

**Олимпиада школьников «Ломоносов» 2017/2018 учебного года
по механике и математическому моделированию**

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Отборочный этап 1

10-11 классы

Во всех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). Ответом на каждую из задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления.

::1.1.: Каждый из пяти серверов разной производительности обрабатывает один и тот же объем информации. Если бы первый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее, то суммарное время их работы уменьшилось бы на 15%. Если бы второй сервер делал это в два раза быстрее, то суммарное время работы уменьшилось бы на 10%. Если бы третий делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 8% меньше времени. Если бы четвертый делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 6% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее?

{ = 11 }

::1.2.: Каждый из пяти серверов разной производительности обрабатывает один и тот же объем информации. Если бы первый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее, то суммарное время их работы уменьшилось бы на 15%. Если бы второй сервер делал это в два раза быстрее, то суммарное время работы уменьшилось бы на 12%. Если бы третий делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 9% меньше времени. Если бы четвертый делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 6% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее?

{ = 8 }

::1.3.: Каждый из пяти серверов разной производительности обрабатывает один и тот же объем информации. Если бы первый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее, то суммарное время их работы уменьшилось бы на 14%. Если бы второй сервер делал это в два раза быстрее, то суммарное время работы уменьшилось бы на 11%. Если бы третий делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 8% меньше времени. Если бы четвертый делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 7% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее?

{ = 10 }

::1.4.: Каждый из пяти серверов разной производительности обрабатывает один и тот же объем информации. Если бы первый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее, то суммарное время их работы уменьшилось бы на 16%. Если бы второй сервер делал это в два раза быстрее, то суммарное время работы уменьшилось бы на 12%. Если бы третий делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 8% меньше времени. Если бы четвертый делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 5% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее?

{= 9}

::2.1:: Гаврила ставил опыты с растворами соли. Он взял стакан слабого раствора и смешал его с некоторым количеством концентрированного, в котором доля соли в 5 раз больше. При этом концентрация смеси оказалась равна среднему гармоническому концентраций исходных растворов. Глафира взяла те же ингредиенты, что и Гаврила, но слабого раствора у нее было вдвое больше. Во сколько раз концентрация ее смеси оказалась меньше, чем смеси Гаврилы? Объемы при смешивании не изменяются.

{= 1, 22}

::2.2:: Гаврила ставил опыты с растворами соли. Он взял стакан слабого раствора и смешал его с некоторым количеством концентрированного, в котором доля соли в 3 раз больше. При этом концентрация смеси оказалась равна среднему гармоническому концентраций исходных растворов. Глафира взяла те же ингредиенты, что и Гаврила, но слабого раствора у нее было втрое больше. Во сколько раз концентрация ее смеси оказалась меньше, чем смеси Гаврилы? Объемы при смешивании не изменяются.

{= 1, 3}

::2.3:: Гаврила ставил опыты с растворами соли. Он взял стакан слабого раствора и смешал его с некоторым количеством концентрированного, в котором доля соли в 5 раз больше. При этом концентрация смеси оказалась равна среднему гармоническому концентраций исходных растворов. Глафира взяла те же ингредиенты, что и Гаврила, но слабого раствора у нее было втрое больше. Во сколько раз концентрация ее смеси оказалась меньше, чем смеси Гаврилы? Объемы при смешивании не изменяются.

{= 1, 33}

::2.4:: Гаврила ставил опыты с растворами соли. Он взял стакан слабого раствора и смешал его с некоторым количеством концентрированного, в котором доля соли в 4 раз больше. При этом концентрация смеси оказалась равна среднему гармоническому концентраций исходных растворов. Глафира взяла те же ингредиенты, что и Гаврила, но слабого раствора у нее было вдвое больше. Во сколько раз концентрация ее смеси оказалась меньше, чем смеси Гаврилы? Объемы при смешивании не изменяются.

{= 1, 2}

::3.1:: Два теплохода вышли в трансатлантический круиз. Каждый из них движется по своей прямолинейной траектории, с постоянной скоростью. В полночь расстояние между ними было равно 110 миль, через 7 часов — 100 миль, а еще через 8 часов — 140 миль. Найдите минимальное расстояние между теплоходами (в милях) в процессе их движения.

{=97,98}

::3.2:: Два теплохода вышли в трансатлантический круиз. Каждый из них движется по своей прямолинейной траектории, с постоянной скоростью. В полночь расстояние между ними было равно 33 мили, через 17 часов — 18 миль, а еще через 18 часов — 12 миль. Найдите минимальное расстояние между теплоходами (в милях) в процессе их движения.

{=11,31}

::3.3:: Два теплохода вышли в трансатлантический круиз. Каждый из них движется по своей прямолинейной траектории, с постоянной скоростью. В полдень расстояние между ними было равно 110 миль, через 15 часов — 140 миль, а еще через 13 часов — 250 миль. Найдите минимальное расстояние между теплоходами (в милях) в процессе их движения.

{=97,98}

::3.4:: Два теплохода вышли в трансатлантический круиз. Каждый из них движется по своей прямолинейной траектории, с постоянной скоростью. В полдень расстояние

между ними было равно 18 миль, через 18 часов — 12 миль, а еще через 27 часов — 33 мили. Найдите минимальное расстояние между теплоходами (в милях) в процессе их движения.

$$\{=11,31\}$$

::4.1:: Для того чтобы удлинить три пружины на одну и ту же заданную величину, к первой пружине следует приложить силу 60 Н, ко второй — в два раза меньшую, к третьей — в 1,5 раза большую. С какой силой (в ньютонах) надо подействовать на систему, состоящую из последовательно соединенных двух элементов: а) первой пружины и б) системы параллельно соединенных второй и третьей пружин, чтобы растянуть эту систему на ту же величину удлинения?

$$\{= 40\}$$

::4.2:: Для того чтобы удлинить три пружины на одну и ту же заданную величину, к первой пружине следует приложить силу 60 Н, ко второй — в два раза большую, к третьей — в три раза большую. С какой силой (в ньютонах) надо подействовать на систему, состоящую из последовательно соединенных двух элементов: а) первой пружины и б) системы параллельно соединенных второй и третьей пружин, чтобы растянуть эту систему на ту же величину удлинения?

$$\{= 50\}$$

::4.3:: Для того чтобы удлинить три пружины на одну и ту же заданную величину, к первой пружине следует приложить силу 90 Н, ко второй — в два раза меньшую, к третьей — в 1,5 раза большую. С какой силой (в ньютонах) надо подействовать на систему, состоящую из последовательно соединенных двух элементов: а) первой пружины и б) системы параллельно соединенных второй и третьей пружин, чтобы растянуть эту систему на ту же величину удлинения?

$$\{= 60\}$$

::4.4:: Для того чтобы удлинить три пружины на одну и ту же заданную величину, к первой пружине следует приложить силу 40 Н, ко второй — в четыре раза меньшую, к третьей — в 1,25 раза большую. С какой силой (в ньютонах) надо подействовать на систему, состоящую из последовательно соединенных двух элементов: а) первой пружины и б) системы параллельно соединенных второй и третьей пружин, чтобы растянуть эту систему на ту же величину удлинения?

$$\{= 24\}$$

::5.1:: С одним молем идеального одноатомного газа проводят циклический процесс, график которого в осях $P - V$ имеет вид прямоугольного треугольника, катеты которого параллельны осям координат, а прямой угол обращен к началу координат. В течение процесса давление и объем изменяются от p_0 до $2p_0$ и от V_0 до $2V_0$ соответственно. Гаврила и Глафира после недолгой дискуссии решили, что по этим данным возможно найти КПД цикла. Если Глафира и Гаврила правы, укажите КПД цикла. Если они неправы, введите в качестве ответа 0.

$$\{0, 16\}$$

::5.2:: С одним молем идеального одноатомного газа проводят циклический процесс, график которого в осях $P - V$ имеет вид прямоугольного треугольника, катеты которого параллельны осям координат, а прямой угол обращен к началу координат. В течение процесса давление и объем изменяются от p_0 до $3p_0$ и от V_0 до $2V_0$ соответственно. Гаврила и Глафира после недолгой дискуссии решили, что по этим данным возможно найти КПД цикла. Если Глафира и Гаврила правы, укажите КПД цикла. Если они неправы, введите в качестве ответа 0.

$$\{0, 23\}$$

::5.3.: С одним молем идеального одноатомного газа проводят циклический процесс, график которого в осях $P - V$ имеет вид прямоугольного треугольника, катеты которого параллельны осям координат, а прямой угол обращен к началу координат. В течение процесса давление и объем изменяются от p_0 до $4p_0$ и от V_0 до $3V_0$ соответственно. Гаврила и Глафира после недолгой дискуссии решили, что по этим данным возможно найти КПД цикла. Если Глафира и Гаврила правы, укажите КПД цикла. Если они неправы, введите в качестве ответа 0.

{0, 32}

::5.4.: С одним молем идеального одноатомного газа проводят циклический процесс, график которого в осях $P - V$ имеет вид прямоугольного треугольника, катеты которого параллельны осям координат, а прямой угол обращен к началу координат. В течение процесса давление и объем изменяются от p_0 до $3p_0$ и от V_0 до $4V_0$ соответственно. Гаврила и Глафира после недолгой дискуссии решили, что по этим данным возможно найти КПД цикла. Если Глафира и Гаврила правы, укажите КПД цикла. Если они неправы, введите в качестве ответа 0.

{0, 27}

Решение.

1. Если бы каждый работал в два раза быстрее, то они потратили бы времени на 50% меньше. Значит, если бы 5 й делал это в 2 раза быстрее, то время уменьшилось бы на $50 - 15 - 10 - 8 - 6 = 11$. Ответ: На 11%.

2. Пусть слабый раствор имеет концентрацию n_1 , а концентрированный — kn_1 . Для первого опыта закон сохранения массы влечет:

$$n_1 V_1 + kn_1 V_2 = (V_1 + V_2) \frac{2n_1 \cdot kn_1}{(k+1)n_1},$$

поэтому $V_1 = kV_2$, V_1 и V_2 — объемы слабого и концентрированного растворов соответственно.

Опыт Глафиры, которая взяла в m больше слабого раствора, описывается соотношением:

$$mn_1 V_1 + kn_1 V_2 = (V_1 + V_2) n',$$

поэтому

$$n' = \frac{(m+1)k}{mk+1}.$$

Так как Гаврила получил раствор с концентрацией $n_0 = 2k/(k+1)$, получаем ответ:

$$\alpha = \frac{n_0}{n'} = \frac{2(mk+1)}{(m+1)(k+1)} = \frac{11}{9}$$

Ответ: 1,22

3. Так как перемещение вдоль прямой у каждого теплохода линейно зависит от времени, то по теореме косинусов квадрат расстояния между ними выражается квадратичной зависимостью: $r^2 = At^2 + Bt + C$. Принимаем начальный момент времени за $t = 0$. Тогда $110^2 = C$, $100^2 = 7^2 \cdot A + 7B + C$, $140^2 = 15^2 \cdot A + 15B + C$. Отсюда $C = 12100$, $A = 100$, $B = -1000$, то есть $r^2 = 100t^2 - 1000t + 12100 = 100((t-5)^2 + 96)$. Поэтому минимальным расстояние будет при $t = 5$, и равно оно $\sqrt{9600} \approx 97,98$.

Ответ: 97,98 миль.

4. Закон Гука для данных пружин приводит к соотношениям: $k_1 \Delta l = F_1$, $k_2 \Delta l = F_2$, $k_3 \Delta l = F_3$. При последовательном соединении пружин на каждую действует одинаковая сила, общее растяжение есть сумма растяжений каждой пружины.

При параллельном соединении пружин общая сила, равна сумме сил, действующих на каждую пружину, а растяжение при этом одинаковое. Жесткость определяется суммированием жесткостей каждой пружины.

Из этого следует, что искомая сила F определяется из следующих условий:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2, k_1 \Delta l_1 = F, (k_1 + k_2) \Delta l_2 = F \rightarrow \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2 + k_3} = \Delta l.$$

Отсюда получим

$$F \left(\frac{\Delta l}{F_1} + \frac{\Delta l}{F_2 + F_3} \right) = \Delta l \rightarrow F \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2 + F_3} \right) = 1$$

Подставим данные

$$F \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{30+90} \right) = 1 \rightarrow F \frac{3}{120} = 1 \rightarrow F = 40 \text{ Н}$$

Ответ: 40

5. Пусть состояние, соответствующее вершине прямого угла (p_0, V_0) — состояние 1, окончание изохорного нагрева mp_0, V_0 — состояние 2, начало изобарического сжатия p_0, nV_0 — состояние 3.

Работа совершенная газом за цикл $A = \frac{1}{2}(m-1)(n-1)p_0V_0$ находится как площадь внутри треугольника.

На участке 1-2 температура газа повышается, работа не совершается, поэтому в систему передается количество теплоты

$$Q_{1-2} = c_v \Delta T_{21} = \frac{3}{2} R (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} (mp_0 V_0 - p_0 V_0) = \frac{3}{2} (m - 1) p_0 V_0$$

На участке 3 – 1 температура газа понижается и газ совершает отрицательную работу. Так изменение внутренней энергии и работа меньше нуля, тепло забирается из системы.

Рассмотрим участок 2-3. Он описывается уравнением

$$p = mp_0 - \frac{m-1}{n-1} \frac{p_0}{V_0} (V - V_0).$$

Найдем точки, в которых тепло подается в систему, и в каких выводится из нее. Фиксируем $V_1 \in (V_0, nV_0)$ и рассмотрим малое изменение объема dV . Им соответствуют давление p_1 и его малое изменение $dp = -\frac{m-1}{n-1} \frac{p_0}{V_0} dV$. Изменение внутренней энергии составит

$$dU = \frac{3}{2} ((p_1 + dp)(V_1 + dV) - p_1 V_1) \approx \frac{3}{2} (p_1 dV + V_1 dp)$$

Газ совершит работу $dA = p_1 dV$. Согласно первому началу термодинамики подведенное тепло будет

$$dQ = dU + dA = \frac{5}{2} p_1 dV + \frac{3}{2} V_1 dp = \left(-4 \frac{m-1}{n-1} \frac{V_1}{V_0} + \frac{5}{2} \frac{mn-1}{n-1} \right) P_0 dV$$

Таким образом, тепло подводится в систему пока $V < V_* = \frac{5}{8} \frac{mn-1}{n-1} V_0$.

Найдем количество теплоты, подведенное на участке 2 – 3 до того момента, пока объем не достиг указанной величины: изменение внутренней энергии по формуле $\Delta U = \frac{3}{2} (p(V_*)V_* - 2p_0 V_0)$, а работу как площадь трапеции:

$$Q_{23}^+ = \frac{3}{2} (p(V_*)V_* - 2p_0 V_0) + \frac{1}{2} (2p_0 + p_*) (V_* - V_0).$$

Полное количество теплоты, подведенное в систему, составит

$$Q^+ = Q_{23}^+ + \frac{3}{2} (m - 1) p_0 V_0,$$

а КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q^+}$$

При $m = 2, n = 2$ $Q_{23}^+ = 49/32 p_0 V_0$, $Q^+ = 97/32 p_0 V_0$, и $\eta = 16/97$.

Ответ: 16/97.

**Олимпиада школьников «Ломоносов» 2017/2018 учебного года
по механике и математическому моделированию**

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Отборочный этап. Тур 2

10-11 классы

Во всех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). Ответом на каждую из задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления.

::0:: Чему равен объем льда, полученного замораживанием одного литра воды, если плотность воды 1000 кг/м^3 и льда 917 кг/м^3 ? Ответ дать в кубических дециметрах.

{= 1,09}

::1.1:: С орбитальной станции, находящейся на высоте H от поверхности неизвестной планеты, выпустили зонд, придав ему некоторую начальную скорость. За первую минуту падения он спустился на 30 км, за каждую последующую — на 20% меньше, чем за предыдущую. При каком минимальном значении H (в километрах) зонд не достигнет поверхности планеты? Двигатели на зонде отсутствуют.

{= 150}

::1.2:: С орбитальной станции, находящейся на высоте H от поверхности неизвестной планеты, выпустили зонд, придав ему некоторую начальную скорость. За первую минуту падения он спустился на 60 км, за каждую последующую — на 15% меньше, чем за предыдущую. При каком минимальном значении H (в километрах) зонд не достигнет поверхности планеты? Двигатели на зонде отсутствуют.

{= 400}

::1.3:: С орбитальной станции, находящейся на высоте H от поверхности неизвестной планеты, выпустили зонд, придав ему некоторую начальную скорость. За первую минуту падения он спустился на 25 км, за каждую последующую — на 10% меньше, чем за предыдущую. При каком минимальном значении H (в километрах) зонд не достигнет поверхности планеты? Двигатели на зонде отсутствуют.

{= 250}

::1.4:: С орбитальной станции, находящейся на высоте H от поверхности неизвестной планеты, выпустили зонд, придав ему некоторую начальную скорость. За первую минуту падения он спустился на 15 км, за каждую последующую — на 30% меньше, чем за предыдущую. При каком минимальном значении H (в километрах) зонд не достигнет поверхности планеты? Двигатели на зонде отсутствуют.

{= 50}

::2.1:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 25% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 15% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

{= 0,89}

::2.2:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 20% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 15% меньше среднего

роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,42\}$$

::2.3:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 25% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 20% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,33\}$$

::2.4:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 15% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 10% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,59\}$$

::3.1:: Брусок соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкого клина с углом $\alpha = 30^\circ$ при основании (клин стоит на гладкой горизонтальной плоскости). В случае, если клин закреплен, брусок, съехав с клина, приобретает скорость 10 м/с. Если же клин может свободно скользить, то скорость бруска, соскальзывающего с вершины клина, у основания клина достигает величины 9 м/с. Какую скорость (в метрах в секунду) приобретет клин в этом случае?

$$\{= 2,44\}$$

::3.2:: Брусок соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкого клина с углом $\alpha = 30^\circ$ при основании (клин стоит на гладкой горизонтальной плоскости). В случае, если клин закреплен, брусок, съехав с клина, приобретает скорость 15 м/с. Если же клин может свободно скользить, то скорость бруска, соскальзывающего с вершины клина, у основания клина достигает величины 14 м/с. Какую скорость (в метрах в секунду) приобретет клин в этом случае?

$$\{= 2,39\}$$

::3.3:: Брусок соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкого клина с углом $\alpha = 45^\circ$ при основании (клин стоит на гладкой горизонтальной плоскости). В случае, если клин закреплен, брусок, съехав с клина, приобретает скорость 8 м/с. Если же клин может свободно скользить, то скорость бруска, соскальзывающего с вершины клина, у основания клина достигает величины 7 м/с. Какую скорость (в метрах в секунду) приобретет клин в этом случае?

$$\{= 3,03\}$$

::3.4:: Брусок соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкого клина с углом $\alpha = 45^\circ$ при основании (клин стоит на гладкой горизонтальной плоскости). В случае, если клин закреплен, брусок, съехав с клина, приобретает скорость 10 м/с. Если же клин может свободно скользить, то скорость бруска, соскальзывающего с вершины клина, у основания клина достигает величины 8 м/с. Какую скорость (в метрах в секунду) приобретет клин в этом случае?

$$\{= 6,36\}$$

::4.1:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не более 10), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в

первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 300. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

{ = 40 }

::4.2:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не менее 10), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 300. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

{ = 52 }

::4.3:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не более 15), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 540. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

{ = 70 }

::4.4:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не более 10), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 714. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

{ = 63 }

::5.1:: Горизонтальный неподвижный теплоизолированный цилиндр разделен на две части непроницаемым легким тонким поршнем. В одной части находится вакуум, а в другой — некоторое количество гелия. В той части сосуда, где вакуум, поршень соединен с концом цилиндра пружиной, подчиняющейся закону Гука, длина недеформированной пружины равна длине цилиндра. Пренебрегая трением и теплоемкостью поршня и цилиндра, определите удельную теплоемкость газа в этой системе. Ответ дайте в единицах СИ, округлив до целых. Значение универсальной газовой постоянной принять равным $8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, молярная масса гелия $4 \text{ г}/\text{моль}$.

{ 4155 }

::5.2:: Горизонтальный неподвижный теплоизолированный цилиндр разделен на две части непроницаемым легким тонким поршнем. В одной части находится вакуум, а в другой — некоторое количество аргона. В той части сосуда, где вакуум, поршень соединен с концом цилиндра пружиной, подчиняющейся закону Гука, длина недеформированной пружины равна длине цилиндра. Пренебрегая трением и теплоемкостью поршня и цилиндра, определите удельную теплоемкость газа в этой системе. Ответ

дайте в единицах СИ, округлив до целых. Значение универсальной газовой постоянной принять равным $8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, молярная масса аргона $40 \text{ г}/\text{моль}$.

{416}

::5.3: Горизонтальный неподвижный теплоизолированный цилиндр разделен на две части непроницаемым легким тонким поршнем. В одной части находится вакуум, а в другой — некоторое количество неона. В той части сосуда, где вакуум, поршень соединен с концом цилиндра пружиной, подчиняющейся закону Гука, длина недеформированной пружины равна длине цилиндра. Пренебрегая трением и теплоемкостью поршня и цилиндра, определите удельную теплоемкость газа в этой системе. Ответ дайте в единицах СИ, округлив до целых. Значение универсальной газовой постоянной принять равным $8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, молярная масса неона $20 \text{ г}/\text{моль}$.

{831}

::5.4: Горизонтальный неподвижный теплоизолированный цилиндр разделен на две части непроницаемым легким тонким поршнем. В одной части находится вакуум, а в другой — некоторое количество криптона. В той части сосуда, где вакуум, поршень соединен с концом цилиндра пружиной, подчиняющейся закону Гука, длина недеформированной пружины равна длине цилиндра. Пренебрегая трением и теплоемкостью поршня и цилиндра, определите удельную теплоемкость газа в этой системе. Ответ дайте в единицах СИ, округлив до целых. Значение универсальной газовой постоянной принять равным $8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, молярная масса криптона $84 \text{ г}/\text{моль}$.

{198}

Решение.

0. Из закона сохранения массы получим $\rho_w V_w = 1 \Rightarrow \rho_i V_i = 1 \Rightarrow V_i = \frac{1}{\rho_i} = \frac{1}{917} = 0,0010905... \text{ м}^3 \approx 1,09$

Ответ: 1,09

1. Бесконечная убывающая геометрическая прогрессия с первым членом 30 и знаменателем $\frac{4}{5} \Rightarrow S = \frac{30}{1-\frac{4}{5}} = \frac{30}{\frac{1}{5}} = 150$

Ответ: 150

2. Пусть m и a — количество учеников младших классов и их средний рост соответственно, а n и b — количество учеников остальных классов и их средний рост. Тогда средний рост учеников школы равен $\frac{am+bn}{m+n}$

По условию: $a = \alpha b$, $\alpha = \left(1 - \frac{25}{100}\right) = \frac{3}{4}$, $a = \beta \frac{am+bn}{m+n}$, $\beta = \left(1 - \frac{15}{100}\right) = \frac{19}{20}$

Поэтому $\alpha b = \beta \frac{\alpha bm+bn}{m+n} \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta-\alpha} = \frac{8}{9} \approx 0,89$

Ответ: 0,89

3. В первом случае брусок соскальзывает со скоростью $V_1 = 10$ м/с. При этом из закона сохранения энергии: $mgh = \frac{mV_1^2}{2}$. Во втором случае: $mgh = \frac{mV_2^2}{2} + \frac{mU^2}{2}$ (закон сохранения энергии) и $MV_2 \cos \alpha = mU$ (закон изменения импульса в проекции на горизонталь). Введем обозначение: $k = \frac{M}{m}$. Тогда из приведенных выше законов можно получить систему двух уравнений

$$\begin{cases} V_1^2 = V_2^2 + kU^2, \\ MU = mV_2 \cos \alpha \end{cases}$$

для двух неизвестных (U , k). Отсюда получим

$$U = \frac{V_1^2 - V_2^2}{V_2 \cos \alpha}. \text{ Подставим данные и получим } U = \frac{(10-9)(10+9)}{4,5\sqrt{3}} \approx 2,44$$

Ответ: 2,44

4. Если обозначить через n количество автобусов и через k количество рейсов каждого из них, то можно подсчитать число встреч (например, по графику, иллюстрирующему движение автобусов). Получается, что каждые два автобуса встречаются $2k - 1$ раз: один раз в течение первого рейса автобуса, вышедшего раньше, и по два раза в течение каждого из остальных рейсов. Поэтому всего встреч $\frac{n(n-1)}{2}(2k - 1) = 300/2$ (число встреч делим пополам, так как каждая из них посчитана дважды). В итоге: $n(n - 1)(2k - 1) = 300$, то есть надо разложить число 300 на три множителя, один из которых на 1 меньше другого, а третий нечетный. Есть два варианта: $300 = 4 \times 3 \times 25$ и $300 = 5 \times 4 \times 15$, откуда следует, что $n = 4$, $k = 13$ или $n = 5$, $k = 8$, но в первом случае количество рейсов превышает 10, что противоречит условию. Значит, было 5 автобусов, каждый из них совершил по 8 рейсов, то есть всего рейсов 40.

Ответ: 40

5. Определим уравнение процесса. Так как поршень легкий, сила упругости пружины в каждый момент времени равна силе давления газа:

$$kx = p(x)S$$

где x — длина цилиндра, занятая газом, по условию она равна сжатию пружины, k — коэффициент жесткости пружины, S — площадь основания цилиндра. Умножив на S обе части равенства, получим

$$p = \alpha V, \quad \alpha = \text{const.}$$

Найдем теплоемкость газа в таком процессе:

$$c = \frac{dQ}{dT}$$

Пусть объем газа V изменился на малую величину dV . Тогда давление изменилось от p на $dp = \alpha dV$, внутренняя энергия на

$$dU = \frac{3}{2}((p + dp)(V + dV) - pV) = \frac{3}{2}(pdV + Vdp) = 3\alpha V dV$$

При этом изменение температуры составит $dT = \frac{2}{3} \frac{dU}{\nu R} = \frac{2\alpha V dV}{\nu R}$.

Газ совершит работу $dA = pdV = \alpha V dV$.

Тепло, подведенное в систему, равно

$$dQ = dU + dA = 4\alpha V dV,$$

а теплоемкость

$$c = \frac{dQ}{dT} = 2\nu R.$$

Для того, чтобы найти удельную теплоемкость необходимо разделить полученную теплоемкость всего газа на его массу $\nu\mu$, где μ — молярная масса газа.

Ответ: $2R/\mu = 4155$ Дж/(кг К).

**Олимпиада школьников «Ломоносов» 2017/2018 учебного года
по механике и математическому моделированию**

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Отборочный этап. Тур 2

10-11 классы

Во всех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). Ответом на каждую из задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления.

::0:: Чему равен объем льда, полученного замораживанием одного литра воды, если плотность воды 1000 кг/м^3 и льда 917 кг/м^3 ? Ответ дать в кубических дециметрах.

{= 1,09}

::1.1:: С орбитальной станции, находящейся на высоте H от поверхности неизвестной планеты, выпустили зонд, придав ему некоторую начальную скорость. За первую минуту падения он спустился на 30 км, за каждую последующую — на 20% меньше, чем за предыдущую. При каком минимальном значении H (в километрах) зонд не достигнет поверхности планеты? Двигатели на зонде отсутствуют.

{= 150}

::1.2:: С орбитальной станции, находящейся на высоте H от поверхности неизвестной планеты, выпустили зонд, придав ему некоторую начальную скорость. За первую минуту падения он спустился на 60 км, за каждую последующую — на 15% меньше, чем за предыдущую. При каком минимальном значении H (в километрах) зонд не достигнет поверхности планеты? Двигатели на зонде отсутствуют.

{= 400}

::1.3:: С орбитальной станции, находящейся на высоте H от поверхности неизвестной планеты, выпустили зонд, придав ему некоторую начальную скорость. За первую минуту падения он спустился на 25 км, за каждую последующую — на 10% меньше, чем за предыдущую. При каком минимальном значении H (в километрах) зонд не достигнет поверхности планеты? Двигатели на зонде отсутствуют.

{= 250}

::1.4:: С орбитальной станции, находящейся на высоте H от поверхности неизвестной планеты, выпустили зонд, придав ему некоторую начальную скорость. За первую минуту падения он спустился на 15 км, за каждую последующую — на 30% меньше, чем за предыдущую. При каком минимальном значении H (в километрах) зонд не достигнет поверхности планеты? Двигатели на зонде отсутствуют.

{= 50}

::2.1:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 25% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 15% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

{= 0,89}

::2.2:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 20% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 15% меньше среднего

роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,42\}$$

::2.3:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 25% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 20% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,33\}$$

::2.4:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 15% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 10% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,59\}$$

::3.1:: Брусок соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкого клина с углом $\alpha = 30^\circ$ при основании (клин стоит на гладкой горизонтальной плоскости). В случае, если клин закреплен, брусок, съехав с клина, приобретает скорость 10 м/с. Если же клин может свободно скользить, то скорость бруска, соскальзывающего с вершины клина, у основания клина достигает величины 9 м/с. Какую скорость (в метрах в секунду) приобретет клин в этом случае?

$$\{= 14,06\} \text{ или } \{= 2,70\}$$

::3.2:: Брусок соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкого клина с углом $\alpha = 30^\circ$ при основании (клин стоит на гладкой горизонтальной плоскости). В случае, если клин закреплен, брусок, съехав с клина, приобретает скорость 15 м/с. Если же клин может свободно скользить, то скорость бруска, соскальзывающего с вершины клина, у основания клина достигает величины 14 м/с. Какую скорость (в метрах в секунду) приобретет клин в этом случае?

$$\{= 22,88\} \text{ или } \{= 2,53\}$$

::3.3:: Брусок соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкого клина с углом $\alpha = 45^\circ$ при основании (клин стоит на гладкой горизонтальной плоскости). В случае, если клин закреплен, брусок, съехав с клина, приобретает скорость 8 м/с. Если же клин может свободно скользить, то скорость бруска, соскальзывающего с вершины клина, у основания клина достигает величины 7 м/с. Какую скорость (в метрах в секунду) приобретет клин в этом случае?

нет решений

::3.4:: Брусок соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкого клина с углом $\alpha = 45^\circ$ при основании (клин стоит на гладкой горизонтальной плоскости). В случае, если клин закреплен, брусок, съехав с клина, приобретает скорость 10 м/с. Если же клин может свободно скользить, то скорость бруска, соскальзывающего с вершины клина, у основания клина достигает величины 8 м/с. Какую скорость (в метрах в секунду) приобретет клин в этом случае?

нет решений

::4.1:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не более 10), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в

первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 300. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.
{= 40}

::4.2:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не менее 10), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 300. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.
{= 52}

::4.3:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не более 15), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 540. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.
{= 70}

::4.4:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не более 10), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 714. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.
{= 63}

::5.1:: Горизонтальный неподвижный теплоизолированный цилиндр разделен на две части непроницаемым легким тонким поршнем. В одной части находится вакуум, а в другой — некоторое количество гелия. В той части сосуда, где вакуум, поршень соединен с концом цилиндра пружиной, подчиняющейся закону Гука, длина недеформированной пружины равна длине цилиндра. Пренебрегая трением и теплоемкостью поршня и цилиндра, определите удельную теплоемкость газа в этой системе. Ответ дайте в единицах СИ, округлив до целых. Значение универсальной газовой постоянной принять равным $8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, молярная масса гелия $4 \text{ г}/\text{моль}$.
{4155}

::5.2:: Горизонтальный неподвижный теплоизолированный цилиндр разделен на две части непроницаемым легким тонким поршнем. В одной части находится вакуум, а в другой — некоторое количество аргона. В той части сосуда, где вакуум, поршень соединен с концом цилиндра пружиной, подчиняющейся закону Гука, длина недеформированной пружины равна длине цилиндра. Пренебрегая трением и теплоемкостью поршня и цилиндра, определите удельную теплоемкость газа в этой системе. Ответ

дайте в единицах СИ, округлив до целых. Значение универсальной газовой постоянной принять равным $8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, молярная масса аргона $40 \text{ г}/\text{моль}$.

{416}

::5.3: Горизонтальный неподвижный теплоизолированный цилиндр разделен на две части непроницаемым легким тонким поршнем. В одной части находится вакуум, а в другой — некоторое количество неона. В той части сосуда, где вакуум, поршень соединен с концом цилиндра пружиной, подчиняющейся закону Гука, длина недеформированной пружины равна длине цилиндра. Пренебрегая трением и теплоемкостью поршня и цилиндра, определите удельную теплоемкость газа в этой системе. Ответ дайте в единицах СИ, округлив до целых. Значение универсальной газовой постоянной принять равным $8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, молярная масса неона $20 \text{ г}/\text{моль}$.

{831}

::5.4: Горизонтальный неподвижный теплоизолированный цилиндр разделен на две части непроницаемым легким тонким поршнем. В одной части находится вакуум, а в другой — некоторое количество криптона. В той части сосуда, где вакуум, поршень соединен с концом цилиндра пружиной, подчиняющейся закону Гука, длина недеформированной пружины равна длине цилиндра. Пренебрегая трением и теплоемкостью поршня и цилиндра, определите удельную теплоемкость газа в этой системе. Ответ дайте в единицах СИ, округлив до целых. Значение универсальной газовой постоянной принять равным $8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, молярная масса криптона $84 \text{ г}/\text{моль}$.

{198}

Решение.

0. Из закона сохранения массы получим $\rho_w V_w = 1 \Rightarrow \rho_i V_i = 1 \Rightarrow V_i = \frac{1}{\rho_i} = \frac{1}{917} = 0,0010905... \text{ м}^3 \approx 1,09$

Ответ: 1,09

1. Бесконечная убывающая геометрическая прогрессия с первым членом 30 и знаменателем $\frac{4}{5} \Rightarrow S = \frac{30}{1-\frac{4}{5}} = \frac{30}{\frac{1}{5}} = 150$

Ответ: 150

2. Пусть m и a — количество учеников младших классов и их средний рост соответственно, а n и b — количество учеников остальных классов и их средний рост. Тогда средний рост учеников школы равен $\frac{am+bn}{m+n}$

По условию: $a = \alpha b$, $\alpha = \left(1 - \frac{25}{100}\right) = \frac{3}{4}$, $a = \beta \frac{am+bn}{m+n}$, $\beta = \left(1 - \frac{15}{100}\right) = \frac{19}{20}$

Поэтому $\alpha b = \beta \frac{\alpha bm+bn}{m+n} \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta-\alpha} = \frac{8}{9} \approx 0,89$

Ответ: 0,89

3. В первом случае брусок соскальзывает со скоростью $V_1 = 10 \text{ м/с}$. При этом из закона сохранения энергии: $mgh = \frac{mV_1^2}{2}$. Во втором случае: $mgh = \frac{mV_2^2}{2} + \frac{mU^2}{2}$.

Пусть w — скорость бруска относительно клина, она направлена под углом α к горизонту. По закону сложения скоростей горизонтальная компонента скорости равна $W \cos \alpha - U$ (скорость клина U направлена противоположно направлению соскальзывания), и из закона сохранения импульса в проекции на горизонталь имеем $MU = m(W \cos \alpha - U)$.

По закону сложения скоростей и теореме косинусов имеем $V_2^2 = W^2 + U^2 - 2UW \cos \alpha$.

Из этих четырех уравнений относительно четырех неизвестных (h , m/M , U , W) получим биквадратное уравнение относительно U :

$$U^4 \sin^2 \alpha + U^2 [2V_1^2 \sin^2 \alpha - V_2^2(1 + \sin^2 \alpha)] + (V_1^2 - V_2^2)^2 = 0$$

откуда получается два возможных значения U .

Ответ: 14.06 или 2.70

4. Если обозначить через n количество автобусов и через k количество рейсов каждого из них, то можно подсчитать число встреч (например, по графику, иллюстрирующему движение автобусов). Получается, что каждые два автобуса встречаются $2k - 1$ раз: один раз в течение первого рейса автобуса, вышедшего раньше, и по два раза в течение каждого из остальных рейсов. Поэтому всего встреч $\frac{n(n-1)}{2}(2k - 1) = 300/2$ (число встреч делим пополам, так как каждая из них посчитана дважды). В итоге: $n(n - 1)(2k - 1) = 300$, то есть надо разложить число 300 на три множителя, один из которых на 1 меньше другого, а третий нечетный. Есть два варианта: $300 = 4 \times 3 \times 25$ и $300 = 5 \times 4 \times 15$, откуда следует, что $n = 4$, $k = 13$ или $n = 5$, $k = 8$, но в первом случае количество рейсов превышает 10, что противоречит условию. Значит, было 5 автобусов, каждый из них совершил по 8 рейсов, то есть всего рейсов 40.

Ответ: 40

5. Определим уравнение процесса. Так как поршень легкий, сила упругости пружины в каждый момент времени равна силе давления газа:

$$kx = p(x)S$$

где x — длина цилиндра, занятая газом, по условию она равна сжатию пружины, k — коэффициент жесткости пружины, S — площадь основания цилиндра. Умножив на S обе части равенства, получим

$$p = \alpha V, \quad \alpha = \text{const.}$$

Найдем теплоемкость газа в таком процессе:

$$c = \frac{dQ}{dT}$$

Пусть объем газа V изменился на малую величину dV . Тогда давление изменилось от p на $dp = \alpha dV$, внутренняя энергия на

$$dU = \frac{3}{2}((p + dp)(V + dV) - pV) = \frac{3}{2}(pdV + Vdp) = 3\alpha V dV$$

При этом изменение температуры составит $dT = \frac{2}{3} \frac{dU}{\nu R} = \frac{2\alpha V dV}{\nu R}$.

Газ совершит работу $dA = pdV = \alpha V dV$.

Тепло, подведенное в систему, равно

$$dQ = dU + dA = 4\alpha V dV,$$

а теплоемкость

$$c = \frac{dQ}{dT} = 2\nu R.$$

Для того, чтобы найти удельную теплоемкость необходимо разделить полученную теплоемкость всего газа на его массу $\nu\mu$, где μ — молярная масса газа.

Ответ: $2R/\mu = 4155$ Дж/(кг К).

**Олимпиада школьников «Ломоносов» 2017/2018 учебного года
по механике и математическому моделированию**

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Отборочный этап

9 класс

Во всех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). Ответом на каждую из задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления.

::1.1.: Каждый из пяти серверов разной производительности обрабатывает один и тот же объем информации. Если бы первый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее, то суммарное время их работы уменьшилось бы на 15%. Если бы второй сервер делал это в два раза быстрее, то суммарное время работы уменьшилось бы на 10%. Если бы третий делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 8% меньше времени. Если бы четвертый делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 6% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее?

{= 11}

::1.2.: Каждый из пяти серверов разной производительности обрабатывает один и тот же объем информации. Если бы первый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее, то суммарное время их работы уменьшилось бы на 15%. Если бы второй сервер делал это в два раза быстрее, то суммарное время работы уменьшилось бы на 12%. Если бы третий делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 9% меньше времени. Если бы четвертый делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 6% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее?

{= 8}

::1.3.: Каждый из пяти серверов разной производительности обрабатывает один и тот же объем информации. Если бы первый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее, то суммарное время их работы уменьшилось бы на 14%. Если бы второй сервер делал это в два раза быстрее, то суммарное время работы уменьшилось бы на 11%. Если бы третий делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 8% меньше времени. Если бы четвертый делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 7% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее?

{= 10}

::1.4.: Каждый из пяти серверов разной производительности обрабатывает один и тот же объем информации. Если бы первый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее, то суммарное время их работы уменьшилось бы на 16%. Если бы второй сервер делал это в два раза быстрее, то суммарное время работы уменьшилось бы на 12%. Если бы третий делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 8% меньше времени. Если бы четвертый делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 5% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее?

{= 9}

::2.1:: Гаврила ставил опыты с растворами соли. Он взял стакан слабого раствора и смешал его с некоторым количеством концентрированного, в котором доля соли в 5 раз больше. При этом концентрация смеси оказалась равна среднему гармоническому концентраций исходных растворов. Глафира взяла те же ингредиенты, что и Гаврила, но слабого раствора у нее было вдвое больше. Во сколько раз концентрация ее смеси оказалась меньше, чем смеси Гаврилы? Объемы при смешивании не изменяются.

{= 1,22}

::2.2:: Гаврила ставил опыты с растворами соли. Он взял стакан слабого раствора и смешал его с некоторым количеством концентрированного, в котором доля соли в 3 раз больше. При этом концентрация смеси оказалась равна среднему гармоническому концентраций исходных растворов. Глафира взяла те же ингредиенты, что и Гаврила, но слабого раствора у нее было втрое больше. Во сколько раз концентрация ее смеси оказалась меньше, чем смеси Гаврилы? Объемы при смешивании не изменяются.

{= 1,3}

::2.3:: Гаврила ставил опыты с растворами соли. Он взял стакан слабого раствора и смешал его с некоторым количеством концентрированного, в котором доля соли в 5 раз больше. При этом концентрация смеси оказалась равна среднему гармоническому концентраций исходных растворов. Глафира взяла те же ингредиенты, что и Гаврила, но слабого раствора у нее было втрое больше. Во сколько раз концентрация ее смеси оказалась меньше, чем смеси Гаврилы? Объемы при смешивании не изменяются.

{= 1,33}

::2.4:: Гаврила ставил опыты с растворами соли. Он взял стакан слабого раствора и смешал его с некоторым количеством концентрированного, в котором доля соли в 4 раз больше. При этом концентрация смеси оказалась равна среднему гармоническому концентраций исходных растворов. Глафира взяла те же ингредиенты, что и Гаврила, но слабого раствора у нее было вдвое больше. Во сколько раз концентрация ее смеси оказалась меньше, чем смеси Гаврилы? Объемы при смешивании не изменяются.

{= 1,2}

::3.1::Для того чтобы удлинить две пружины на одну и ту же заданную величину, ко второй пружине следует приложить силу 60 Н, а к первой — в два раза меньшую. С какой силой (в ньютонах) надо подействовать на систему из параллельно соединенных двух данных пружин, чтобы растянуть эту систему на ту же величину удлинения?

{= 90}

::3.2::Для того чтобы удлинить две пружины на одну и ту же заданную величину, к первой пружине следует приложить силу 30 Н, а ко второй — в три раза большую. С какой силой (в ньютонах) надо подействовать на систему из параллельно соединенных двух данных пружин, чтобы растянуть эту систему на ту же величину удлинения?

{= 120}

::3.3::Для того чтобы удлинить две пружины на одну и ту же заданную величину, ко второй пружине следует приложить силу 50 Н, а к первой — в два раза меньшую. С какой силой (в ньютонах) надо подействовать на систему из параллельно соединенных двух данных пружин, чтобы растянуть эту систему на ту же величину удлинения?

{= 75}

::3.4::Для того чтобы удлинить две пружины на одну и ту же заданную величину, к первой пружине следует приложить силу 25 Н, а ко второй — в три раза большую. С

какой силой (в ньютонах) надо подействовать на систему из параллельно соединенных двух данных пружин, чтобы растянуть эту систему на ту же величину удлинения?

$$\{= 100\}$$

::4.1:: Два теплохода вышли в трансатлантический круиз. Каждый из них движется по своей прямолинейной траектории, с постоянной скоростью. В полночь расстояние между ними было равно 110 миль, через 7 часов — 100 миль, а еще через 8 часов — 140 миль. Найдите минимальное расстояние между теплоходами (в милях) в процессе их движения.

$$\{=97,98\}$$

::4.2:: Два теплохода вышли в трансатлантический круиз. Каждый из них движется по своей прямолинейной траектории, с постоянной скоростью. В полночь расстояние между ними было равно 33 мили, через 17 часов — 18 миль, а еще через 18 часов — 12 миль. Найдите минимальное расстояние между теплоходами (в милях) в процессе их движения.

$$\{=11,31\}$$

::4.3:: Два теплохода вышли в трансатлантический круиз. Каждый из них движется по своей прямолинейной траектории, с постоянной скоростью. В полдень расстояние между ними было равно 110 миль, через 15 часов — 140 миль, а еще через 13 часов — 250 миль. Найдите минимальное расстояние между теплоходами (в милях) в процессе их движения.

$$\{=97,98\}$$

::4.4:: Два теплохода вышли в трансатлантический круиз. Каждый из них движется по своей прямолинейной траектории, с постоянной скоростью. В полдень расстояние между ними было равно 18 миль, через 18 часов — 12 миль, а еще через 27 часов — 33 мили. Найдите минимальное расстояние между теплоходами (в милях) в процессе их движения.

$$\{=11,31\}$$

::5.1:: В одном из двух сообщающихся сосудов, площадь сечения которого равна $S_1 = 3 \text{ см}^2$, непосредственно над уровнем воды находится пробка, которую можно вытащить, если приложить силу не меньше, чем $F = 1 \text{ Н}$. Какое количество воды (в кг) надо налить во второй сосуд с площадью сечения $S_2 = 12 \text{ см}^2$, чтобы пробка поднялась на высоту $h = 4 \text{ см}$? Считать $g = 10 \text{ м/с}^2$.

$$\{= 0,46\}$$

::5.2:: В одном из двух сообщающихся сосудов, площадь сечения которого равна $S_1 = 4 \text{ см}^2$, непосредственно над уровнем воды находится пробка, которую можно вытащить, если приложить силу не меньше, чем $F = 1 \text{ Н}$. Какое количество воды (в кг) надо налить во второй сосуд с площадью сечения $S_2 = 12 \text{ см}^2$, чтобы пробка поднялась на высоту $h = 5 \text{ см}$? Считать $g = 10 \text{ м/с}^2$.

$$\{= 0,38\}$$

::5.3:: В одном из двух сообщающихся сосудов, площадь сечения которого равна $S_1 = 5 \text{ см}^2$, непосредственно над уровнем воды находится пробка, которую можно вытащить, если приложить силу не меньше, чем $F = 1 \text{ Н}$. Какое количество воды (в кг) надо налить во второй сосуд с площадью сечения $S_2 = 10 \text{ см}^2$, чтобы пробка поднялась на высоту $h = 6 \text{ см}$? Считать $g = 10 \text{ м/с}^2$.

$$\{= 0,29\}$$

::5.4:: В одном из двух сообщающихся сосудов, площадь сечения которого равна $S_1 = 2 \text{ см}^2$, непосредственно над уровнем воды находится пробка, которую можно вытащить,

если приложить силу не меньше, чем $F = 1$ Н. Какое количество воды (в кг) надо налить во второй сосуд с площадью сечения $S_2 = 8$ см², чтобы пробка поднялась на высоту $h = 2$ см? Считать $g = 10$ м/с².

{= 0,42}

Решение.

1. Если бы каждый работал в два раза быстрее, то они потратили бы времени на 50% меньше. Значит, если бы 5 й делал это в 2 раза быстрее, то время уменьшилось бы на $50 - 15 - 10 - 8 - 6 = 11$. Ответ: На 11%.

2. Пусть слабый раствор имеет концентрацию n_1 , а концентрированный — kn_1 . Для первого опыта закон сохранения массы влечет:

$$n_1V_1 + kn_1V_2 = (V_1 + V_2) \frac{2n_1 \cdot kn_1}{(k+1)n_1},$$

поэтому $V_1 = kV_2$, V_1 и V_2 — объемы слабого и концентрированного растворов соответственно.

Опыт Глафиры, которая взяла в m больше слабого раствора, описывается соотношением:

$$mn_1V_1 + kn_1V_2 = (V_1 + V_2)n',$$

поэтому

$$n' = \frac{(m+1)k}{mk+1}.$$

Так как Гаврила получил раствор с концентрацией $n_0 = 2k/(k+1)$, получаем ответ:

$$\alpha = \frac{n_0}{n'} = \frac{2(mk+1)}{(m+1)(k+1)} = \frac{11}{9}$$

Ответ: 1,22

3. Закон Гука для данных пружин приводит к соотношениям: $k_1\Delta l = F_1$, $k_2\Delta l = F_2$. При параллельном соединении пружин общая сила, равна сумме сил, действующих на каждую пружину, а жесткость определяется суммированием жесткостей каждой пружины: $F = F_1 + F_2 \rightarrow k = k_1 + k_2$. Тогда получим $F = F_1 + F_2 = 90$ Н

Ответ: 90

4. Так как перемещение вдоль прямой у каждого теплохода линейно зависит от времени, то по теореме косинусов квадрат расстояния между ними выражается квадратичной зависимостью: $r^2 = At^2 + Bt + C$. Принимаем начальный момент времени за $t = 0$. Тогда $110^2 = C$, $100^2 = 7^2 \cdot A + 7B + C$, $140^2 = 15^2 \cdot A + 15B + C$. Отсюда $C = 12100$, $A = 100$, $B = -1000$, то есть $r^2 = 100t^2 - 1000t + 12100 = 100((t-5)^2 + 96)$. Поэтому минимальным расстояние будет при $t = 5$, и равно оно $\sqrt{9600} \approx 97,98$.

Ответ: 97,98 миль.

5. Для того, чтобы пробка тронулась с места, необходимо создать дополнительное давление: $p_1 = \frac{F}{S_1}$. Для этого в широкий сосуд надо налить массу воды $M_1 = S_2\delta\rho$, где δ определяется из условия равновесия в момент начала движения пробки: $p_1 = \rho g\delta$. Затем надо добавить воды $M_2 = h(S_1 + S_2)\rho$. Общая масса необходимой воды равен: $M = M_1 + M_2$. Подставляя данные задачи, получим: $\delta = 25$ см, $M_1 = 300$ г, $M_2 = 80$ г

Ответ: $M = 380$ г

Олимпиада школьников «Ломоносов» 2017/2018 учебного года
по механике и математическому моделированию

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Отборочный этап. Тур 2

9 класс

Во всех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). Ответом на каждую из задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления.

::0:: Один насос наполняет резервуар за 6 часов, а второй — за 4 часа. За сколько часов наполнится резервуар, если оба насоса включить одновременно?

{2, 4}

::1.1:: Чему равен объем льда, полученного замораживанием одного литра воды, если плотность воды 1000 кг/м^3 и льда 917 кг/м^3 ? Ответ дать в кубических дециметрах.

{= 1, 09}

::1.2:: Чему равен объем воды, полученной при таянии одного кубического дециметра льда, если плотность воды 1000 кг/м^3 и льда 917 кг/м^3 ? Ответ дать в литрах.

{= 0, 92}

::1.3:: Чему равен объем льда, полученного замораживанием двух литров воды, если плотность воды 1000 кг/м^3 и льда 917 кг/м^3 ? Ответ дать в кубических дециметрах.

{= 2, 18}

::1.4:: Чему равен объем воды, полученной при таянии двух кубических дециметров льда, если плотность воды 1000 кг/м^3 и льда 917 кг/м^3 ? Ответ дать в литрах.

{= 1, 83}

::2.1:: С орбитальной станции, находящейся на высоте H от поверхности неизвестной планеты, выпустили зонд, придав ему некоторую начальную скорость. За первую минуту падения он спустился на 30 км, за каждую последующую — на 20% меньше, чем за предыдущую. При каком минимальном значении H (в километрах) зонд не достигнет поверхности планеты? Двигатели на зонде отсутствуют.

{= 150}

::2.2:: С орбитальной станции, находящейся на высоте H от поверхности неизвестной планеты, выпустили зонд, придав ему некоторую начальную скорость. За первую минуту падения он спустился на 60 км, за каждую последующую — на 15% меньше, чем за предыдущую. При каком минимальном значении H (в километрах) зонд не достигнет поверхности планеты? Двигатели на зонде отсутствуют.

{= 400}

::2.3:: С орбитальной станции, находящейся на высоте H от поверхности неизвестной планеты, выпустили зонд, придав ему некоторую начальную скорость. За первую минуту падения он спустился на 25 км, за каждую последующую — на 10% меньше, чем за предыдущую. При каком минимальном значении H (в километрах) зонд не достигнет поверхности планеты? Двигатели на зонде отсутствуют.

{= 250}

::2.4:: С орбитальной станции, находящейся на высоте H от поверхности неизвестной планеты, выпустили зонд, придав ему некоторую начальную скорость. За первую минуту падения он спустился на 15 км, за каждую последующую — на 30% меньше, чем за предыдущую. При каком минимальном значении H (в километрах) зонд не достигнет поверхности планеты? Двигатели на зонде отсутствуют.

$$\{= 50\}$$

::3.1:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 25% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 15% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,89\}$$

::3.2:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 20% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 15% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,42\}$$

::3.3:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 25% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 20% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,33\}$$

::3.4:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 15% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 10% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,59\}$$

::4.1:: Брусок соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкого клина с углом $\alpha = 30^\circ$ при основании (клин стоит на гладкой горизонтальной плоскости). В случае, если клин закреплен, брусок, съехав с клина, приобретает скорость 10 м/с. Если же клин может свободно скользить, то скорость бруска, соскальзывающего с вершины клина, у основания клина достигает величины 9 м/с. Какую скорость (в метрах в секунду) приобретет клин в этом случае?

$$\{= 2,44\}$$

::4.2:: Брусок соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкого клина с углом $\alpha = 30^\circ$ при основании (клин стоит на гладкой горизонтальной плоскости). В случае, если клин закреплен, брусок, съехав с клина, приобретает скорость 15 м/с. Если же клин может свободно скользить, то скорость бруска, соскальзывающего с вершины клина, у основания клина достигает величины 14 м/с. Какую скорость (в метрах в секунду) приобретет клин в этом случае?

$$\{= 2,39\}$$

::4.3:: Брусок соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкого клина с углом $\alpha = 45^\circ$ при основании (клин стоит на гладкой горизонтальной плоскости). В случае, если клин закреплен, брусок, съехав с клина, приобретает скорость 8 м/с. Если же клин может свободно скользить, то скорость бруска, соскальзывающего с вершины клина, у основания клина достигает величины 7 м/с. Какую скорость (в метрах в секунду) приобретет клин в этом случае?

$$\{= 3,03\}$$

::4.4:: Брусок соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкого клина с углом $\alpha = 45^\circ$ при основании (клин стоит на гладкой горизонтальной плоскости). В случае, если клин закреплен, брусок, съехав с клина, приобретает скорость 10 м/с. Если же клин может свободно скользить, то скорость бруска, соскальзывающего с вершины клина, у основания клина достигает величины 8 м/с. Какую скорость (в метрах в секунду) приобретет клин в этом случае?

$$\{= 6,36\}$$

::5.1:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не более 10), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 300. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

$$\{= 40\}$$

::5.2:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не менее 10), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 300. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

$$\{= 52\}$$

::5.3:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не более 15), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 540. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

$$\{= 70\}$$

::5.4:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не более 10), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 714. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

$$\{= 63\}$$

Решение.

$$0. t = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{12}{5} = 2,4$$

Ответ: 2,4 часа

1. Из закона сохранения массы получим $\rho_w V_w = 1 \Rightarrow \rho_i V_i = 1 \Rightarrow V_i = \frac{1}{\rho_i} = \frac{1}{917} = 0,0010905... \text{ м}^3 \approx 1,09$

Ответ: 1,09

2. Бесконечная убывающая геометрическая прогрессия с первым членом 30 и знаменателем $\frac{4}{5} \Rightarrow S = \frac{30}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{30}{\frac{1}{5}} = 150$

Ответ: 150

3. Пусть m и a — количество учеников младших классов и их средний рост соответственно, а n и b — количество учеников остальных классов и их средний рост. Тогда средний рост учеников школы равен $\frac{am+bn}{m+n}$

$$\text{По условию: } a = \alpha b, \alpha = \left(1 - \frac{25}{100}\right) = \frac{3}{4}, a = \beta \frac{am+bn}{m+n}, \beta = \left(1 - \frac{15}{100}\right) = \frac{19}{20}$$

$$\text{Поэтому } \alpha b = \beta \frac{\alpha bm+bn}{m+n} \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta - \alpha} = \frac{8}{9} \approx 0,89$$

Ответ: 0,89

4. В первом случае брусок соскальзывает со скоростью $V_1 = 10 \text{ м/с}$. При этом из закона сохранения энергии: $mgh = \frac{mV_1^2}{2}$. Во втором случае: $mgh = \frac{mV_2^2}{2} + \frac{mU^2}{2}$ (закон сохранения энергии) и $MV_2 \cos \alpha = mU$ (закон изменения импульса в проекции на горизонталь). Введем обозначение: $k = \frac{M}{m}$. Тогда из приведенных выше законов можно получить систему двух уравнений

$$\begin{cases} V_1^2 = V_2^2 + kU^2, \\ MU = mV_2 \cos \alpha \end{cases}$$

для двух неизвестных (U, k). Отсюда получим

$$U = \frac{V_1^2 - V_2^2}{V_2 \cos \alpha}. \text{ Подставим данные и получим } U = \frac{(10-9)(10+9)}{4,5\sqrt{3}} \approx 2,44$$

Ответ: 2,44

5. Если обозначить через n количество автобусов и через k количество рейсов каждого из них, то можно подсчитать число встреч (например, по графику, иллюстрирующему движение автобусов). Получается, что каждые два автобуса встречаются $2k - 1$ раз: один раз в течение первого рейса автобуса, вышедшего раньше, и по два раза в течение каждого из остальных рейсов. Поэтому всего встреч $\frac{n(n-1)}{2}(2k - 1) = 300/2$ (число встреч делим пополам, так как каждая из них посчитана дважды). В итоге: $n(n - 1)(2k - 1) = 300$, то есть надо разложить число 300 на три множителя, один из которых на 1 меньше другого, а третий нечетный. Есть два варианта: $300 = 4 \times 3 \times 25$ и $300 = 5 \times 4 \times 15$, откуда следует, что $n = 4, k = 13$ или $n = 5, k = 8$, но в первом случае количество рейсов превышает 10, что противоречит условию. Значит, было 5 автобусов, каждый из них совершил по 8 рейсов, то есть всего рейсов 40.

Ответ: 40

Олимпиада школьников «Ломоносов» 2017/2018 учебного года
по механике и математическому моделированию

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Отборочный этап. Тур 2

9 класс

Во всех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). Ответом на каждую из задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления.

::0:: Один насос наполняет резервуар за 6 часов, а второй — за 4 часа. За сколько часов наполнится резервуар, если оба насоса включить одновременно?

{2, 4}

::1.1:: Чему равен объем льда, полученного замораживанием одного литра воды, если плотность воды 1000 кг/м^3 и льда 917 кг/м^3 ? Ответ дать в кубических дециметрах.

{= 1, 09}

::1.2:: Чему равен объем воды, полученной при таянии одного кубического дециметра льда, если плотность воды 1000 кг/м^3 и льда 917 кг/м^3 ? Ответ дать в литрах.

{= 0, 92}

::1.3:: Чему равен объем льда, полученного замораживанием двух литров воды, если плотность воды 1000 кг/м^3 и льда 917 кг/м^3 ? Ответ дать в кубических дециметрах.

{= 2, 18}

::1.4:: Чему равен объем воды, полученной при таянии двух кубических дециметров льда, если плотность воды 1000 кг/м^3 и льда 917 кг/м^3 ? Ответ дать в литрах.

{= 1, 83}

::2.1:: С орбитальной станции, находящейся на высоте H от поверхности неизвестной планеты, выпустили зонд, придав ему некоторую начальную скорость. За первую минуту падения он спустился на 30 км, за каждую последующую — на 20% меньше, чем за предыдущую. При каком минимальном значении H (в километрах) зонд не достигнет поверхности планеты? Двигатели на зонде отсутствуют.

{= 150}

::2.2:: С орбитальной станции, находящейся на высоте H от поверхности неизвестной планеты, выпустили зонд, придав ему некоторую начальную скорость. За первую минуту падения он спустился на 60 км, за каждую последующую — на 15% меньше, чем за предыдущую. При каком минимальном значении H (в километрах) зонд не достигнет поверхности планеты? Двигатели на зонде отсутствуют.

{= 400}

::2.3:: С орбитальной станции, находящейся на высоте H от поверхности неизвестной планеты, выпустили зонд, придав ему некоторую начальную скорость. За первую минуту падения он спустился на 25 км, за каждую последующую — на 10% меньше, чем за предыдущую. При каком минимальном значении H (в километрах) зонд не достигнет поверхности планеты? Двигатели на зонде отсутствуют.

{= 250}

::2.4.: С орбитальной станции, находящейся на высоте H от поверхности неизвестной планеты, выпустили зонд, придав ему некоторую начальную скорость. За первую минуту падения он спустился на 15 км, за каждую последующую — на 30% меньше, чем за предыдущую. При каком минимальном значении H (в километрах) зонд не достигнет поверхности планеты? Двигатели на зонде отсутствуют.

$$\{= 50\}$$

::3.1.: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 25% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 15% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,89\}$$

::3.2.: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 20% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 15% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,42\}$$

::3.3.: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 25% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 20% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,33\}$$

::3.4.: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 15% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 10% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,59\}$$

::4.1.: Брусок соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкого клина с углом $\alpha = 30^\circ$ при основании (клин стоит на гладкой горизонтальной плоскости). В случае, если клин закреплен, брусок, съехав с клина, приобретает скорость 10 м/с. Если же клин может свободно скользить, то скорость бруска, соскальзывающего с вершины клина, у основания клина достигает величины 9 м/с. Какую скорость (в метрах в секунду) приобретет клин в этом случае?

$$\{= 2,44\}$$

::4.2.: Брусок соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкого клина с углом $\alpha = 30^\circ$ при основании (клин стоит на гладкой горизонтальной плоскости). В случае, если клин закреплен, брусок, съехав с клина, приобретает скорость 15 м/с. Если же клин может свободно скользить, то скорость бруска, соскальзывающего с вершины клина, у основания клина достигает величины 14 м/с. Какую скорость (в метрах в секунду) приобретет клин в этом случае?

$$\{= 2,39\}$$

::4.3.: Брусок соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкого клина с углом $\alpha = 45^\circ$ при основании (клин стоит на гладкой горизонтальной плоскости). В случае, если клин закреплен, брусок, съехав с клина, приобретает скорость 8 м/с. Если же клин может свободно скользить, то скорость бруска, соскальзывающего с вершины клина, у основания клина достигает величины 7 м/с. Какую скорость (в метрах в секунду) приобретет клин в этом случае?

$$\{= 3,03\}$$

::4.4:: Брусок соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкого клина с углом $\alpha = 45^\circ$ при основании (клин стоит на гладкой горизонтальной плоскости). В случае, если клин закреплен, брусок, съехав с клина, приобретает скорость 10 м/с. Если же клин может свободно скользить, то скорость бруска, соскальзывающего с вершины клина, у основания клина достигает величины 8 м/с. Какую скорость (в метрах в секунду) приобретет клин в этом случае?

$$\{= 6,36\}$$

::5.1:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не более 10), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 300. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

$$\{= 40\}$$

::5.2:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не менее 10), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 300. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

$$\{= 52\}$$

::5.3:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не более 15), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 540. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

$$\{= 70\}$$

::5.4:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не более 10), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 714. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

$$\{= 63\}$$

Решение.

$$0. t = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{12}{5} = 2,4$$

Ответ: 2,4 часа

1. Из закона сохранения массы получим $\rho_w V_w = 1 \Rightarrow \rho_i V_i = 1 \Rightarrow V_i = \frac{1}{\rho_i} = \frac{1}{917} = 0,0010905... \text{ м}^3 \approx 1,09$

Ответ: 1,09

2. Бесконечная убывающая геометрическая прогрессия с первым членом 30 и знаменателем $\frac{4}{5} \Rightarrow S = \frac{30}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{30}{\frac{1}{5}} = 150$

Ответ: 150

3. Пусть m и a — количество учеников младших классов и их средний рост соответственно, а n и b — количество учеников остальных классов и их средний рост. Тогда средний рост учеников школы равен $\frac{am+bn}{m+n}$

$$\text{По условию: } a = \alpha b, \alpha = \left(1 - \frac{25}{100}\right) = \frac{3}{4}, a = \beta \frac{am+bn}{m+n}, \beta = \left(1 - \frac{15}{100}\right) = \frac{19}{20}$$

$$\text{Поэтому } \alpha b = \beta \frac{\alpha bm+bn}{m+n} \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta - \alpha} = \frac{8}{9} \approx 0,89$$

Ответ: 0,89

4. В первом случае брусок соскальзывает со скоростью $V_1 = 10 \text{ м/с}$. При этом из закона сохранения энергии: $mgh = \frac{mV_1^2}{2}$. Во втором случае: $mgh = \frac{mV_2^2}{2} + \frac{mU^2}{2}$ (закон сохранения энергии) и $MV_2 \cos \alpha = mU$ (закон изменения импульса в проекции на горизонталь). Введем обозначение: $k = \frac{M}{m}$. Тогда из приведенных выше законов можно получить систему двух уравнений

$$\begin{cases} V_1^2 = V_2^2 + kU^2, \\ MU = mV_2 \cos \alpha \end{cases}$$

для двух неизвестных (U, k). Отсюда получим

$$U = \frac{V_1^2 - V_2^2}{V_2 \cos \alpha}. \text{ Подставим данные и получим } U = \frac{(10-9)(10+9)}{4,5\sqrt{3}} \approx 2,44$$

Ответ: 2,44

5. Если обозначить через n количество автобусов и через k количество рейсов каждого из них, то можно подсчитать число встреч (например, по графику, иллюстрирующему движение автобусов). Получается, что каждые два автобуса встречаются $2k - 1$ раз: один раз в течение первого рейса автобуса, вышедшего раньше, и по два раза в течение каждого из остальных рейсов. Поэтому всего встреч $\frac{n(n-1)}{2}(2k - 1) = 300/2$ (число встреч делим пополам, так как каждая из них посчитана дважды). В итоге: $n(n - 1)(2k - 1) = 300$, то есть надо разложить число 300 на три множителя, один из которых на 1 меньше другого, а третий нечетный. Есть два варианта: $300 = 4 \times 3 \times 25$ и $300 = 5 \times 4 \times 15$, откуда следует, что $n = 4, k = 13$ или $n = 5, k = 8$, но в первом случае количество рейсов превышает 10, что противоречит условию. Значит, было 5 автобусов, каждый из них совершил по 8 рейсов, то есть всего рейсов 40.

Ответ: 40

**Олимпиада школьников «Ломоносов» 2017/2018 учебного года
по механике и математическому моделированию**

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Отборочный этап 1

7-8 класс

Во всех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). Ответом на каждую из задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления.

::1.1:: Сосиска весит в три раза меньше, чем сарделька, а диаметр сардельки в два раза больше, чем сосиски. На сколько процентов сосиска длиннее сардельки, если плотность содержимого сосиски относится к плотности содержимого сардельки как 5:6?

$$\{= 60\}$$

::1.2:: Сарделька весит в три раза больше, чем сосиска, а диаметр сардельки в два раза больше, чем сосиски. На сколько процентов сосиска длиннее сардельки, если плотность содержимого сардельки относится к плотности содержимого сосиски как 9:10?

$$\{= 20\}$$

::1.3:: Сосиска весит в два раза меньше, чем сарделька, а диаметр сардельки в два раза больше, чем сосиски. На сколько процентов сосиска длиннее сардельки, если плотность содержимого сардельки относится к плотности содержимого сосиски как 4:5?

$$\{= 60\}$$

::1.4:: Сосиска весит в два раза меньше, чем сарделька, а диаметр сардельки в два раза больше, чем сосиски. На сколько процентов сосиска длиннее сардельки, если плотность содержимого сардельки относится к плотности содержимого сосиски как 9:10?

$$\{= 80\}$$

::2.1:: Каждый из пяти серверов разной производительности обрабатывает один и тот же объем информации. Если бы первый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее, то суммарное время их работы уменьшилось бы на 15%. Если бы второй сервер делал это в два раза быстрее, то суммарное время работы уменьшилось бы на 10%. Если бы третий делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 8% меньше времени. Если бы четвертый делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 6% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее?

$$\{= 11\}$$

::2.2:: Каждый из пяти серверов разной производительности обрабатывает один и тот же объем информации. Если бы первый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее, то суммарное время их работы уменьшилось бы на 15%. Если бы второй сервер делал это в два раза быстрее, то суммарное время работы уменьшилось бы на 12%. Если бы третий делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 9% меньше времени. Если бы четвертый делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 6% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее?

$$\{= 8\}$$

::2.3:: Каждый из пяти серверов разной производительности обрабатывает один и тот же объем информации. Если бы первый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее, то суммарное время их работы уменьшилось бы на 14%. Если бы второй сервер делал это в два раза быстрее, то суммарное время работы уменьшилось бы на 11%. Если бы третий делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 8% меньше времени. Если бы четвертый делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 7% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее?

{= 10}

::2.4:: Каждый из пяти серверов разной производительности обрабатывает один и тот же объем информации. Если бы первый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее, то суммарное время их работы уменьшилось бы на 16%. Если бы второй сервер делал это в два раза быстрее, то суммарное время работы уменьшилось бы на 12%. Если бы третий делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 8% меньше времени. Если бы четвертый делал это в два раза быстрее, то они потратили бы на 5% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый сервер обрабатывал информацию в два раза быстрее?

{= 9}

::3.1:: Связной, выехав из хвоста колонны, прибыл в ее начало, передал пакет и вернулся обратно, преодолев путь длиной 7,2 км. Колонна за это время прошла 3,6 км. Найдите длину колонны (в метрах).

{=2700}

::3.2:: Связной, выехав из хвоста колонны, прибыл в ее начало, передал пакет и вернулся обратно, преодолев путь длиной 5,4 км. Колонна за это время прошла 3,6 км. Найдите длину колонны (в метрах).

{=1500}

::3.3:: Связной, выехав из хвоста колонны, прибыл в ее начало, передал пакет и вернулся обратно, преодолев путь длиной 9,6 км. Колонна за это время прошла 4,8 км. Найдите длину колонны (в метрах).

{=3600}

::3.4:: Связной, выехав из хвоста колонны, прибыл в ее начало, передал пакет и вернулся обратно, преодолев путь длиной 7,2 км. Колонна за это время прошла 4,8 км. Найдите длину колонны (в метрах).

{=2000}

::4.1:: Для того чтобы удлинить две пружины на одну и ту же заданную величину, ко второй пружине следует приложить силу 60 Н, а к первой — в два раза меньшую. С какой силой (в ньютонах) надо подействовать на систему из последовательно соединенных двух данных пружин, чтобы растянуть эту систему на ту же величину удлинения?

{= 20}

::4.2:: Для того чтобы удлинить две пружины на одну и ту же заданную величину, ко второй пружине следует приложить силу 60 Н, а к первой — в три раза меньшую. С какой силой (в ньютонах) надо подействовать на систему из последовательно соединенных двух данных пружин, чтобы растянуть эту систему на ту же величину удлинения?

{= 15}

::4.3:: Для того чтобы удлинить две пружины на одну и ту же заданную величину, к первой пружине следует приложить силу 60 Н, а ко второй — в два раза большую. С

какой силой (в ньютонах) надо подействовать на систему из последовательно соединенных двух данных пружин, чтобы растянуть эту систему на ту же величину удлинения?
{= 40}

::4.4:: Для того чтобы удлинить две пружины на одну и ту же заданную величину, к первой пружине следует приложить силу 60 Н, а ко второй — в три раза большую. С какой силой (в ньютонах) надо подействовать на систему из последовательно соединенных двух данных пружин, чтобы растянуть эту систему на ту же величину удлинения?
{= 45}

::5.1:: В одном из двух сообщающихся сосудов, площадь сечения которого равна $S_1 = 4 \text{ см}^2$, непосредственно над уровнем воды находится пробка, которую можно вытащить, если приложить силу не меньше, чем $F = 1 \text{ Н}$. Какое количество воды (в кг) надо налить во второй сосуд с площадью сечения $S_2 = 12 \text{ см}^2$, чтобы пробка поднялась на высоту $h = 5 \text{ см}$? Считать $g = 10 \text{ м/с}^2$.
{= 0,38}

::5.2:: В одном из двух сообщающихся сосудов, площадь сечения которого равна $S_1 = 3 \text{ см}^2$, непосредственно над уровнем воды находится пробка, которую можно вытащить, если приложить силу не меньше, чем $F = 1 \text{ Н}$. Какое количество воды (в кг) надо налить во второй сосуд с площадью сечения $S_2 = 12 \text{ см}^2$, чтобы пробка поднялась на высоту $h = 4 \text{ см}$? Считать $g = 10 \text{ м/с}^2$.
{= 0,46}

::5.3:: В одном из двух сообщающихся сосудов, площадь сечения которого равна $S_1 = 5 \text{ см}^2$, непосредственно над уровнем воды находится пробка, которую можно вытащить, если приложить силу не меньше, чем $F = 1 \text{ Н}$. Какое количество воды (в кг) надо налить во второй сосуд с площадью сечения $S_2 = 10 \text{ см}^2$, чтобы пробка поднялась на высоту $h = 6 \text{ см}$? Считать $g = 10 \text{ м/с}^2$.
{= 0,29}

::5.4:: В одном из двух сообщающихся сосудов, площадь сечения которого равна $S_1 = 2 \text{ см}^2$, непосредственно над уровнем воды находится пробка, которую можно вытащить, если приложить силу не меньше, чем $F = 1 \text{ Н}$. Какое количество воды (в кг) надо налить во второй сосуд с площадью сечения $S_2 = 8 \text{ см}^2$, чтобы пробка поднялась на высоту $h = 2 \text{ см}$? Считать $g = 10 \text{ м/с}^2$.
{= 0,42}

Решение.

1. Связь между диаметром сардельки (массой M) и диаметром сосиски (массой m): $D = kd$; между массами: $M = nm$; между плотностями $\rho_M = i\rho_m$. Тогда для отношения длин получим: $\frac{m}{M} = \frac{d^2 \rho_m l}{D^2 \rho_M L} \rightarrow \frac{l}{L} = \frac{k^2 i}{n}$. Искомый процент p находится из формулы $\frac{l-L}{L} = \frac{p}{100}$. Подставляя данные задачи ($k = 2$, $n = 3$), $i = \frac{6}{5}$, получим ответ: 60%

Ответ: 60

2. Если бы каждый работал в два раза быстрее, то они потратили бы времени на 50% меньше. Значит, если бы 5 й делал это в 2 раза быстрее, то время уменьшилось бы на $50 - 15 - 10 - 8 - 6 = 11$.

Ответ: На 11%.

3. Обозначим длину колонны через x , скорость колонны через V , тогда скорость связного равна $2V$ (так как он за одно и то же время преодолел в два раза больший путь). Тогда путь до начала колонны он преодолел за время $\frac{x}{2V-V} = \frac{x}{V}$, а обратный путь за время $\frac{x}{2V+V} = \frac{x}{3V}$. За это время колонна прошла 3,6 км, то есть $V \left(\frac{x}{V} + \frac{x}{3V} \right) = 3,6$, откуда получаем 2,7 (км).

Ответ: 2700

4. Закон Гука для данных пружин приводит к соотношениям: $k_1 \Delta l = F_1$, $k_2 \Delta l = F_2$. Делим одно на другое: $\frac{k_2}{k_1} = \frac{F_2}{F_1} = \alpha$. При последовательном соединении пружин удлинения суммируются, а жесткость определяется суммированием обратных величин: $\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \rightarrow k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$. Тогда получим $\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \Delta l = F \rightarrow \frac{F_2}{\alpha + 1} = F \rightarrow \frac{F_2}{3} = F \rightarrow F = 20$ Н

Ответ: 20

5. Для того, чтобы пробка тронулась с места, необходимо создать дополнительное давление: $p_1 = \frac{F}{S_1}$. Для этого в широкий сосуд надо налить массу воды $M_1 = S_2 \delta \rho$, где δ определяется из условия равновесия в момент начала движения пробки: $p_1 = \rho g \delta$. Затем надо добавить воды $M_2 = h(S_1 + S_2)\rho$. Общая масса необходимой воды равен: $M = M_1 + M_2$. Подставляя данные задачи, получим: $\delta = 25$ см, $M_1 = 300$ г, $M_2 = 80$ г

Ответ: $M = 380$ г

Олимпиада школьников «Ломоносов» 2017/2018 учебного года
по механике и математическому моделированию

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Отборочный этап. Тур 2

7 — 8 классы

Во всех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). Ответом на каждую из задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления.

::0:: Один насос наполняет резервуар за 6 часов, а второй — за 4 часа. За сколько часов наполнится резервуар, если оба насоса включить одновременно?

{2, 4}

::1.1:: Чему равен объем льда, полученного замораживанием одного литра воды, если плотность воды 1000 кг/м^3 и льда 917 кг/м^3 ? Ответ дать в кубических дециметрах.

{= 1, 09}

::1.2:: Чему равен объем воды, полученной при таянии одного кубического дециметра льда, если плотность воды 1000 кг/м^3 и льда 917 кг/м^3 ? Ответ дать в литрах.

{= 0, 92}

::1.3:: Чему равен объем льда, полученного замораживанием двух литров воды, если плотность воды 1000 кг/м^3 и льда 917 кг/м^3 ? Ответ дать в кубических дециметрах.

{= 2, 18}

::1.4:: Чему равен объем воды, полученной при таянии двух кубических дециметров льда, если плотность воды 1000 кг/м^3 и льда 917 кг/м^3 ? Ответ дать в литрах.

{= 1, 83}

::2.1:: Резиновый мяч падает с крыши дома с высоты 10 м. После каждого удара о землю он отскакивает назад на $4/5$ от предыдущей высоты, с которой он падал. Сколько раз мяч появится перед прямоугольным окном, нижний край которого находится на высоте 5 м, а верхний край находится на высоте 6 м?

{= 6}

::2.2:: Резиновый мяч падает с крыши дома с высоты 5 м. После каждого удара о землю он отскакивает назад на $3/4$ от предыдущей высоты, с которой он падал. Сколько раз мяч появится перед прямоугольным окном, нижний край которого находится на высоте 2 м, а верхний край находится на высоте 3 м?

{= 5}

::2.3:: Резиновый мяч падает с крыши дома с высоты 10 м. После каждого удара о землю он отскакивает назад на $7/10$ от предыдущей высоты, с которой он падал. Сколько раз мяч появится перед прямоугольным окном, нижний край которого находится на высоте 2 м, а верхний край находится на высоте 3 м?

{= 8}

::2.4:: Резиновый мяч падает с крыши дома с высоты 8 м. После каждого удара о землю он отскакивает назад на $2/3$ от предыдущей высоты, с которой он падал. Сколько

раз мяч появится перед прямоугольным окном, нижний край которого находится на высоте 2,5 м, а верхний край находится на высоте 3,5 м?

$$\{= 5\}$$

::3.1:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 25% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 15% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,89\}$$

::3.2:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 20% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 15% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,42\}$$

::3.3:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 25% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 20% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,33\}$$

::3.4:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 15% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 10% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,59\}$$

::4.1:: Даны два сплава, в первом из которых масса меди относится к массе олова как 2:3, во втором — как 3:1. В результате переплавки получился сплав, в котором меди в 1,5 раза больше, чем олова. Найдите отношение массы первого сплава к массе второго.

$$\{= 0,75\}$$

::4.2:: Даны два сплава, в первом из которых масса меди относится к массе олова как 1:3, во втором — как 3:2. В результате переплавки получился сплав, в котором меди в 2 раза меньше, чем олова. Найдите отношение массы первого сплава к массе второго.

$$\{= 3,2\}$$

::4.3:: Даны два сплава, в первом из которых масса меди относится к массе олова как 3:2, во втором — как 3:1. В результате переплавки получился сплав, в котором меди в 2 раза больше, чем олова. Найдите отношение массы первого сплава к массе второго.

$$\{= 1,25\}$$

::4.4:: Даны два сплава, в первом из которых масса меди относится к массе олова как 5:4, во втором — как 3:2. В результате переплавки получился сплав, в котором меди в 1,3 раза больше, чем олова. Найдите отношение массы первого сплава к массе второго.

$$\{= 3,6\}$$

::5.1:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не более 10), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз

в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 300. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

{= 40}

::5.2:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не менее 10), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 300. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

{= 52}

::5.3:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не более 15), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 540. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

{= 70}

::5.4:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не более 10), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 714. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

{= 63}

Решение.

$$0. t = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{12}{5} = 2,4$$

Ответ 2,4 часа

1. Из закона сохранения массы получим $\rho_w V_w = 1 \Rightarrow \rho_i V_i = 1 \Rightarrow V_i = \frac{1}{\rho_i} = \frac{1}{917} = 0,0010905... \text{ м}^3 \approx 1,09$

Ответ: 1,09

2. Первый раз мяч пролетает мимо окна, когда летит с высоты 10 м. Отразившись от земли, он поднимается на высоту 8 м и потом опускается обратно. Это 2-й (вверх) и 3-й (вниз) пролёт мимо окна. Следующая высота: $8 \cdot \frac{4}{5} = \frac{32}{5} > 6$ — это будут 4-й и 5-й пролёты. Следующая высота: $\frac{32}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{128}{25}$ — больше 5, но меньше 6. Это будет 6-й раз. Больше пролётов не будет, так как следующая высота $\frac{128}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{512}{125} < 5$.

Ответ: 6

3. Пусть m и a — количество учеников младших классов и их средний рост соответственно, а n и b — количество учеников остальных классов и их средний рост. Тогда средний рост учеников школы равен $\frac{am+bn}{m+n}$

$$\text{По условию: } a = \alpha b, \alpha = \left(1 - \frac{25}{100}\right) = \frac{3}{4}, a = \beta \frac{am+bn}{m+n}, \beta = \left(1 - \frac{15}{100}\right) = \frac{19}{20}$$

$$\text{Поэтому } \alpha b = \beta \frac{\alpha bm+bn}{m+n} \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta-\alpha} = \frac{8}{9} \approx 0,89$$

Ответ: 0,89

4. Если взято x первого сплава и y — второго, то меди будет $\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y$, а олова — $\frac{3}{5}x + \frac{1}{4}y$,

По условию

$$\frac{\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y}{\frac{3}{5}x + \frac{1}{4}y} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{5}x + \frac{3}{2}y = \frac{9}{5}x + \frac{3}{4}y \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}y$$

Отсюда $x : y = 3 : 4$.

Ответ: 0,75.

5. Если обозначить через n количество автобусов и через k количество рейсов каждого из них, то можно подсчитать число встреч (например, по графику, иллюстрирующему движение автобусов). Получается, что каждые два автобуса встречаются $2k - 1$ раз: один раз в течение первого рейса автобуса, вышедшего раньше, и по два раза в течение каждого из остальных рейсов. Поэтому всего встреч $\frac{n(n-1)}{2}(2k - 1) = 300/2$ (число встреч делим пополам, так как каждая из них посчитана дважды). В итоге: $n(n - 1)(2k - 1) = 300$, то есть надо разложить число 300 на три множителя, один из которых на 1 меньше другого, а третий нечетный. Есть два варианта: $300 = 4 \times 3 \times 25$ и $300 = 5 \times 4 \times 15$, откуда следует, что $n = 4, k = 13$ или $n = 5, k = 8$, но в первом случае количество рейсов превышает 10, что противоречит условию. Значит, было 5 автобусов, каждый из них совершил по 8 рейсов, то есть всего рейсов 40.

Ответ: 40

5. Определим уравнение процесса. Так как поршень легкий, сила упругости пружины в каждый момент времени равна силе давления газа:

$$kx = p(x)S$$

где x — длина цилиндра, занятая газом, по условию она равна сжатию пружины, k — коэффициент жесткости пружины, S — площадь основания цилиндра. Умножив на S обе части равенства, получим

$$p = \alpha V, \quad \alpha = \text{const.}$$

Найдем теплоемкость газа в таком процессе:

$$c = \frac{dQ}{dT}$$

Пусть объем газа V изменился на малую величину dV . Тогда давление изменилось от p на $dp = \alpha dV$, внутренняя энергия на

$$dU = \frac{3}{2}((p + dp)(V + dV) - pV) = \frac{3}{2}(pdV + Vdp) = 3\alpha V dV$$

При этом изменение температуры составит $dT = \frac{2}{3} \frac{dU}{\nu R} = \frac{2\alpha V dV}{\nu R}$.

Газ совершит работу $dA = pdV = \alpha V dV$.

Тепло, подведенное в систему, равно

$$dQ = dU + dA = 4\alpha V dV,$$

а теплоемкость

$$c = \frac{dQ}{dT} = 2\nu R.$$

Для того, чтобы найти удельную теплоемкость необходимо разделить полученную теплоемкость всего газа на его массу $\nu\mu$, где μ — молярная масса газа.

Ответ: $2R/\mu = 4155$ Дж/(кг К).

Олимпиада школьников «Ломоносов» 2017/2018 учебного года
по механике и математическому моделированию

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Отборочный этап. Тур 2

7 — 8 классы

Во всех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). Ответом на каждую из задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления.

::0:: Один насос наполняет резервуар за 6 часов, а второй — за 4 часа. За сколько часов наполнится резервуар, если оба насоса включить одновременно?

{2, 4}

::1.1:: Чему равен объем льда, полученного замораживанием одного литра воды, если плотность воды 1000 кг/м^3 и льда 917 кг/м^3 ? Ответ дать в кубических дециметрах.

{= 1, 09}

::1.2:: Чему равен объем воды, полученной при таянии одного кубического дециметра льда, если плотность воды 1000 кг/м^3 и льда 917 кг/м^3 ? Ответ дать в литрах.

{= 0, 92}

::1.3:: Чему равен объем льда, полученного замораживанием двух литров воды, если плотность воды 1000 кг/м^3 и льда 917 кг/м^3 ? Ответ дать в кубических дециметрах.

{= 2, 18}

::1.4:: Чему равен объем воды, полученной при таянии двух кубических дециметров льда, если плотность воды 1000 кг/м^3 и льда 917 кг/м^3 ? Ответ дать в литрах.

{= 1, 83}

::2.1:: Резиновый мяч падает с крыши дома с высоты 10 м. После каждого удара о землю он отскакивает назад на $4/5$ от предыдущей высоты, с которой он падал. Сколько раз мяч появится перед прямоугольным окном, нижний край которого находится на высоте 5 м, а верхний край находится на высоте 6 м?

{= 6}

::2.2:: Резиновый мяч падает с крыши дома с высоты 5 м. После каждого удара о землю он отскакивает назад на $3/4$ от предыдущей высоты, с которой он падал. Сколько раз мяч появится перед прямоугольным окном, нижний край которого находится на высоте 2 м, а верхний край находится на высоте 3 м?

{= 5}

::2.3:: Резиновый мяч падает с крыши дома с высоты 10 м. После каждого удара о землю он отскакивает назад на $7/10$ от предыдущей высоты, с которой он падал. Сколько раз мяч появится перед прямоугольным окном, нижний край которого находится на высоте 2 м, а верхний край находится на высоте 3 м?

{= 8}

::2.4:: Резиновый мяч падает с крыши дома с высоты 8 м. После каждого удара о землю он отскакивает назад на $2/3$ от предыдущей высоты, с которой он падал. Сколько

раз мяч появится перед прямоугольным окном, нижний край которого находится на высоте 2,5 м, а верхний край находится на высоте 3,5 м?

$$\{= 5\}$$

::3.1:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 25% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 15% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,89\}$$

::3.2:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 20% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 15% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,42\}$$

::3.3:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 25% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 20% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,33\}$$

::3.4:: В школе, где учится Гаврила, средний рост учеников младших классов на 15% меньше среднего роста учеников остальных классов, и на 10% меньше среднего роста учеников школы. Найдите отношение количества учеников младших классов к количеству учеников остальных классов.

$$\{= 0,59\}$$

::4.1:: Даны два сплава, в первом из которых масса меди относится к массе олова как 2:3, во втором — как 3:1. В результате переплавки получился сплав, в котором меди в 1,5 раза больше, чем олова. Найдите отношение массы первого сплава к массе второго.

$$\{= 0,75\}$$

::4.2:: Даны два сплава, в первом из которых масса меди относится к массе олова как 1:3, во втором — как 3:2. В результате переплавки получился сплав, в котором меди в 2 раза меньше, чем олова. Найдите отношение массы первого сплава к массе второго.

$$\{= 3,2\}$$

::4.3:: Даны два сплава, в первом из которых масса меди относится к массе олова как 3:2, во втором — как 3:1. В результате переплавки получился сплав, в котором меди в 2 раза больше, чем олова. Найдите отношение массы первого сплава к массе второго.

$$\{= 1,25\}$$

::4.4:: Даны два сплава, в первом из которых масса меди относится к массе олова как 5:4, во втором — как 3:2. В результате переплавки получился сплав, в котором меди в 1,3 раза больше, чем олова. Найдите отношение массы первого сплава к массе второго.

$$\{= 3,6\}$$

::5.1:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не более 10), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз

в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 300. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

{= 40}

::5.2:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не менее 10), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 300. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

{= 52}

::5.3:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не более 15), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 540. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

{= 70}

::5.4:: Несколько автобусов в начале рабочего дня поочередно с интервалом в 5 минут выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из города Альфа на станцию Бета. По прибытии на станцию каждый из них делает минутную остановку, разворачивается и едет в обратном направлении, завершая рейс в городе Альфа. После минутной остановки он отправляется в следующий рейс. Все автобусы делают одинаковое число рейсов (не более 10), причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 714. Определите, сколько суммарно рейсов совершили все автобусы.

{= 63}

Решение.

$$0. t = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{12}{5} = 2,4$$

Ответ 2,4 часа

1. Из закона сохранения массы получим $\rho_w V_w = 1 \Rightarrow \rho_i V_i = 1 \Rightarrow V_i = \frac{1}{\rho_i} = \frac{1}{917} = 0,0010905... \text{ м}^3 \approx 1,09$

Ответ: 1,09

2. Первый раз мяч пролетает мимо окна, когда летит с высоты 10 м. Отразившись от земли, он поднимается на высоту 8 м и потом опускается обратно. Это 2-й (вверх) и 3-й (вниз) пролёт мимо окна. Следующая высота: $8 \cdot \frac{4}{5} = \frac{32}{5} > 6$ — это будут 4-й и 5-й пролёты. Следующая высота: $\frac{32}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{128}{25}$ — больше 5, но меньше 6. Это будет 6-й раз. Больше пролётов не будет, так как следующая высота $\frac{128}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{512}{125} < 5$.

Ответ: 6

3. Пусть m и a — количество учеников младших классов и их средний рост соответственно, а n и b — количество учеников остальных классов и их средний рост. Тогда средний рост учеников школы равен $\frac{am+bn}{m+n}$

$$\text{По условию: } a = \alpha b, \alpha = \left(1 - \frac{25}{100}\right) = \frac{3}{4}, a = \beta \frac{am+bn}{m+n}, \beta = \left(1 - \frac{15}{100}\right) = \frac{19}{20}$$

$$\text{Поэтому } \alpha b = \beta \frac{abm+bn}{m+n} \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta - \alpha} = \frac{8}{9} \approx 0,89$$

Ответ: 0,89

4. Если взято x первого сплава и y — второго, то меди будет $\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y$, а олова — $\frac{3}{5}x + \frac{1}{4}y$,

По условию

$$\frac{\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y}{\frac{3}{5}x + \frac{1}{4}y} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{5}x + \frac{3}{2}y = \frac{9}{5}x + \frac{3}{4}y \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}y$$

Отсюда $x : y = 3 : 4$.

Ответ: 0,75.

5. Если обозначить через n количество автобусов и через k количество рейсов каждого из них, то можно подсчитать число встреч (например, по графику, иллюстрирующему движение автобусов). Получается, что каждые два автобуса встречаются $2k - 1$ раз: один раз в течение первого рейса автобуса, вышедшего раньше, и по два раза в течение каждого из остальных рейсов. Поэтому всего встреч $\frac{n(n-1)}{2}(2k - 1) = 300/2$ (число встреч делим пополам, так как каждая из них посчитана дважды). В итоге: $n(n - 1)(2k - 1) = 300$, то есть надо разложить число 300 на три множителя, один из которых на 1 меньше другого, а третий нечетный. Есть два варианта: $300 = 4 \times 3 \times 25$ и $300 = 5 \times 4 \times 15$, откуда следует, что $n = 4, k = 13$ или $n = 5, k = 8$, но в первом случае количество рейсов превышает 10, что противоречит условию. Значит, было 5 автобусов, каждый из них совершил по 8 рейсов, то есть всего рейсов 40.

Ответ: 40

5. Определим уравнение процесса. Так как поршень легкий, сила упругости пружины в каждый момент времени равна силе давления газа:

$$kx = p(x)S$$

где x — длина цилиндра, занятая газом, по условию она равна сжатию пружины, k — коэффициент жесткости пружины, S — площадь основания цилиндра. Умножив на S обе части равенства, получим

$$p = \alpha V, \quad \alpha = \text{const.}$$

Найдем теплоемкость газа в таком процессе:

$$c = \frac{dQ}{dT}$$

Пусть объем газа V изменился на малую величину dV . Тогда давление изменилось от p на $dp = \alpha dV$, внутренняя энергия на

$$dU = \frac{3}{2}((p + dp)(V + dV) - pV) = \frac{3}{2}(pdV + Vdp) = 3\alpha V dV$$

При этом изменение температуры составит $dT = \frac{2}{3} \frac{dU}{\nu R} = \frac{2\alpha V dV}{\nu R}$.

Газ совершит работу $dA = pdV = \alpha V dV$.

Тепло, подведенное в систему, равно

$$dQ = dU + dA = 4\alpha V dV,$$

а теплоемкость

$$c = \frac{dQ}{dT} = 2\nu R.$$

Для того, чтобы найти удельную теплоемкость необходимо разделить полученную теплоемкость всего газа на его массу $\nu\mu$, где μ — молярная масса газа.

Ответ: $2R/\mu = 4155$ Дж/(кг К).