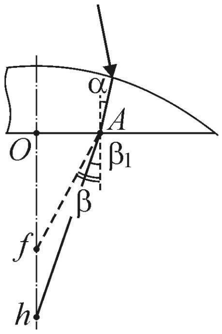
3. Запишем уравнение теплового баланса для первого переливания воды из горячего сосуда в холодный: $cm(t_3 - t_1) = c\Delta m(t_2 - t_3)$, где t_3 – установившаяся температура воды в первом сосуде, c – удельная теплоёмкость воды. Следовательно, $t_3 = \frac{mt_1 + \Delta m t_2}{m + \Delta m} = \frac{nt_2 + t_1}{n + 1}$, где $n = \frac{\Delta m}{m}$. Запишем уравнение теплового баланса для переливания воды обратно, и найдём t_4 – температуру воды во втором сосуде после перемешивания. Имеем $c(m - \Delta m)(t_2 - t_4) = c\Delta m(t_4 - t_3)$, откуда $t_4 = \frac{(m - \Delta m)t_2 + \Delta m t_3}{m} = nt_3 + (1 - n)t_2 = \frac{nt_1 + t_2}{n + 1}$. После первого переливания воды «туда–обратно» разность температур в сосудах будет равна $\Delta t_1 = t_4 - t_3 = (t_2 - t_1)\frac{1 - n}{1 + n}$. Аналогично, после второго переливания разность температур в сосудах станет равной:

$\Delta t_2 = t_6 - t_5 = (t_4 - t_3)\dfrac{1-n}{1+n} = (t_2 - t_1)\left(\dfrac{1-n}{1+n}\right)^2$. После трех таких переливаний разность температур $\Delta t = (t_2 - t_1)\left(\dfrac{1-n}{1+n}\right)^3 = (t_2 - t_1)\left(\dfrac{m-\Delta m}{m+\Delta m}\right)^3$. **Ответ:** $\Delta t = (t_2 - t_1)\left(\dfrac{m-\Delta m}{m+\Delta m}\right)^3$.

4. Пусть площадь обкладки конденсатора равна S, а расстояние между обкладками равно d. Емкость такого конденсатора $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$, где ε_0 –электрическая постоянная. Поэтому заряд конденсатора без пластины равен $q_0 = C_0 U = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d} U$, где U – напряжение источника. Конденсатор с вставленной пластиной эквивалентен двум параллельно соединённым конденсаторам с ёмкостями $C_1 = \dfrac{2\varepsilon_0 S}{dn}$ и $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 S(n-1)}{dn}$. Поэтому его ёмкость равна $C = C_1 + C_2 = \dfrac{2\varepsilon_0 S}{dn} + \dfrac{\varepsilon_0 S(n-1)}{dn} = \dfrac{\varepsilon_0 S(n+1)}{dn}$, а заряд равен $q = CU = \dfrac{\varepsilon_0 S(n+1)}{dn} U$. Следовательно, искомое отношение $k = \dfrac{q}{q_0} = \dfrac{n+1}{n}$.

Ответ: $k = \dfrac{n+1}{n}$.

5. Пусть α – угол падения на плоскую поверхность линзы одного из лучей, испытавших преломление на ее выпуклой поверхности, β – угол преломления этого луча на границе "стекло – воздух", а β_1 – угол преломления этого луча на границе "стекло – вода" (см. рисунок). По закону преломления, учитывая малость углов α, β и β_1, имеем: $n_{\text{ст}}\alpha = \beta$, $n_{\text{ст}}\alpha = n\beta_1$, где $n_{\text{ст}}$ – показатель преломления стекла. Отсюда $\dfrac{\beta}{\beta_1} = n$. Из рисунка видно, что $\operatorname{tg}\beta \approx \beta \approx \dfrac{OA}{Of}$, $\operatorname{tg}\beta_1 \approx \beta_1 \approx \dfrac{OA}{Oh}$. Отсюда $Oh = Of\dfrac{\beta}{\beta_1}$. Следовательно, расстояние h от линзы до изображения в воде связано с расстоянием f от линзы до изображения в воздухе соотношением $h = nf$. Из формулы линзы следует, что $f = \dfrac{F \cdot d}{d - F}$. **Ответ:** $h = \dfrac{n \cdot F \cdot d}{d - F}$.



Олимпиада «Ломоносов 2016 – 2017» по физике
Отборочный этап
Решения задач для 7-х – 9-х классов

Тест. По закону Архимеда условия плавания теплохода имеют вид: $mg = \rho_1 gV$ (в морской воде) и $(m-\Delta m)g = \rho_2 gV$ (в речной воде). В этих формулах V – не меняющийся объём погруженной части теплохода, а Δm – искомая масса груза, который с теплохода надо снять. Разделив одну формулу на другую, найдем, что $\Delta m = m\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$. **Ответ:** $\Delta m = m\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$.

1. Составляющие начальной скорости мяча по горизонтали (ось OX) и по вертикали (ось OY) и полной начальной скорости мяча находим из соотношений: $v_{0x} = \frac{l}{\tau}$, $v_{0y} = \frac{g\tau}{2}$, $v_0 = \sqrt{\left(\frac{l}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{g\tau}{2}\right)^2}$. Дальность полета мяча при той же начальной скорости будет максимальной, если начальную скорость мяча направить под углом 45° к горизонту. При этом $L = \frac{v_0^2}{g}$.

Ответ: $L = \frac{1}{g}\cdot\left[\left(\frac{l}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{g\tau}{2}\right)^2\right]$.

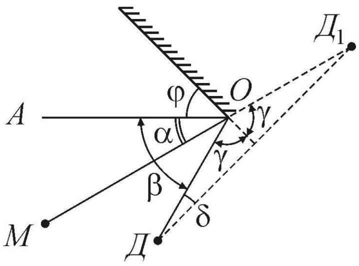
2. Обозначим через v_0 такое значение начальной скорости шайбы, при котором она, пройдя путь до уступа и обратно, будет двигаться вместе с доской, находясь на самом ее краю. Из закона сохранения импульса следует $mv_0 = (M+m)v_x$. Так как в системе действует сила трения между шайбой и доской, кинетическая энергия системы не сохраняется. Ее изменение $\Delta E = \frac{(M+m)v_x^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{\text{тр}}$, где $A_{\text{тр}}$ – работа силы трения. Эта величина определяется произведением силы трения скольжения $F = \mu mg$ на путь шайбы относительно доски $S = 2l$. Учитывая, что сила трения направлена всегда против относительного перемещения трущихся поверхностей, можно записать, что $A_{\text{тр}} = -2\mu mgl$. Объединяя записанные равенства, находим $v_0 = 2\sqrt{\mu gl\left(1+\frac{m}{M}\right)}$. В силу определения скорости v_0 она равна искомой скорости $v_{\max}$.

Ответ: $v_{\max} = 2\sqrt{\mu gl\left(1+\frac{m}{M}\right)}$.

3. Пусть $m = m_{\text{л}} + m_{\text{в}}$ – масса снега в стакане, где $m_{\text{л}}$ − масса льда, а $m_{\text{в}}$ − масса воды. По условию $m_{\text{л}} = km_{\text{в}}$, где k – искомое отношение, выраженное в долях единицы. Тогда $m = (k+1)m_{\text{в}}$. Уравнение теплового баланса имеет вид: $k\cdot m_{\text{в}}\cdot\lambda + (\kappa+1)\cdot m_{\text{в}}\cdot c_{\text{в}}\cdot(t_2-t_0) = (\kappa+1)\cdot m_{\text{в}}\cdot c_{\text{в}}\cdot(t_1-t_2)$. Отсюда $k = \frac{c_{\text{в}}(t_1-2t_2+t_0)}{\lambda - c_{\text{в}}(t_1-2t_2+t_0)}$. **Ответ:** $k = \frac{c_{\text{в}}(t_1-2t_2+t_0)}{\lambda - c_{\text{в}}(t_1-2t_2+t_0)}\cdot 100\%$.

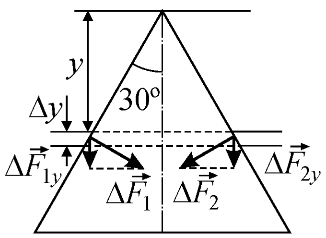
4. Обозначим через I_1 силу тока через резистор, а через I_2 силу тока через вольтметр. Тогда $I_1R = U$, $I_2r = U$, $I_1 + I_2 = I$. Отсюда $R = \frac{Ur}{Ir - U}$. **Ответ:** $R = \frac{Ur}{Ir - U}$.

5. Построение изображения $Д_1$ девочки $Д$ в повернутом зеркале представлено на рисунке. Ясно, что предельный угол поворота зеркала, при котором мальчик еще видит изображение девочки, соответствует случаю, когда точки M, O и $Д_1$ лежат на одной прямой. Используя обозначения для углов, приведенные на рисунке, имеем следующие равенства: $\varphi + \beta + \gamma = \pi$, $\beta - \alpha = 2\delta$, $2\gamma + 2\delta = \pi$. Из этих равенств находим, что $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}$.



Ответ: $\varphi = 90° - \frac{\alpha + \beta}{2}$.

6. Пусть длина балки b, а длина ребра ее основания a. Тогда объем балки $V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2b$, а ее вес в воздухе $P = \rho Vg = \frac{\sqrt{3}}{4}\rho a^2bg$, где ρ – плотность бетона. Для расчета силы давления воды на балку выделим тонкий слой воды толщиной Δy, находящийся на глубине y. Площадь боковой поверхности балки, соответствующая толщине этого слоя, $\Delta S = \frac{b\Delta y}{\cos 30°} = \frac{2b\Delta y}{\sqrt{3}}$.



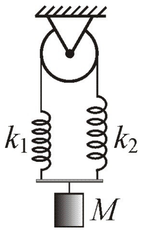
Гидростатическое давление воды на глубине y равно $p(y) = \rho_0 gy$. Поэтому модуль силы давления воды, действующей со стороны выделенного слоя на каждую из боковых поверхностей балки, $\Delta F_1 = \Delta F_2 = p\Delta S = \frac{2\rho_0 by\Delta yg}{\sqrt{3}}$. Векторная сумма $\Delta\vec{F} = \Delta\vec{F}_1 + \Delta\vec{F}_2$ направлена вертикально вниз и по модулю равна $\Delta F(y) = 2\Delta F_1 \sin 30° = f(y)\Delta y$, где $f(y) = \frac{2\rho bg}{\sqrt{3}}y$. Поскольку $f(y)$ зависит от y линейно, полная сила, действующая на боковые поверхности балки со стороны столба воды высотой $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, равна $F = \frac{1}{2}(f(0) + f(h))h = \frac{\sqrt{3}}{4}\rho_0 a^2bg$. По условию $F = \frac{n}{100\%}P$. Подставляя сюда найденные выражения для F и P, получаем, что $\rho = \frac{100\%}{n}\rho_0$.

Ответ: $\rho = \frac{100\%}{n}\rho_0$.

Решения заключительного этапа Олимпиады школьников «Ломоносов» по ФИЗИКЕ
10 - 11 класс

Вариант 1

1.10.1. Сформулируйте закон Гука. Чему равна потенциальная энергия упруго деформированной пружины?

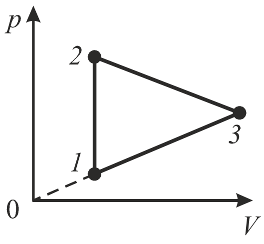


Задача. В устройстве, показанном на рисунке, груз массой $M = 0{,}2$ кг подвешен к середине стержня, а стержень расположен горизонтально. Блок, нить, пружины и стержень невесомы, нить нерастяжима. Коэффициенты жёсткости пружин $k_1 = 30$ Н/м, $k_2 = 20$ Н/м. Стержень смещают вертикально вниз на небольшое расстояние и отпускают. Определите период T возникших после этого малых вертикальных колебаний груза. Считайте, что стержень остаётся в процессе колебаний всё время горизонтальным.

1.10.1. Решение. В положении равновесия сила упругости, возникающая в каждой из пружин, равна $\frac{Mg}{2}$. Поэтому удлинения пружин в положении равновесия $\Delta y_1 = \frac{Mg}{2k_1}$, $\Delta y_2 = \frac{Mg}{2k_2}$, где g – ускорение свободного падения. Пусть в некоторый момент времени горизонтальный стержень опустится на величину y. Из-за нерастяжимости нити верхние концы пружин сместятся при этом в разные стороны – левой пружины на величину Δy вниз, а правой – на столько же вверх (поскольку $k_1 > k_2$). Сила натяжения нити слева и справа одинакова, поэтому $k_1(y - \Delta y + \Delta y_1) = k_2(y + \Delta y + \Delta y_2)$. С учетом полученных выше выражений для Δy_1 и Δy_2 отсюда следует, что $\Delta y = y\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$, а сила упругости, возникающая в каждой из пружин, $F = \frac{2yk_1k_2}{k_1 + k_2} + \frac{Mg}{2}$. По второму закону Ньютона для груза имеем $Ma = Mg - 2F = -4\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}y$, или $\ddot{y} + \frac{4k_1k_2}{M(k_1 + k_2)}y = 0$. Это уравнение описывает гармонические колебания груза относительно положения равновесия с частотой $\omega = 2\sqrt{\frac{k_1k_2}{M(k_1 + k_2)}}$ и периодом $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{M(k_1 + k_2)}{k_1k_2}}$. **Ответ:** $T = \pi\sqrt{\frac{M(k_1 + k_2)}{k_1k_2}} \approx 0{,}4$ с.

Ответ: $k_2 = \frac{\pi^2 M k_1}{k_1 T^2 - \pi^2 M} \approx 20{,}9$ Н/м.

2.2.1. Сформулируйте определение внутренней энергии термодинамической системы. Укажите способы изменения внутренней энергии.



Задача. На рисунке показана pV-диаграмма циклического процесса, проводимого над $\nu = 1$ молем идеального газа. Температура газа в точке *1* равна $T_1 = 200$ К, а его температуры в точках *2* и *3* одинаковы и равны $T_2 = 800$ К. Продолжение прямой *1 – 3* проходит через начало координат. Определите работу A газа за цикл. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

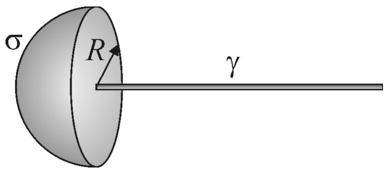
2.2.1. Решение. Пусть p_i и V_i – давление и объём газа в i-ой точке. Работа $A=\frac{1}{2}(p_2-p_1)(V_3-V_1)$.

Так как $p_2V_1=p_3V_3=\nu RT_2$, $\frac{p_1}{V_1}=\frac{p_3}{V_3}=\frac{p_1V_1}{V_1^2}=\frac{p_3V_3}{V_3^2}=\frac{\nu RT_1}{V_1^2}=\frac{\nu RT_2}{V_3^2}$, то справедливы равенства $\frac{V_3}{V_1}=\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$, $p_2V_3=\nu RT_2\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$, $p_1V_3=\nu R\sqrt{T_1T_2}$. Отсюда $A=\frac{1}{2}\nu R(T_2-T_1)\cdot\left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}-1\right)$.

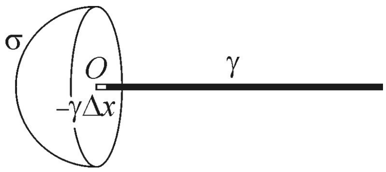
Ответ: $A=\frac{1}{2}\nu R(T_2-T_1)\cdot\left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}-1\right)\approx 2{,}46$ кДж.

3.4.1. Как определяется потенциал электростатического поля? Чему равен потенциал поля точечного заряда?

Задача. Найдите силу F взаимодействия непроводящей равномерно заряженной полусферы радиуса $R = 10$ см с бесконечно длинным равномерно заряженным тонким стержнем. Один конец стержня расположен в центре полусферы, а стержень направлен вдоль оси симметрии полусферы, как показано на рисунке. Поверхностная плотность зарядов на полусфере $\sigma = 10^{-6}$ Кл/м^2, линейная плотность зарядов на стержне $\gamma = 10^{-6}$ Кл/м, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

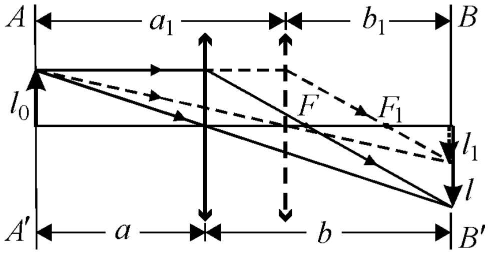


3.4.1. Решение. Потенциал точки, находящейся на расстоянии r от точечного заряда q, относительно бесконечно удалённой от него точки равен $\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Поскольку все точки поверхности полусферы находятся на одинаковом расстоянии R от ее центра, и полусфера заряжена равномерно, потенциал точки O, расположенной в центре полусферы, равен $\varphi_O=\frac{\sigma S}{4\pi\varepsilon_0 R}$, где $S=2\pi R^2$ − площадь полусферы.



Таким образом, $\varphi_O=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$. Переместим стержень вдоль оси на небольшое расстояние Δx. Так как стержень бесконечно длинный, это эквивалентно тому, что мы поместим на конец стержня, обращенный к полусфере, заряд $-\gamma\Delta x$. Энергия взаимодействия этого заряда с полусферой равна $\Delta W=-\gamma\Delta x\cdot\varphi_O$. Эта величина равна изменению энергии системы «полусфера − стержень». С другой стороны, изменение энергии системы равно работе силы взаимодействия полусферы со стержнем при перемещении стержня на расстояние Δx, т.е. $\Delta W=-F\Delta x$. Окончательно получаем $F=\frac{\gamma\sigma R}{2\varepsilon_0}$. **Ответ:** $F=\frac{\gamma\sigma R}{2\varepsilon_0}\approx 5{,}6\cdot10^{-3}$ Н.

4.3.1. Сформулируйте законы преломления света. Что такое абсолютный и относительный показатели преломления?



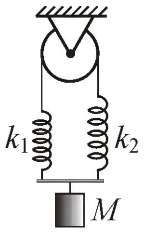
Задача. На столе стоит горящая свеча. Школьник с помощью тонкой собирающей линзы получил на стене резкое изображение пламени свечи и обнаружил, что, переместив линзу к стене на расстояние $\Delta l = 0{,}3$ м, можно получить на стене еще одно резкое изображение пламени. Определите фокусное расстояние линзы f. Расстояние от горящей свечи до стены $L = 0{,}9$ м.

4.3.1. Решение. При фиксированном расстоянии между свечой и стеной, превышающем $4f$, существуют два положения линзы, при которых она дает на стене резкое изображение пламени. Это следует из того, что формула тонкой линзы $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$, связывающая расстояние от предмета до линзы a, расстояние от линзы до изображения b и фокусное расстояние линзы f, симметрична относительно a и b: при замене $a_1=b$, $b_1=a$ эта формула остается справедливой. Построение изображения пламени свечи показано на рисунке, где упомянутые положения линзы изображены сплошной и штриховой линиями, а через AA' и BB' обозначены плоскости объекта и изображения, соответственно. Видно, что когда линза занимает ближнее к пламени положение, то она дает увеличенное изображение (сплошные линии), а если дальнее от пламени, то уменьшенное изображение (штриховые линии). Кроме того, справедливы соотношения $a+b=L$, $a-b=\Delta l$. Решая записанную систему уравнений, находим, что $f=\frac{L^2-\Delta l^2}{4L}$. **Ответ:** $f=\frac{L^2-\Delta l^2}{4L}=0{,}2$ м.

Вариант 2

1.10.2. Чему равна кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек? Как связаны приращение кинетической энергии тела и работа приложенных к телу сил?

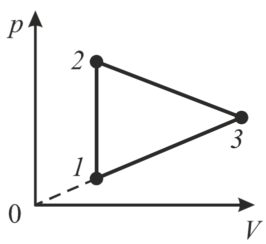
Задача. Устройство, показанное на рисунке, состоит из двух легких пружин с коэффициентами жесткости k_1 = 30 Н/м и k_2 = 20 Н/м, верхние концы которых привязаны к невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок. Нижние концы пружин прикреплены к несомому стержню, к середине которого подвешен груз, причем стержень расположен горизонтально. Стержень сместили параллельно самому вниз на небольшое расстояние и отпустили, в результате чего возникли малые вертикальные колебания груза с периодом T = 0,4 с. Определите массу груза M. Считайте, что стержень остаётся в процессе колебаний всё время горизонтальным.



1.10.2. Решение. В положении равновесия сила упругости, возникающая в каждой из пружин, равна $\frac{Mg}{2}$. Поэтому удлинения пружин в положении равновесия $\Delta y_1=\frac{Mg}{2k_1}$, $\Delta y_2=\frac{Mg}{2k_2}$, где g – ускорение свободного падения. Пусть в некоторый момент времени горизонтальный стержень опустится на величину y. Из-за нерастяжимости нити верхние концы пружин сместятся при этом в разные стороны – левой пружины на величину Δy вниз, а правой – на столько же вверх (поскольку $k_1 > k_2$). Сила натяжения нити слева и справа одинакова, поэтому $k_1(y-\Delta y+\Delta y_1)=k_2(y+\Delta y+\Delta y_2)$. С учетом полученных выше выражений для Δy_1 и Δy_2 отсюда следует, что $\Delta y=y\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}$, а сила упругости, возникающая в каждой из пружин, $F=\frac{2yk_1k_2}{k_1+k_2}+\frac{Mg}{2}$. По второму закону Ньютона для груза имеем $Ma=Mg-2F=-4\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}y$, или $\ddot{y}+\frac{4k_1k_2}{M(k_1+k_2)}y=0$. Это уравнение описывает гармонические колебания груза относительно положения равновесия с частотой $\omega=2\sqrt{\frac{k_1k_2}{M(k_1+k_2)}}$ и периодом $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi\sqrt{\frac{M(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$. Отсюда получаем, что $M=\frac{T^2k_1k_2}{\pi^2(k_1+k_2)}$.

Ответ: $M=\frac{T^2k_1k_2}{\pi^2(k_1+k_2)}\approx 195$ г.

2.2.2. Дайте определение идеального газа. Запишите уравнение состояния идеального газа, указав смысл входящих в это уравнение величин.



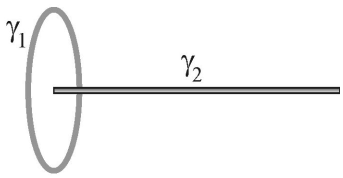
Задача. Рабочим телом теплового двигателя является $\nu = 1$ моль идеального газа. В двигателе проводится циклический процесс, pV-диаграмма которого изображена на рисунке. В точках *2* и *3* температура газа равна $T_2 = 900$ К, объём V_3 газа в точке *3* в $n = 3$ раза превышает его объём V_1 в точке *1*, а продолжение прямой *1 – 3* проходит через начало координат Определите работу A двигателя за цикл. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль·К).

2.2.2. Решение. Пусть p_i и V_i – давление и объём газа в i-ой точке. Работа $A = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_3 - V_1)$.

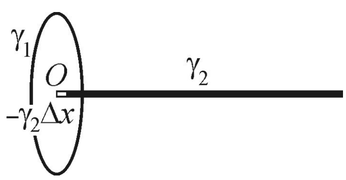
Так как $p_2V_1 = p_3V_3 = \nu RT_2$, $\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_3}{V_3} = \frac{p_1V_1}{V_1^2} = \frac{p_3V_3}{V_3^2} = \frac{\nu RT_1}{V_1^2} = \frac{\nu RT_2}{V_3^2}$, то справедливы равенства $\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1^2}{V_3^2} = \frac{1}{n^2}$, $p_2V_3 = \nu RT_2\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = n\nu RT_2$, $p_1V_3 = \nu R\sqrt{T_1T_2} = \frac{\nu RT_2}{n}$. Поэтому искомая работа равна $A = \frac{1}{2}\nu RT_2\left(n - 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$. **Ответ:** $A = \frac{\nu RT_2}{2n^2}(n^3 - n^2 - n + 1) \approx 6{,}65$ кДж.

3.4.2. Что такое напряженность электрического поля? Чему равна напряженность электростатического поля точечного заряда?

Задача. Найдите силу F взаимодействия тонкого непроводящего равномерно заряженного кольца с бесконечно длинным равномерно заряженным тонким стержнем. Один конец стержня расположен в центре кольца, а стержень направлен вдоль оси кольца, как показано на рисунке. Линейная плотность зарядов на кольце $\gamma_1 = 2\cdot 10^{-6}$ Кл/м, линейная плотность зарядов на стержне $\gamma_2 = 10^{-6}$ Кл/м, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м.



3.4.2. Решение. Потенциал точки, находящейся на расстоянии r от точечного заряда q, относительно бесконечно удалённой от него точки равен $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Поскольку все точки кольца находятся на одинаковом расстоянии R от его центра, и кольцо заряжено равномерно, потенциал точки O, расположенной в центре кольца, равен $\varphi_O = \frac{\gamma_1 L}{4\pi\varepsilon_0 R}$, где $L = 2\pi R$ – периметр кольца. Таким образом, $\varphi_O = \frac{\gamma_1}{2\varepsilon_0}$. Переместим стержень вдоль оси на небольшое расстояние Δx. Так как стержень бесконечно длинный, это эквивалентно тому, что мы поместим на конец стержня, обращенный к кольцу, заряд $-\gamma_2\Delta x$. Энергия взаимодействия этого заряда с кольцом равна $\Delta W = -\gamma_2\Delta x\cdot\varphi_O$. Эта величина равна изменению энергии системы «кольцо – стержень». С другой стороны, изменение энергии системы равно работе силы взаимодействия кольца со стержнем при перемещении стержня на расстояние Δx, т.е. $\Delta W = -F\Delta x$. Окончательно получаем $F = \frac{\gamma_1\gamma_2}{2\varepsilon_0}$.

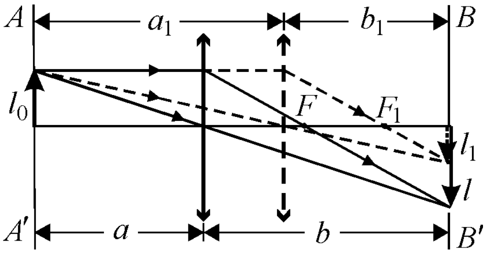


Ответ: $F = \frac{\gamma_1\gamma_2}{2\varepsilon_0} \approx 1{,}1\cdot 10^{-1}$ Н.

4.3.2. Какие линзы называют тонкими? Дайте определения фокусного расстояния и оптической силы тонкой линзы.

Задача. Любознательный школьник с помощью тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $f = 9$ см рассматривал изображение пламени свечи на стене. Оказалось, что, изменяя расстояние между линзой и стеной, можно получить на стене резкое изображение пламени свечи при двух разных положениях линзы. На какую величину Δl отличались друг от друга соответствующие расстояния от линзы до стены? Расстояние от горящей свечи до стены $L = 1$ м.

4.3.2. Решение. При фиксированном расстоянии между свечой и стеной, превышающем $4f$, существуют два положения линзы, при которых она дает на стене резкое изображение пламени. Это следует из того, что формула тонкой линзы $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$, связывающая расстояние от предмета до линзы a, расстояние от линзы до изображения b и фокусное расстояние линзы f, симметрична относительно a и b: при замене $a_1 = b$, $b_1 = a$ эта формула остается справедливой.

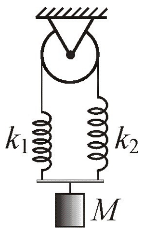


Построение изображения пламени свечи показано на рисунке, где упомянутые положения линзы изображены сплошной и штриховой линиями, а через AA' и BB' обозначены плоскости объекта и изображения, соответственно. Видно, что когда линза занимает ближнее к пламени положение, то она дает увеличенное изображение (сплошные линии), а если дальнее от пламени, то уменьшенное изображение (штриховые линии). Кроме того, справедливы соотношения $a+b=L$, $a-b=\Delta l$. Решая записанную систему уравнений, находим, что $\Delta l = \sqrt{L^2-4Lf}$. **Ответ:** $\Delta l = \sqrt{L^2-4Lf} = 0{,}8$ м.

Вариант 3

1.10.3. Какие колебания называют гармоническими? Что такое амплитуда, период и фаза гармонических колебаний?

Задача. Для исследования механических колебаний школьник собрал установку, изображенную на рисунке.



Он взял две легких пружины с разной жесткостью, верхние концы которых привязал к невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок. Нижние концы пружин он прикрепил к несомому стержню, к середине которого подвесил груз массой $M = 0{,}2$ кг, а стержень расположил горизонтально. Затем он сместил стержень параллельно самому вниз на небольшое расстояние и отпустил, в результате чего возникли малые вертикальные колебания груза с периодом $T = 0{,}4$ с, а стержень оставался в процессе колебаний всё время горизонтальным. Зная, что коэффициент жёсткости одной из пружин $k_1 = 30$ Н/м, школьник смог определить коэффициент жёсткости k_2 второй пружины. Какой ответ получил школьник?

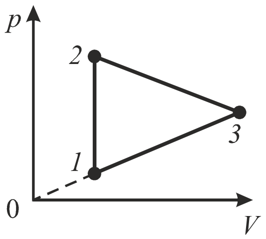
1.10.3. Решение. В положении равновесия сила упругости, возникающая в каждой из пружин, равна $\frac{Mg}{2}$. Поэтому удлинения пружин в положении равновесия $\Delta y_1 = \frac{Mg}{2k_1}$, $\Delta y_2 = \frac{Mg}{2k_2}$, где g – ускорение свободного падения. Будем считать, что $k_1 > k_2$. Пусть в некоторый момент времени горизонтальный стержень опустится на величину y. Из-за нерастяжимости нити верхние концы пружин сместятся при этом в разные стороны – левой пружины на величину Δy вниз, а правой – на столько же вверх. Сила натяжения нити слева и справа одинакова, поэтому $k_1(y-\Delta y+\Delta y_1) = k_2(y+\Delta y+\Delta y_2)$. С учетом полученных выше выражений для Δy_1 и Δy_2 отсюда следует, что $\Delta y = y\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}$, а сила упругости, возникающая в каждой из пружин, $F = \frac{2yk_1k_2}{k_1+k_2}+\frac{Mg}{2}$.

По второму закону Ньютона для груза имеем $Ma = Mg - 2F = -4\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}y$, или $\ddot{y}+\frac{4k_1k_2}{M(k_1+k_2)}y = 0$

. Это уравнение описывает гармонические колебания груза относительно положения равновесия с частотой $\omega = 2\sqrt{\dfrac{k_1 k_2}{M(k_1+k_2)}}$ и периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\dfrac{M(k_1+k_2)}{k_1 k_2}}$. Отсюда $k_2 = \dfrac{\pi^2 M k_1}{k_1 T^2 - \pi^2 M}$.

Ответ: $k_2 = \dfrac{\pi^2 M k_1}{k_1 T^2 - \pi^2 M} \approx 20{,}9$ **Н/м.**

2.2.3. Сформулируйте первый закон термодинамики. Запишите формулы для теплоемкости идеального одноатомного газа в изохорном и изобарном процессах.



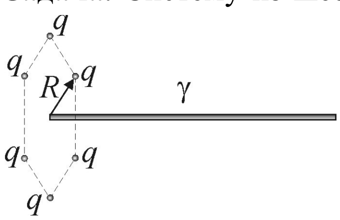
Задача. Над $\nu = 1$ молем идеального газа проводят циклический процесс, pV-диаграмма которого показана на рисунке. Температуры газа в точках *2* и *3* одинаковы и равны $T_2 = 400$ К, а отношение давлений $p_2/p_1 = n = 4$. Продолжение прямой *1 – 3* проходит через начало координат. Определите работу A газа за цикл. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

2.2.3. Решение. Пусть p_i и V_i – давление и объём газа в i-ой точке. Работа $A = \dfrac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_3 - V_1)$

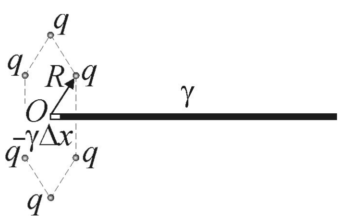
. Так как $p_2 V_1 = p_3 V_3 = \nu R T_2$, $\dfrac{p_1}{V_1} = \dfrac{p_3}{V_3} = \dfrac{p_1 V_1}{V_1^2} = \dfrac{p_3 V_3}{V_3^2} = \dfrac{\nu R T_1}{V_1^2} = \dfrac{\nu R T_2}{V_3^2}$, **то справедливы равенства** $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{p_2}{p_1} = n$, $p_2 V_3 = \nu R T_2 \sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}} = \sqrt{n}\,\nu R T_2$, $p_1 V_3 = \nu R \sqrt{T_1 T_2} = \dfrac{\nu R T_2}{\sqrt{n}}$. **Поэтому искомая работа равна** $A = \dfrac{1}{2}\nu R T_2\left(\sqrt{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 1 + \dfrac{1}{n}\right)$. **Ответ:** $A = \dfrac{\nu R T_2}{2n}\left(n\sqrt{n} - \sqrt{n} - n + 1\right) \approx 1{,}25$ **кДж.**

3.4.3. Сформулируйте закон Кулона. Приведите формулировку принципа суперпозиции электрических полей.

Задача. Систему из шести одинаковых зарядов $q = 10^{-8}$ Кл удерживают в вершинах правильного шестиугольника со стороной $R = 10$ см. Найдите силу F взаимодействия этих зарядов с бесконечно длинным равномерно заряженным тонким стержнем. Один конец стержня расположен в центре шестиугольника, а стержень направлен перпендикулярно плоскости шестиугольника, как показано на рисунке. Линейная плотность зарядов на стержне $\gamma = 10^{-6}$ Кл/м, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.



3.4.3. Решение. Потенциал точки, находящейся на расстоянии r от точечного заряда q, относительно бесконечно удалённой от него точки равен $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Поскольку все заряды находятся на одинаковом расстоянии R от центра шестиугольника, потенциал точки O, расположенной в центре шестиугольника, равен $\varphi_O = \dfrac{6q}{4\pi\varepsilon_0 R}$. Таким образом, $\varphi_O = \dfrac{3q}{2\pi\varepsilon_0 R}$.

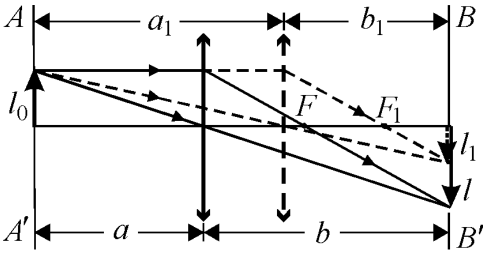


Переместим стержень вдоль оси на небольшое расстояние Δx. Так как стержень бесконечно длинный, это эквивалентно тому, что мы поместим на конец стержня, обращенный к шестиугольнику, заряд $-\gamma\Delta x$. Энергия взаимодействия этого заряда с шестью зарядами q равна $\Delta W = -\gamma\Delta x \cdot \varphi_O$. Эта величина равна изменению энергии системы «6 зарядов − стержень». С другой стороны, изменение энергии системы равно работе силы взаимодействия зарядов со стержнем при перемещении стержня на расстояние Δx, т.е. $\Delta W = -F\Delta x$. Окончательно получаем $F = \dfrac{3\gamma q}{2\pi\varepsilon_0 R}$. Ответ: $F = \dfrac{3\gamma q}{2\pi\varepsilon_0 R} \approx 5{,}4 \cdot 10^{-3}$ Н.

4.3.3. Запишите формулу тонкой линзы и укажите смысл входящих в эту формулу величин. Как определяется увеличение, даваемое линзой?

Задача. На столе стоит горящая свеча. Любознательный школьник с помощью тонкой собирающей линзы получил на стене резкое изображение пламени свечи и обнаружил, что, переместив линзу к стене на расстояние $\Delta l = 0{,}3$ м, ему удалось получить на стене еще одно резкое изображение пламени. При этом первое изображение оказалось в $n = 4$ раза больше второго. Определите фокусное расстояние линзы f.

4.3.3. Решение. При фиксированном расстоянии между свечой и стеной, превышающем $4f$, существуют два положения линзы, при которых она дает на экране изображение предмета. Это следует из того, что формула тонкой линзы $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$, связывающая расстояние от предмета до линзы a, расстояние от линзы до изображения b и фокусное расстояние линзы f, симметрична относительно a и b: при замене $a_1 = b$, $b_1 = a$ эта формула остается справедливой. Построение изображения пламени свечи показано на рисунке, где упомянутые положения линзы изображены сплошной и штриховой линиями, а через AA' и BB' обозначены плоскости объекта и изображения, соответственно. Видно, что когда линза занимает ближнее к пламени положение, то она дает увеличенное изображение (сплошные линии), а если дальнее от пламени, то уменьшенное изображение (штриховые линии). Имеем: $\frac{l}{l_0}=\frac{b}{a}$, $\frac{l_1}{l_0}=\frac{b_1}{a_1}=\frac{a}{b}$. Из этих соотношений следует, что $n=\frac{l}{l_1}=\frac{b^2}{a^2}$. Из системы уравнений $b-a=\Delta l$, $b=a\sqrt{n}$ находим, что $a=\frac{\Delta l}{\sqrt{n}-1}$, $b=\frac{\Delta l\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}$. По формуле линзы $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$, откуда $f=\frac{ab}{a+b}$.



Ответ: $f=\frac{\Delta l\sqrt{n}}{n-1}=20$ **см.**

Критерии оценки

Теоретические вопросы (каждый вопрос оценивается максимально в 10 баллов)

1. Ответ по существу обеих частей вопроса полностью отсутствует – **0 баллов**.
2. Ответ является неполным (дан ответ только на одну часть вопроса) – **1 – 5 баллов**.
3. Ответ является неполным (даны формально ответы на обе части вопроса, но отсутствуют или не полностью приведены необходимые пояснения) – **6 – 9 баллов**
4. Ответ является полным (содержит по обеим частям вопроса необходимые физические понятия и величины с пояснением их смысла) – **10 баллов**.

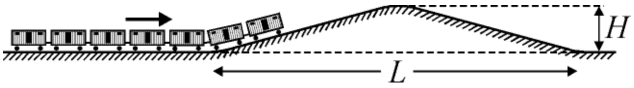
Задачи (каждая задача оценивается максимально в 15 баллов)

1. Задача вовсе не решалась – **0 баллов**.
2. Задача не решена, но сделан поясняющий рисунок (если требуется), частично сформулированы необходимые физические законы – **1 – 5 баллов**.
3. Задача не решена, но правильно сформулированы физические законы и правильно записаны основные уравнения, необходимые для решения задачи – **6 – 10 баллов**.
4. Задача решена, но допущены незначительные погрешности – **11-14 баллов**.
5. Задача решена полностью и получен правильный ответ – **15 баллов**.

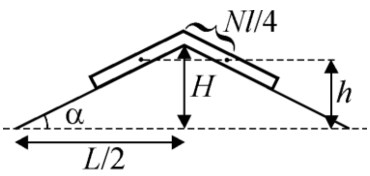
Максимальное количество баллов за полностью выполненное задание - 100.

Задание для 9-х классов

1. Изучив законы механики, ученик решил проверить их экспериментально. Для этого он собрал дома модель игрушечной железной дороги. На прямолинейном участке дороги он поместил симметричную «горку» высотой $H = 0{,}5$ м и длиной основания $L = 2$ м (см. рисунок). Сцепив несколько одинаковых вагонов, он поставил образовавшийся поезд на горизонтальный участок дороги и толкнул его по направлению к горке со скоростью $v_0 = 3$ м/с. При каком минимальном числе вагонов $N_{\min}$ поезд преодолеет горку и скатится с противоположной стороны? Длина одного вагона $l = 10$ см. Силами сопротивления и длиной сцепки между вагонами можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.



Решение. Поезд преодолеет горку, если выполнено условие: $\frac{mv_0^2}{2} \geq mgh$, где m – масса поезда, h – высота центра тяжести поезда, достигаемая в момент, когда середина состава находится на вершине горки. Пренебрегая высотой вагона по сравнению с H и длиной вагона по сравнению с L, получаем, что (см. рисунок) $H - h = \frac{Nl}{4}\sin\alpha$. При этом $\mathrm{tg}\alpha = 2H/L$.



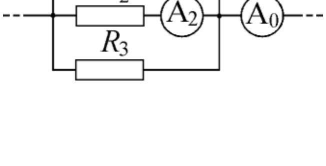
Объединяя записанные выражения, получаем, что $N \geq \frac{2}{l}\left(1 - \frac{v_0^2}{2gH}\right)\sqrt{L^2 + 4H^2}$.

Ответ: $N_{\min} = \left[\frac{2}{l}\left(1 - \frac{v_0^2}{2gH}\right)\sqrt{L^2 + 4H^2}\right] + 1 = 5$, где символом $[\cdots]$ обозначена целая часть числа.

2. В теплоизолированный сосуд с водой общей теплоемкостью $C = 1{,}5$ кДж/ºС, имеющий температуру $t_1 = 20$ ºС, поместили $m = 56$ г льда при температуре $t_2 = -8$ ºС. Какую температуру t_0 примет содержимое сосуда после установления теплового равновесия? Удельная теплоемкость воды $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг·ºС), удельная теплоемкость льда $c_л = 2{,}1$ кДж/(кг·ºС), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг. Ответ приведите в градусах Цельсия, округлив до одного знака после запятой.

Решение. Количество теплоты, требующееся для нагревания льда до температуры плавления, $Q_1 = mc_л(0\,°\mathrm{C} - t_2) = 0{,}056 \cdot 2{,}1 \cdot 8 \approx 0{,}94$ кДж. Количество теплоты, требующееся для превращения льда в воду при температуре 0 ºС, $Q_2 = m\lambda = 0{,}056 \cdot 330 = 18{,}48$ кДж. Количество теплоты, которое может отдать сосуд с содержащейся в нем водой при охлаждении до 0 ºС, $Q_3 = C(t_1 - 0\,°\mathrm{C}) = 1{,}5 \cdot 20 = 30$ кДж. Сопоставление приведенных данных показывает, что весь лед растает и в сосуде с его содержимым установится положительная температура. Поэтому уравнение теплового баланса имеет вид: $C(t_1 - t_0) = Q_1 + Q_2 + mc_в(t_0 - 0\,°\mathrm{C})$. Отсюда $t_0 = \frac{Ct_1 - (Q_1 + Q_2)}{C + mc_в} = \frac{1{,}5 \cdot 20 - 19{,}42}{1{,}5 + 0{,}056 \cdot 4{,}2} \approx 6{,}1\,°\mathrm{C}$. **Ответ.** $t_0 = \frac{Ct_1 - m\left(c_л(0\,°\mathrm{C} - t_2) + \lambda\right)}{C + mc_в} \approx 6{,}1\,°\mathrm{C}$.

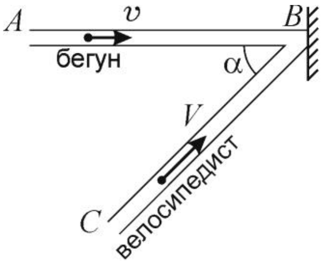
3. Следуя указаниям учителя, ученик собрал электрическую цепь, состоящую из трех резисторов и двух амперметров. При этом он заметил, что заводская маркировка на резисторе R_1 стерлась, и установить по ней значение сопротивления этого резистора невозможно. В то же время маркировка на резисторах R_2 и R_3 была четкой, благодаря чему ученик узнал, что $R_2 = 20$ Ом, а $R_3 = 15$ Ом.



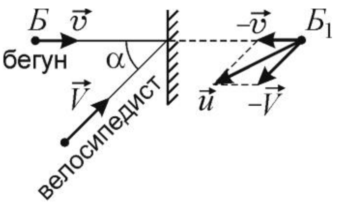
Подключив цепь к источнику постоянного тока (на рисунке не изображен), ученик обнаружил, что амперметр A_2 показывает силу тока I_2 = 0,3 А, а амперметр A_0 – силу тока I_0 = 1,5 А. Располагая этими данными и предположив, что сопротивления амперметров пренебрежимо малы, ученик смог рассчитать сопротивление резистора R_1. Какой ответ он получил? Ответ округлите до одного знака после запятой.

Решение. Обозначив через I_1, I_2 и I_3 силы токов, текущих через резисторы R_1, R_2 и R_3 соответственно, имеем следующую систему уравнений: $I_1R_1 = I_2R_2 = I_3R_3$, $I_1 + I_2 + I_3 = I_0$. Решая эту систему, находим, что $R_1 = \dfrac{I_2R_2R_3}{I_0R_3 - I_2(R_2+R_3)}$. **Ответ.** $R_1 = \dfrac{I_2R_2R_3}{I_0R_3 - I_2(R_2+R_3)} = 7{,}5$ Ом.

4. Две прямых дороги *AB* и *CB* пересекаются в точке *B* под углом $\alpha = 45°$. На перекрестке *B* установлено широкое плоское зеркало, расположенное перпендикулярно дороге *AB* так, что велосипедист, едущий к точке *B* по дороге *CB*, видит в зеркале бегуна, направляющегося к точке *B* по дороге *AB*. Какова скорость бегуна v, если скорость велосипедиста $V = 18$ км/час, а изображение бегуна приближается к велосипедисту с относительной скоростью $u = V\sqrt{2}$? Ответ приведите в км/час, округлив до одного знака после запятой.



Решение. Построение изображения $Б_1$ бегуна *Б* представлено на рисунке. Относительно неподвижного наблюдателя это изображение движется по прямой $Б_1Б$ навстречу бегуну со скоростью, модуль которой равен v. Используя закон сложения скоростей, находим, что относительно велосипедиста изображение бегуна движется со скоростью $\vec{u} = -\vec{v} - \vec{V}$. По теореме косинусов имеем: $u^2 = v^2 + V^2 - 2vV\cos(\pi - \alpha)$. Учитывая, что $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, получаем квадратное уравнение: $v^2 + 2vV\cos\alpha + V^2 - u^2 = 0$. Условию задачи удовлетворяет положительный корень $v = \sqrt{V^2\cos^2\alpha + u^2 - V^2} - V\cos\alpha$. Так как $u = V\sqrt{2}$, это выражение преобразуется к виду: $v = \left(\sqrt{\cos^2\alpha + 1} - \cos\alpha\right)V$. **Ответ:** $v = \left(\sqrt{\cos^2\alpha + 1} - \cos\alpha\right)V = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}V \approx 9{,}3$ км/час.



Критерии оценки

Задачи (каждая задача оценивается максимально в 25 баллов)

1. Задача вовсе не решалась – **0 баллов**.
2. Задача не решена, но сделан поясняющий рисунок (если требуется), частично сформулированы необходимые физические законы – **1 – 7 баллов**.
3. Задача не решена, но правильно сформулированы физические законы и правильно записаны основные уравнения, необходимые для решения задачи – **8 – 15 баллов**.
4. Задача решена, но допущены незначительные погрешности – **16-24 баллов**.
5. Задача решена полностью и получен правильный ответ – **25 баллов**.

Максимальное количество баллов за полностью выполненное задание равно 100.

Задание для 7-х – 8-х классов

1. Изделие, изготовленное из сплава золота и меди, имеет массу $m = 1{,}6$ кг и плотность $\rho = 16{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Считая, что объем сплава равен суммарному объему исходных компонент, определите массу m_1 золота в этом изделии. Плотность золота $\rho_1 = 19{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность меди $\rho_2 = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение. Обозначим через V_1 и V_2 объемы золота и меди в изделии. По условию объем изделия $V = V_1 + V_2$. Масса тела, его плотность и объем связаны соотношением $m = \rho V$. Следовательно, $\frac{m}{\rho} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}$. Так как масса изделия равна сумме масс золота и меди: $m = m_1 + m_2$, то $\frac{m}{\rho} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m - m_1}{\rho_2}$. Отсюда $m_1 = m\frac{\rho_1(\rho - \rho_2)}{\rho(\rho_1 - \rho_2)}$. Ответ: $m_1 = m\frac{\rho_1(\rho - \rho_2)}{\rho(\rho_1 - \rho_2)} \approx 1{,}4$ кг.

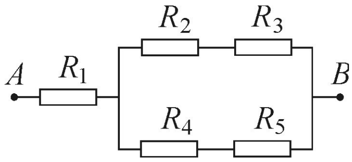
2. При медленном растяжении пружины из недеформированного состояния до некоторого удлинения совершена работа $A = 10$ Дж. Чтобы удержать пружину в растянутом состоянии, требуется прикладывать к ее концам силы, равные по модулю $F = 20$ Н. Определите коэффициент жесткости этой пружины.

Решение. Согласно закону Гука, сила упругости, возникающая в пружине при ее растяжении на величину x, равна $F = kx$, где k – жесткость пружины. Совершенная при этом работа $A = \frac{kx^2}{2} = \frac{F^2}{2k}$. Ответ $k = \frac{F^2}{2A} = 20$ Н/м.

3. В комнате, объёмом $V = 60$ м^3 температура воздуха $t_1 = 15$ °C. Какую массу m торфа нужно сжечь в печи, чтобы нагреть воздух в комнате до $t_2 = 25$ °C? Коэффициент полезного действия печи $\eta = 10\%$, плотность воздуха $\rho = 1{,}2$ кг/м^3, его удельная теплоёмкость $c = 1{,}01$ кДж/(кг·°C), удельная теплота сгорания торфа $q = 14$ МДж/кг. Изменением плотности воздуха в рассматриваемом диапазоне температур можно пренебречь. Ответ приведите в килограммах, округлив до одной сотой.

Решение. Чтобы увеличить температуру воздуха в комнате на $\Delta t = t_2 - t_1$, ему нужно передать количество теплоты, равное: $Q = cM\Delta t$, где $M = \rho V$ – масса воздуха в комнате. По определению КПД печи $Q = \eta q m$. Следовательно, $m = \frac{c\rho V(t_2 - t_1)}{\eta q} = \frac{1{,}01 \cdot 10^3 \cdot 1{,}2 \cdot 60 \cdot 10}{0{,}1 \cdot 14 \cdot 10^6} \approx 0{,}52$ кг.

Ответ: $m = \frac{c\rho V(t_2 - t_1)}{\eta q} \approx 0{,}52$ кг.



4. В цепи, схема которой показана на рисунке, сила тока, текущего по резистору R_1, равна $I = 2$ А. Определите напряжение U между точками A и B, если $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 3$ Ом, $R_5 = 6$ Ом.

Решение. Ток I, текущий по резистору R_1, разветвляется на два тока: I_{23} и I_{45}, причем $I_{23} + I_{45} = I$. Поскольку резисторы $R_{23} = R_2 + R_3$ и $R_{45} = R_4 + R_5$ соединены параллельно, то напряжения на них одинаковы и $I_{23}R_{23} = I_{45}R_{45}$. Решая записанную систему уравнений, находим, что $I_{23} = \dfrac{R_{45}}{R_{23} + R_{45}} I$, $I_{45} = \dfrac{R_{23}}{R_{23} + R_{45}} I$. Следовательно, напряжения на разветвлении цепи $U_{23} = U_{45} = \dfrac{R_{23}R_{45}}{R_{23} + R_{45}} I$, а напряжение между точками A и B равно $U = \left(R_1 + \dfrac{(R_2 + R_3)(R_4 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} \right) \cdot I$.

Ответ: $U = \left(R_1 + \dfrac{(R_2 + R_3)(R_4 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} \right) \cdot I = 12$ В.

Критерии оценки

Задачи (каждая задача оценивается максимально в 25 баллов)

1. Задача вовсе не решалась – **0 баллов**.
2. Задача не решена, но сделан поясняющий рисунок (если требуется), частично сформулированы необходимые физические законы – **1 – 7 баллов**.
3. Задача не решена, но правильно сформулированы физические законы и правильно записаны основные уравнения, необходимые для решения задачи – **8 – 15 баллов**.
4. Задача решена, но допущены незначительные погрешности – **16-24 баллов**.
5. Задача решена полностью и получен правильный ответ – **25 баллов**.

Максимальное количество баллов за полностью выполненное задание равно 100.