Задания и решения первого тура отборочного этапа Олимпиады «Ломоносов» по Космонавтике 2017/2018
Разминка
Для всех классов 7-11.

1) Какой физический эффект позволил обнаружить гравитационные волны?
Варианты ответов. Правильный ответ в)
   а) колебания земной поверхности;
   б) изменение ускорения свободного падения ;
   в) интерференция луча света;
   г) изменение скорости распространения звука в воздухе.

2) Сколько землян в данный момент находится в космосе?
Варианты ответов. Правильный ответ г)
   а) двое;
   б) трое;
   в) четверо;
   г) шестеро.

3) Какую минимальную скорость должен развить космический аппарат, чтобы выйти на околоземную орбиту?
Варианты ответов. Правильный ответ в)
   а) скорость звука;
   б) скорость света;
   в) первую космическую скорость;
   г) вторую космическую скорость.

4) В каком году на поверхность Луны был доставлен первый космический аппарат?
Варианты ответов. Правильный ответ а)
   а) в 1959-м;
   б) в 1961-м;
   в) в 1966-м;
   г) в 1969-м.

5) В каком году получена первая фотография обратной стороны Луны?
Варианты ответов. Правильный ответ а)
   а) в 1959-м;
   б) в 1961-м;
   в) в 1966-м;
   г) в 1969-м.

6) В каком году началось строительство международной космической станции, которая в данный момент находится на орбите?
Варианты ответов. Правильный ответ б)
   а) в 1989-м;
   б) в 1998-м;
   в) в 2003-м;
   г) в 2011-м.

7) На какой высоте летает международная космическая станция?
Варианты ответов. Правильный ответ б)
   а) 100 км;
   б) 400 км;
   в) 1400 км;

г) 6400 км.

8) На какой высоте находится граница между земным пространством и космосом, принятая международной федерацией астронавтики и почему?
Варианты ответов. Правильный ответ б)
а) 800 км. Потому, что это верхняя граница термосферы;
б) 100 км. Потому, что выше этой границы скорость летящего самолета должна превышать первую космическую скорость.
в) 50 км. Потому, что это верхняя граница стратосферы;
г) 38 км. Потому, что это максимальная высота полета самолета, достигнутая на данный момент.

9) Какую форму имеет капля воды в невесомости?
Варианты ответов. Правильный ответ а)
а) шар;
б) куб;
в) тор;
г) в невесомости вообще нет воды.

10) Работает ли магнитный компас на космическом корабле, находящемся на околоземной (до 500 км) орбите?
Варианты ответов. Правильный ответ а)
а) да, стрелка по-прежнему направлена к магнитному полюсу Земли;
б) работает, но стрелка направлена на Солнце;
в) не работает (стрелка движется хаотично);
г) работает, но стрелка направлена в центр Земли.

7-9 классы

ЗАДАЧА 1

Из какой точки на поверхности Луны должен выехать луноход, чтобы, пройдя 35 км на север, затем 20 км на восток, а затем 35 км на юг, он оказался в исходной точке? Приведите подробное решение.

Решение: Вне зависимости от расстояний, данных в условии, подходит южный полюс. Движение по любому меридиану является движением на север (вначале) и на юг (в конце). Движение по параллели не меняет расстояния до полюса.

Если стартовая точка не является южным полюсом, то эта точка является ответом к задаче в том и только в том случае, если начало и конец пути по параллели совпадают. Пусть l - длина параллели. Тогда $\frac{20}{l} = n$ – натуральное число (количество оборотов). Пусть $R = 1737{,}1$ км - радиус Луны. Таким образом, длина параллели $l \leq 20$ много меньше радиуса, а значит, параллель должна находиться вблизи полюса (либо северного, либо южного). Вблизи полюсов поверхность можно считать плоской. Длина окружности радиуса 35 с центром в южном полюсе уже превосходит 20 (минимально возможную длину параллели). При смещении точки старта из южного полюса длина соответствующей окружности только возрастет. Следовательно, в окрестности южного полюса других решений нет. Пусть стартовая точка находится на расстоянии x от северного полюса. Тогда $l = 2\pi(x - 35) = \frac{20}{n}$. Отсюда $x = 35 + \frac{10}{\pi n}$.

Ответ: Из южного полюса Луны, а также из любой точки лунной поверхности, удаленной от северного полюса Луны на (35 + 10/πn) км, где n = 1, 2, 3, … [Если ученик предложит сферическое решение, то еще лучше.]

ЗАДАЧА 2

Луноход умеет передвигаться, исполняя заранее заданную программу. Программа может состоять из команд: сделать шаг на Юг, на Север, на Восток или на Запад. Луноход исполняет программу строго последовательно и, дойдя до конца программы, останавливается. Сколькими различными способами, выполняя программу, состоящую из K инструкций, луноход может добраться в точку с координатами (X, Y) из начала координат?

Оси координат располагаются параллельно сторонам света, и единица измерения, соответствует одному шагу робота. Напишите программу, которая дает ответ на этот вопрос.

Входные данные:

Программа считывает три числа K, X и Y ($0 \le K \le 16$, $|X|, |Y| \le 16$), разделенные пробелами.

Выходные данные:

Ваша программа должна напечатать одно число – количество программ для робота.

Пример:

Входные данные

4 0 0

Выходные данные

36

Решение: Участнику позволяется неограниченное количество раз загружать на сервер олимпиады свой программный код и запускать автоматическое тестирование программы на случайных примерах.

Ответ: Программный код, загруженный на сервер олимпиады. Тестирование кода на работоспособность проводится автоматически на случайных примерах.

ЗАДАЧА 3

Освоенный участок лунной поверхности имеет форму треугольника ABC . В вершине B находится космический корабль, в точке C – лунная станция, в точке A - излучатель. От станции к кораблю проложена прямая дорога. На этой дороге выбрана точка H – ближайшая к излучателю, а на полпути от точки H до излучателя, в точке M, установлена антенна. В данный момент луноход находится на станции. Он начинает движение по отрезку CA, в какой-то момент, не дойдя до A, делает поворот и продолжает движение по прямой линии, проходящей через M, до пересечения с отрезком AB. Здесь луноход снова поворачивает, движется по прямой AB до корабля, а затем возвращается на станцию по дороге BC. Какова наибольшая площадь участка, который может объехать луноход при этих

условиях, если $AH=12$ км, а отрезки BH и CH равны y км и z км соответственно.[#] Участок поверхности считаем плоским. Дайте численный ответ в км^2 с точностью до двух знаков после запятой (например 10,29).

Решение: Из условия задачи следует, что AH - высота треугольника ABC, точка M - середина AH. Пусть $CKLB$ - искомый четырехугольник, где точка K лежит на стороне AC, а точка L – на стороне AB. Тогда $M \in KL$. Известно, что площадь S_{AKL} является наименьшей ровно тогда, когда $ML = MK$. Отсюда $AK = LH$, $AL = KH$, прямые AK и LH параллельны, прямые AL и KH также параллельны. Это означает подобие треугольников ABC и LBH, откуда

$$\frac{LH}{AC} = \frac{y}{y+z}, \qquad \frac{AK}{AC} = \frac{y}{y+z}.$$

Аналогично

$$\frac{AL}{AB} = \frac{z}{y+z}.$$

Поскольку

$$\frac{S_{ALK}}{S_{ABC}} = \frac{AL \cdot AK}{AB \cdot AC}$$

то

$$S_{ALK} = \frac{yz}{(y+z)^2} S_{ABC} = \frac{6yz}{y+z}.$$

Значит,

$$S_{CKLB} = S_{ABC} - S_{ALK} = 6(y+z) - \frac{6yz}{y+z} = 6\left(y+z-\frac{yz}{y+z}\right).$$

Ответ: $6\left(y+z-\frac{yz}{y+z}\right)$.

ЗАДАЧА 4

Для наблюдателя на Земле Солнце имеет видимую звездную величину -26,7^m, а полная Луна -12,7^m. Определите, во сколько раз сильнее Солнце освещает поверхность Плутона, чем полная Луна – поверхность Земли. Расстояние от Солнца до Плутона принять равным 40 а.е. Приведите подробное решение.

Решение: Пусть L_1 и L_2 – освещенности Земли Луной и Плутона Солнцем соответственно (согласно условию задачи фаза Луны предполагается максимальной, а поглощением света атмосферой Земли пренебрегаем). Пусть m_1 и m_2 - соответствующие видимые звездные величины. Тогда

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \lg \frac{L_1}{L_2}.$$

[#] Параметры $y \in [2,6]$ и $z \in [2,6]$, $y \neq z$, были варьируемыми в зависимости от варианта

Пусть M- абсолютная звездная величина Солнца. Тогда

$$m = M - 5\lg\frac{d}{d_0},$$

где d – расстояние от Солнца до наблюдателя (в парсеках), а $d_0 = 10$ пк. Подставляя сюда расстояния от Солнца до Земли и от Солнца до Плутона, получим

$$m_2 = -26{,}7 + 5\lg 40.$$

Отсюда

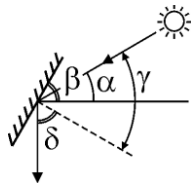
$$\frac{L_2}{L_1} = 10^{(-12{,}7+26{,}7-5\lg 40)/2{,}5} \approx 250.$$

Ответ: в 250 раз.

ЗАДАЧА 5

Высота Солнца над горизонтом составляет угол α градусов. Под каким углом β к горизонту следует расположить плоское зеркало для того, чтобы осветить солнечными лучами дно глубокого вертикального колодца? Дайте ответ в градусах (например, 46).

Решение:



Ход луча, падающего на зеркало и отраженного от него, изображен на рисунке. Видно, что угол между падающим лучом и нормалью к зеркалу равен $\gamma = \frac{1}{2}(90° + \alpha) = 45° + \frac{\alpha}{2}$. По закону отражения угол между падающим лучом и нормалью к зеркалу равен углу между отраженным лучом и нормалью, т.е. $\gamma = \delta$. Согласно теореме о равенстве углов с взаимно перпендикулярными сторонами, $\beta = \delta$. Таким образом, $\beta = 45° + \frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $\beta = 45 + {}^{\alpha}/_{2}$.

ЗАДАЧА 6

Когда в понедельник, второго апреля, я пролетал
вблизи Бетельгейзе - метеорит, размером не больше
фасолины, пробил обшивку, вывел из строя регулятор
мощности и повредил рули – ракета потеряла управление.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

Чтобы не допустить перегрева пробитого метеоритом реактора, Ийон Тихий поставил на него ведро с холодной водой. Для нагревания этой воды от температуры t_1 = 20 °C до температуры t_2 = 100 °C понадобилось время τ мин.[#] При этом к воде ежесекундно подводилось одинаковое количество теплоты. За какое время τ_1 вся эта вода выкипит, если скорость подвода теплоты не изменится?

[#] Параметр $\tau \in [6{,}15]$ был варьируемым в зависимости от варианта.

Теплообменом воды с окружающими телами можно пренебречь. Удельная теплоёмкость воды c = 4,2 Дж/(г·К). Удельную теплоту парообразования воды примите равной r = 2,3 МДж/кг. Ответ дайте в минутах с точностью до десятых долей минуты (например, 95,2).

Решение: Для нагрева воды необходимо количество теплоты $(t_2 - t_1)cm = N\tau$, где N – количество теплоты, подводимое к воде в единицу времени. Искомое время найдём из уравнения: $N\tau_1 = 1000 \cdot rm$.

Ответ: $\tau_1 = \tau \dfrac{1000 \cdot r}{c(t_2 - t_1)} \approx 6{,}845 \cdot \tau$.

ЗАДАЧА 7

Там говорилось о феноменах так называемой петли времени, то есть об искривлении вектора времени в пределах особенно мощных гравитационных полей; это явление может иногда привести даже к тому, что время повернет вспять и произойдет так называемое удвоение настоящего.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

В результате попадания в петлю времени Ийон Тихий, летевший в ракете один, утром во вторник увидел двух дублей самого себя, из завтрашнего и послезавтрашнего дней. Вторничный Ийон Тихий хочет починить рули ракеты и для этого перекладывает гаечные ключи из ящика в карманы скафандра. Вначале в ящике лежат 32 ключа. Каждый ключ «вторничный» Тихий сначала в течение 15 секунд ищет в ящике, а затем в течение 20 секунд укладывает в карман скафандра. «Средовый» и «четверговый» Ийоны Тихие мешают ему. Дождавшись момента, когда «вторничный» Ийон начинает искать в ящике очередной ключ, один из дублей (но не оба) может вытащить из скафандра один ключ (на это ему требуется ровно 15 секунд). После этого, на то, чтобы спрятать украденный ключ, у «средового» уходит 105 секунд, после чего он готов украсть из скафандра следующий ключ, а «четверговый» прячет ключ за 225 секунд. Какое наименьшее число ключей может оказаться в кармане скафандра в тот момент, когда «вторничный» Ийон положит туда последний ключ?

Решение: Назовем циклом последовательность двух действий – «Вторничный» выбирает ключ в ящике и кладет его в карман. Продолжительность цикла 35 секунд. По условию, воровать ключ каждый из Ийонов может только в начале цикла. Тогда у «Средового» на один ключ уходит 4 цикла или 140 секунд, а у «Четвергового» - 7 циклов или 245 секунд. Воровать ключи Ийоны могут начать только со второго цикла. Тогда за оставшиеся 31 цикл «Средовый» может украсть максимум 8 ключей, а «Четверговый» - максимум 5 ключей, так что в кармане будут лежать минимум 19 ключей. Остается показать, что это возможно, предъявив последовательность действий.

Пусть «Средовый» ворует в циклы 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, а «Четверговый» - в циклы 2, 9, 16, 24, 32.

Ответ: 19.

ЗАДАЧА 8

…ключ вырвался у меня из-под ноги и умчался в космическое пространство…

Став спутником ракеты, он напоминал мне о поражении
и не приближался к ней настолько, чтобы я мог его схватить.

…выброшенная за борт говядина, вместо того
чтобы улететь в пространство, не хотела расставаться
с ракетой и кружила около нее, как второй искусственный спутник.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

Два спутника движутся по кольцевой орбите длины L в противоположных направлениях. В момент начала наблюдения они находятся в одной точке и движутся с постоянными скоростями v1 и v2 соответственно. Требуется определить, на каком расстоянии друг от друга они окажутся в момент времени T.

Формат входных данных
На вход подаются 4 натуральных числа L, v1, v2, T, разделенных пробелом. Для простоты все числа не превосходят 100.

Формат выходных данных
Выведите расстояние между спутниками в момент времени T – длину кратчайшей из двух дуг дороги между спутниками.

Пример

Входные данные	Выходные данные
10 1 2 1	3
10 2 3 2	0

Решение: Участнику позволяется неограниченное количество раз загружать на сервер свой программный код и запускать автоматическое тестирование программы на случайных примерах.

Ответ: Программный код, загруженный на сервер олимпиады. Тестирование кода на работоспособность проводится автоматически на случайных примерах.

ЗАДАЧА 9

Когда я пришел в себя, каюта была набита людьми.
Передвигаться по ней было почти невозможно.
Как оказалось, все они были мною из разных дней, недель, месяцев,
а один, кажется, даже из будущего года...

Но в промежутке мы успели пройти сквозь отрицательный вихрь,
уменьшивший наше количество наполовину.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

Каждый положительный вихрь удваивает количество Ийонов, а каждый отрицательный – уменьшает на 3 (при этом, если число Ийонов в ракете меньше четырех, то ракета становится пустой). Известно, что вихрей было не меньше одного и не больше 147. Сколько вихрей могла пройти ракета всего, если в начале и в конце путешествия Ийон был один?

Решение: Будем оперировать последовательностями, где номер члена – это номер вихря, а элемент – количество Ийонов в ракете после данного вихря. Заметим, что условиям задачи удовлетворяет подпоследовательность 1-2-4-1. Таким образом, если какое-либо число x является решением, то решением является и число x+3. Приведем примеры

1-2-4-1; 1-2-4-8-5-2-4-1; 1-2-4-8-5-10-7-4-1.

Из них следует, что решениями являются число 3 (а значит все числа вида $3+3n$); число 7 (а значит все числа $7+3n$) и число 8 (а значит все числа $8+3n$). Под вопросом остаются числа 1, 2, 4 и 5. Перебором всех вариантов

1-2-4-(1 или 8)-(2 или 5 или 16)-(4 или 2 или 10 или 13 или 32)

убеждаемся, что эти числа ответами не являются.

Ответ: все числа от 1 до 147, кроме 1, 2, 4 и 5.

ЗАДАЧА 10

Потом говорили, что эту историю я выдумал, а злопыхатели позволяли себе распространять гнусные сплетни, будто я питаю слабость к алкоголю и, тщательно скрывая это на Земле, предаюсь своему пороку в течение долгих лет космических путешествий.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

В память о путешествии Ийон Тихий заказал изготовить золотой гаечный ключ. Однако мастер, питая к Ийону зависть, вместо чистого золота использовал сплав золота и меди. Ключ имеет массу m кг[#] и плотность $\rho = 16{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Считая, что объем сплава равен суммарному объему исходных компонент, определите массу m_1 золота в этом изделии. Плотность золота $\rho_1 = 19{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность меди $\rho_2 = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3. Ответ дайте в кг с точностью до двух знаков после запятой (например, 0,76).

Решение: Обозначим через V_1 и V_2 объемы золота и меди в изделии. По условию объем изделия $V = V_1 + V_2$. Масса тела, его плотность и объем связаны соотношением $m = \rho V$. Следовательно,

$$\frac{m}{\rho} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}$$

Так как масса изделия равна сумме масс золота и меди: $m = m_1 + m_2$, то

$$\frac{m}{\rho} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m - m_1}{\rho_2}$$

Отсюда

$$m_1 = m\frac{\rho_1(\rho - \rho_2)}{\rho(\rho_1 - \rho_2)}.$$

[#] Параметр $m \in [1{,}1;\ 1{,}8]$ был варьируемым в зависимости от варианта.

Ответ: $m_1 = m\dfrac{\rho_1(\rho-\rho_2)}{\rho(\rho_1-\rho_2)}$.

Задания и решения первого тура отборочного этапа Олимпиады «Ломоносов» по Космонавтике 2017/2018 10-11 классы

ЗАДАЧА 1

Астроном измерил красное смещение линий в спектре далекой галактики: оно оказалось равным z=0,05.[#] Приняв постоянную Хаббла H_0 = 70 км/с/Мпк, определите, сколько лет (t) шел свет от этой галактики до астронома. Приведите подробное решение.

Решение: Поскольку величина $z = 0{,}05$ мала, можем не учитывать релятивистские эффекты (в частности, не различать прошедшее для наблюдателя и собственное прошедшее время) и пользоваться плоской моделью Вселенной. Тогда, согласно определению постоянной Хаббла,

$$cz = H_0 r,$$

где $c \approx 300000$ км/с - скорость света, а r - расстояние до объекта в Мпк. Тогда
$r = \frac{cz}{H_0} \approx 214{,}3$ Мпк $= 661{,}2 \cdot 10^{19}$км, а значит $t = \frac{r}{c} \approx 2{,}2 \cdot 10^{16} c \approx 700$ млн лет.

Ответ: ≈ 700 млн лет.

ЗАДАЧА 2

Фобос (один из спутников Марса) вращается вокруг своей планеты по круговой орбите радиуса $R = 9400$ км. Определите период обращения Фобоса T, если известно, что ускорение свободного падения на поверхности Марса $g = 3{,}86$ м/с^2. Ответ приведите в часах и минутах, округлив до целых (например, 7 ч 02 мин). Считайте Марс однородным шаром радиуса $r = 3400$ км.

Решение: Пусть m – масса Фобоса, M – масса Марса, v – скорость движения Фобоса по орбите, G – гравитационная постоянная. Согласно второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения уравнение движения Фобоса имеет вид: $\dfrac{mv^2}{R} = G\dfrac{mM}{R^2}$. Учитывая, что ускорение свободного падения на поверхности Марса $g = G\dfrac{M}{r^2}$, а период обращения Фобоса $T = \dfrac{2\pi R}{v}$, получаем что $T = \dfrac{2\pi}{r}\sqrt{\dfrac{R^3}{g}}$.

Ответ: 7 ч 32 мин.

ЗАДАЧА 3

Карта поверхности Ганимеда состоит из прямоугольного поля NxM клеток. Рельеф местности таков, что планетоход может из каждой клетки выйти в одном из четырех направлений «вправо», «вверх», «влево» или «вниз».

[#] Параметр $z \in [0.04; 0.06]$ был варьируемым в зависимости от варианта.

В начальный момент времени позиция планетохода находится в одной из ячеек карты. Однако возможно, что планетоход будет бесконечно ходить по полю и никогда не сможет исследовать поверхность Ганимеда.

Напишите программу, которая определит, сможет ли планетоход пройти по от начала до конца маршрута и завершить исследования, не зациклившись.

Формат входных данных

Во входном файле заданы сначала размеры поля – число строк N и число столбцов M ($1 \le N \le 1000$, $1 \le M \le 1000$). Далее идет N строк по M чисел в каждой, задающих направления стрелочек в клетках. Число 1 обозначает стрелочку вправо, 2 – вверх, 3 – влево, 4 – вниз. Числа в строке разделяются пробелами.

Предпоследняя строка содержит два числа - координаты клетки, в которой планетоход находится в начальный момент времени.

Последняя строка содержит два числа - координаты клетки, в которой планетоход должен прийти в конечный момент времени.

Формат выходных данных

В выходной файл выведите YES, если путь без зацикливания существует. Если такого пути нет, выведите NO.

Примеры

Входные данные:

6 5

3 1 1 4 2

1 2 4 3 1

4 2 1 1 4

1 2 3 3 3

3 1 4 4 4

2 2 3 4 2

1 2

5 3

Выходные данные:

YES

Решение: Участнику позволяется неограниченное количество раз загружать на сервер свой программный код и запускать автоматическое тестирование программы на случайных примерах.

Ответ: Программный код, загруженный на сервер олимпиады. Тестирование кода на работоспособность проводится автоматически на случайных примерах.

ЗАДАЧА 4

Спутник движется по круговой орбите, радиус которой составляет $n = 2$ радиуса планеты. Какова плотность вещества планеты ρ, если период обращения спутника $T = 4$ часа?[#] Планету считайте однородным шаром. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3·с$^{-2}$·кг$^{-1}$. Ответ дайте в кг/м^3, поделив его на 10^3 и округлив до одного знака после запятой (например, 8,5).

Решение: Пусть m – масса спутника, M – масса планеты радиуса r, v – скорость движения спутника по орбите радиуса R. Согласно второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения уравнение движения спутника имеет вид: $\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$. Учитывая, что $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, $T = \frac{2\pi R}{v}$ и $R = nr$, получаем, что $\rho = \frac{3\pi n^3}{GT^2}$.

Ответ: $\rho = \frac{3\pi n^3}{GT^2} \approx 5{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3

ЗАДАЧА 5

Там говорилось о феноменах так называемой петли времени, то есть об искривлении вектора времени в пределах особенно мощных гравитационных полей; это явление может иногда привести даже к тому, что время повернет вспять и произойдет так называемое удвоение настоящего.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

В результате попадания в петлю времени Ийон Тихий, летевший в ракете один, утром во вторник увидел двух дублей самого себя, из завтрашнего и послезавтрашнего дней. Вторничный Ийон Тихий хочет починить рули ракеты и для этого перекладывает гаечные ключи из ящика в карманы скафандра. Вначале в ящике лежат $N = 32$ ключей. Каждый ключ «вторничный» Тихий сначала в течение $t_1 = 15$ секунд ищет в ящике, а затем в течение $t_2 = 20$ секунд укладывает в карман скафандра. «Средовый» и «четверговый» Ийоны Тихие мешают ему. Дождавшись момента, когда «вторничный» Ийон начинает искать в ящике очередной ключ, один из дублей (но не оба) может вытащить из скафандра один ключ (на это ему требуется ровно $t_3 = 15$ секунд). После этого, на то, чтобы спрятать украденный ключ, у «средового» уходит $t_4 = 105$ секунд, после чего он готов украсть из скафандра следующий ключ, а «четверговый» прячет ключ за $t_5 = 225$ секунд. Какое наименьшее число ключей может оказаться в кармане скафандра в тот момент, когда «вторничный» Ийон положит туда последний ключ?

[#] Параметр $T \in [1.5; 4]$ был варьируемым в зависимости от варианта.

Решение: Назовем циклом последовательность двух действий – «Вторничный» выбирает ключ в ящике и кладет его в карман. Продолжительность цикла 35 секунд. По условию, воровать ключ каждый из Ийонов может только в начале цикла. Тогда у «Средового» на один ключ уходит 4 цикла или 140 секунд, а у «Четвергового» - 7 циклов или 245 секунд. Воровать ключи Ийоны могут начать только со второго цикла. Тогда за оставшиеся 31 цикл «Средовый» может украсть максимум 8 ключей, а «Четверговый» - максимум 5 ключей, так что в кармане будут лежать минимум 19 ключей. Остается показать, что это возможно, предъявив последовательность действий.

Пусть «Средовый» ворует в циклы 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, а «Четверговый» - в циклы 2, 9, 16, 24, 32.

Ответ: 19.

ЗАДАЧА 6

Две одинаковых звезды движутся вокруг общего центра масс по окружности радиуса $R = 10^{10}$ м, располагаясь на противоположных концах диаметра окружности, причем период обращения звезд равен T =12,5 земных суток.[#] Пренебрегая влиянием других небесных тел и приняв гравитационную постоянную равной $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2, определите массу M каждой из звезд. Ответ приведите в килограммах, поделив его на 10^{30} и округлив до одного знака после запятой.

Решение: Каждая из звезд движется под действием гравитационного притяжения к другой звезде. Пусть v – скорость движения звезды по орбите. По второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения для каждой из звезд имеем: $\frac{Mv^2}{R} = G\frac{M^2}{4R^2}$. Учитывая, что $T = \frac{2\pi R}{v}$, получаем, что $M = \frac{16\pi^2 R^3}{GT^2}$.

Ответ: $M = \frac{16\pi^2 R^3}{GT^2} \approx 2{,}0\cdot10^{30}\,кг$.

ЗАДАЧА 7

Когда я пришел в себя, каюта была набита людьми.
Передвигаться по ней было почти невозможно.
Как оказалось, все они были мною из разных дней, недель, месяцев,
а один, кажется, даже из будущего года...

Но в промежутке мы успели пройти сквозь отрицательный вихрь,
уменьшивший наше количество наполовину.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

Каждый положительный вихрь удваивает количество Ийонов, а каждый отрицательный – уменьшает на 7 (при этом, если число Ийонов в ракете меньше восьми, то ракета становится пустой). Известно, что вихрей было не меньше одного и не больше 147. Сколько вихрей могла пройти ракета всего, если в конце в ней остался один единственный Ийон Тихий?

Решение: Будем оперировать последовательностями, где номер члена – это номер вихря, а элемент – количество Ийонов в ракете после данного вихря. Заметим, что условиям задачи удовлетворяет

[#] Параметр $T \in [10; 15]$ был варьируемым в зависимости от варианта.

подпоследовательность 1-2-4-8-1. Таким образом, если какое-либо число x является решением, то решением является и число x+4. Приведем примеры

1-2-4-8-1; 1-2-4-8-16-9-2-4-8-1; 1-2-4-8-16-9-18-11-4-8-1; 1-2-4-8-16-9-18-11-22-15-8-1.

Из них следует, что решениями являются число 4 (а значит все числа вида $4+4n$); число 9 (а значит все числа $9+4n$), число 10 (а значит все числа $10+4n$) и число 11 (а значит все числа $11+4n$. Под вопросом остаются числа 1, 2, 3, 5, 6 и 7. Перебором всех вариантов

1-2-4-8-(1 или 16)-(2 или 9 или 32)-(4 или 2 или 18 или 25 или 64)-(8 или 4 или 11 или 36 или 18 или 50 или 57 или 128)

убеждаемся, что эти числа ответами не являются.

Ответ: все числа от 1 до 147, кроме 1, 2, 3, 5, 6 и 7.

ЗАДАЧА 8

В звездном скоплении 1500 одинаковых звезд. Каждая звезда имеет блеск 15^m. Каков полный блеск этого скопления? Приведите подробное решение.

Решение: Пусть L_1 и L_2 – освещенности Земли одной звездой созвездия и всем совездием соответственно. Тогда $L_2 = 1500L_1$. Пусть m_1 и m_2 - соответствующие видимые звездные величины. Тогда

$$m_1 - m_2 = -2{,}5\lg\frac{L_1}{L_2} \approx 7{,}94.$$

Ответ: $\cong 7{,}06^m$

ЗАДАЧА 9

Четверговый аккуратно
разбивал ножом яйца и выливал их содержимое в шипящий жир.
- О, прошу прощения, - запротестовал я, - свой рацион за среду ты уже
съел, ты не имеешь права второй раз за среду ужинать!

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

В результате попадания в петлю времени Ийон Тихий, летевший в ракете один, видит в среду своего двойника из четверга. «Средовый» Ийон Тихий хочет разделить с «четверговым» кусок сыра, имеющий форму пирамиды $TABCD$ с площадью основания $S_{ABCD} = 12$ см^2. Ийон из среды отрезает «четверговому» одним плоским разрезом пирамиду $TA'B'C'D'$ (точка A' лежит на ребре TA, точка B' - на ребре TB и т.д.), а для того, чтобы дележ был «честным» проводит разрез через середину высоты TH, где H - точка пересечения отрезков AC и BD. Какой наибольший объем может иметь многогранник $ABCDA'B'C'D'$, если $AH = a$ см, $BH = b$ см, $CH = c$ см, $DH = d$ см, $TH = 12$ см?[#] Ответ дайте в см^3, округлив до сотых (например, 41,22).

[#] Варьируемые параметры a,b выбираются различными из множества {2,3,4}, параметры c,d выбираются различными, случайным образом из множества {5,6,7} в зависимости от варианта.

Решение. Искомый объем $V = V_1 - V_2$, где $V_1 = V_{TABCD}$, $V_2 = V_{TA'B'C'D'}$. Задача состоит в минимизации отношения μ этих объемов. Пусть $\frac{TA'}{TA} = x, \frac{TB'}{TB} = y, \frac{TC'}{TC} = z, \frac{TD'}{TD} = w$. Обозначим через φ угол между диагоналями AC и BD . Тогда $V_1 = 2(a+c)(b+d)\sin\varphi$, $V_{TABD} = 2a(b+d)\sin\varphi$, $V_{TBCD} = 2c(b+d)\sin\varphi$. Известно, что для треугольных пирамид с общим трехгранным ребром отношение объемов равно произведению отношений соответствующих ребер, лежащих на ребрах трехгранного угла. Тогда $V_{TA'B'D'} = 2xywa(b+d)\sin\varphi$, $V_{TC'B'D'} = 2zywc(b+d)\sin\varphi$. Отсюда $\mu = \frac{yw(cz+ax)}{a+c}$. Рассуждая аналогично, получим $\mu = \frac{xz(by+dw)}{b+d}$. Теперь заметим, что секущая плоскость определяется однозначно выбором секущих $A'C'$ и $B'D'$, т.е. можно считать, что параметры x и y выбираются независимо, $z = z(x)$, $w = w(y)$. Тогда задача минимизации величины μ равносильна независимой минимизации произведений xz и yw. Рассмотрим треугольник ATC. Пусть точка H' - середина высоты TH. Известно, что произведение $TA' \cdot TC' = xz \cdot TA \cdot TC$ принимает наименьшее значение, когда H' - середина отрезка $A'C'$. Тогда $A'TC'H$ - параллелограмм, следовательно, $A'T = HC', TC' = A'H$. Далее, $\Delta ATC \sim \Delta HC'C, \Delta ATC \sim \Delta AA'H$, следовательно, $\frac{HC'}{AT} = \frac{c}{a+c}$, то есть $\frac{TA'}{TA} = x = \frac{c}{a+c}$. Аналогично $\frac{TC'}{TC} = z = \frac{a}{a+c}$. Проделаем то же для треугольника BTD. Окончательно получим, что $\frac{V_2}{V_1} = \frac{abcd}{(a+c)^2(b+d)^2}$. При этом $V_1 = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot TH = 48$.

Ответ: $48\left(1 - \frac{abcd}{(a+c)^2(b+d)^2}\right)$.

ЗАДАЧА 10

Воганы собрались в экспедицию на край Вселенной. У них есть корабль в форме таблицы, состоящий из N × M ячеек, связанных между собой. У каждой ячейки известна грузоподъемность, а у каждого вогана - масса. В каждой ячейке может быть не более одного вогана, если воган занял ячейку, грузоподъемность ячейки не может быть меньше массы вогана.

Руководитель экспедиции продумывает рассадку. Помогите ему определить, какому максимальному количеству воганов удастся отправиться в путь.

Входные данные

В первой строке даны числа N и M (1 ≤ N, M ≤ 40). В каждой из последующих N строк содержится по M чисел, обозначающих грузоподъемность соответствующей ячейки. В (N+2)-ой строке находится число K (1 ≤ K ≤ 2000) – количество воганов. В (N+3)-ей строке содержатся K чисел, i-ое из которых – масса i-ого вогана. Все массы воганов и грузоподъемности ячеек – натуральные числа, не превышающие 100.

Выходные данные

Требуется вывести одно число – максимально возможное количество участников экспедиции.

Пример:

Входные данные

3 2
5 10
7 5
5 5
6
9 5 3 5 12 10

Выходные данные
4

Решение: Участнику позволяется неограниченное количество раз загружать на сервер свой программный код и запускать автоматическое тестирование программы на случайных примерах.

Ответ: Программный код, загруженный на сервер олимпиады. Тестирование кода на работоспособность проводится автоматически на случайных примерах.

Задания и решения второго тура отборочного этапа Олимпиады «Ломоносов» по Космонавтике 2017/2018
Разминка
Для всех классов 7-11

1) Сколько високосных лет может быть в течение одного десятилетия?
Варианты ответов. Правильный ответ б)

а) 1;
б) 3;
в) 5;
г) 7.

2) Что служит основной причиной смены сезонов на Земле, т. е. почему бывают зима и лето?
Варианты ответов. Правильный ответ а)

а) наклон оси вращения Земли к плоскости ее орбиты;
б) изменение расстояния от Солнца при движении по эллиптической орбите;
в) изменение прозрачности земной атмосферы, вызванное активностью Солнца;
г) изменение наклона оси вращения Земли к плоскости ее орбиты;

3) Сколько раз в году Солнце на экваторе бывает в зените?
Варианты ответов. Правильный ответ в)
а) ни разу;
б) 1 раз;
в) 2 раза;
г) ежедневно.

4) Почему в течение месяца происходит смена фаз Луны, т. е. наблюдается новолуние, затем первая четверть, полнолуние, последняя четверть и вновь новолуние?
Варианты ответов. Правильный ответ б)
а) по причине прохождения земной тени по лунному диску;
б) по причине изменения взаимного положения Земли, Луны и Солнца;
в) по причине регулярного поворота к Земле обратной (темной) стороны Луны;
г) по причине прохождения по земной поверхности лунной тени.

5) При какой фазе Луны вся ночь бывает лунная?
Варианты ответов. Правильный ответ в)

а) в новолуние;
б) в первую четверть;
в) в полнолуние;
г) в последнюю четверть.

6) Если бы орбита Луны лежала строго в плоскости эклиптики, то солнечные и лунные затмения происходили бы реже или чаще, чем сейчас?
Варианты ответов. Правильный ответ в)

а) вообще не происходили бы;
б) происходили бы реже;
в) происходили бы чаще;
г) происходили бы еженедельно.

7) Почему Сатурн в телескоп выглядит сплюснутым?
Варианты ответов. Правильный ответ а)

а) потому что он действительно сплюснут из-за быстрого вращения;
б) эту иллюзию создает наличие кольца вдоль экватора планеты;
в) по причине сферической аберрации объектива телескопа;
г) из-за эффекта дифференциальной рефракции в атмосфере Земли.

8) Где сегодня по продолжительности день равен ночи?
Варианты ответов. Правильный ответ г)

а) на Международной линии перемены дат;
б) везде;
в) нигде;
г) на экваторе.

9) В какой конфигурации наступает наилучшая вечерняя видимость Меркурия?
Варианты ответов. Правильный ответ а)

а) в период наибольшей восточной элонгации;
б) в период наибольшей западной элонгации;
в) в период верхнего соединения;
г) в период нижнего соединения.

10) Почему во время экспедиций на Луну по программе «Аполлон» (1969-1972 гг.) посадки астронавтов производились только на видимом полушарии Луны?
Варианты ответов. Правильный ответ в)

а) это полушарие представляет наибольший интерес для науки;
б) мощности ракеты не хватало для полета на обратную сторону Луны;
в) чтобы поддерживать радиосвязь с Землей;
г) чтобы с помощью телескопов с Земли могли контролировать работу астронавтов.

7-9 классы

ЗАДАЧА 1

Из какой точки на поверхности Луны должен выехать луноход, чтобы, пройдя 300 км на север, затем 300 км на восток, затем 300 км на юг и 300 км на запад, он оказался в исходной точке? Приведите подробное решение.

Решение. Чтобы луноход оказался в исходной точке, необходимо и достаточно, чтобы длины параллелей, по которым он движется на восток и на запад, были равны. Значит, эти параллели должны отстоять на равное расстояние от экватора. Луноход начинает движение на север, следовательно, он должен находиться в точке, отстоящей от экватора на юг на расстояние, равное половине от длины его пути на север, то есть на 150 км.

Ответ: Из любой точки поверхности, удаленной на 150 км на юг от экватора.

ЗАДАЧА 2

Луноход пытается связаться с Землей. Из-за особенностей рельефа и трудностей связи, зона уверенной связи на поверхности планеты имеет форму многоугольника, причем связь возможна только из точек, имеющих целочисленные координаты. Из точек на границе многоугольника связь невозможна.

Координаты вершин многоугольника - целые числа, всего N вершин. Требуется найти количество точек, из которых можно установить уверенную связь с Землей. Стороны многоугольника друг с другом не соприкасаются (за исключением соседних - в вершинах) и не пересекаются.

Ограничения: 3 <= N <= 100 000, координаты вершин целые и по модулю не превосходят 1 000 000 .

Входные данные

В первой строке содержится число N, в следующих N строках - пары чисел - координаты точек. Если соединить точки в данном порядке, а также соединить первую и последнюю точки, получится заданный многоугольник.

Выходные данные

Вывести одно число - количество точек, лежащих внутри многоугольника и не лежащих при этом на его границе.

Примеры

Входные данные

4

1 1

1 3

3 3

3 1

Выходные данные

1

Решение: Участнику позволяется неограниченное количество раз загружать на сервер свой программный код и запускать автоматическое тестирование программы на случайных примерах.

Ответ: Программный код, загруженный на сервер олимпиады. Тестирование кода на работоспособность проводится автоматически на случайных примерах.

ЗАДАЧА 3

Освоенный участок лунной поверхности имеет форму квадрата *ABCD* со стороной у км.[#] От середины отрезка *AB*(точка *K)* до середины отрезка *CD*(точка *N)* проложена дорога по прямой - отрезок *KN*. Луноход выезжает из точки *A*, выбирает на этом отрезке две точки *L*и *M* и движется по маршруту *ALCM*так, что площади четырехугольников *ABCL, ALCM* и *AMCD* равны. Найдите расстояние *LM*.Дайте численный ответ в км, округлив до двух знаков после запятой (например, 2,29).

Решение. Из условия задачи следует, что точка Lлежит между точками Kи M. Поскольку площади четырехугольников *ABCL* и *AMCD* равны, то $KL = MN$. Обозначим длину каждого из этих отрезков через x, тогда $LM = y - 2x$. Очевидно, что $S_{ABCL} = S_{\Delta AKL} + S_{KBCN} - S_{\Delta LCN} = \frac{xy}{4} + \frac{y^2}{2} - \frac{y(y-x)}{4} = \frac{y^2}{4} + \frac{xy}{2}$. Далее, $S_{ALCM} = 2S_{\Delta LCM} = 2(S_{\Delta LCN} - S_{\Delta MCN}) = 2\left(\frac{y(y-x)}{4} - \frac{xy}{4}\right) = \frac{y^2}{2} - xy$. Приравнивая площади, получаем, что $x = \frac{y}{6}$, следовательно, $LM = y - 2x = \frac{2y}{3}$.

Ответ:$\frac{2y}{3}$.

ЗАДАЧА 4

Для наблюдателя на Земле видимая звездная величина Луны в полнолуние равна -12,7^{m}. А какой бы она была, если бы система Земля-Луна располагалась в поясе Койпера, например, у орбиты Плутона? Расстояние от Солнца до Плутона принять равным 40 а. е. Приведите подробное решение.

Решение: Пусть L_1 и L_2 – освещенности Земли Луной, а m_1 *и* m_2 - видимые звездные величины Луны в первом и во втором случае. Тогда

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \lg \frac{L_1}{L_2}.$$

Световой поток, падающий на Землю с Луны прямо пропорционален освещенности Луны Солнцем $L_1 = kE_1$, $L_2 = kE_2$ (коэффициент пропорциональности в первом и во втором случае одинаков). Освещенность вычислим по формуле освещенности от точечного источника

$$E = \frac{I \cdot \cos\theta}{r^2},$$

где I – сила света, а θ - угол падения лучей на поверхность Луны (при вычислении видимой звездной величины он берется равным 90°). Таким образом,

$$m_2 = m_1 + 5 \lg \frac{r_2}{r_1} = -12{,}7 + 5 \lg 40 \approx -4{,}69.$$

[#] Параметр $y \in [2; 6]$ был варьируемым в зависимости от варианта.

Ответ: -4,7^m. (Принимается и -4,69^m как более точный ответ)

ЗАДАЧА 5

Когда в понедельник, второго апреля, я пролетал
вблизи Бетельгейзе - метеорит, размером не больше
фасолины, пробил обшивку, вывел из строя регулятор
мощности и повредил рули – ракета потеряла управление.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

Чтобы не допустить перегрева пробитого метеоритом реактора, Ийон Тихий поставил на него ведро с холодной водой. Для нагревания этой воды от температуры $t_1 = 10^\circ$ С до температуры $t_2 = 100^\circ$С понадобилось время τ мин. При этом к воде ежесекундно подводилось одинаковое количество теплоты. Затем за время τ_1 вся эта вода выкипела.[#] Чему равно τ, если скорость подвода теплоты не меняется? Теплообменом воды с окружающими телами можно пренебречь. Удельная теплоёмкость воды c = 4,2 Дж/г/К. Удельную теплоту парообразования воды примите равной r = 2,3 МДж/кг. Ответ дайте в минутах с точностью до десятых долей минуты (например, 95,2).

Решение. Согласно формулам расчета удельной теплоемкости и удельной теплоты парообразования, $c = \frac{Q}{m(t_2-t_1)}$, $1000r = \frac{Q_1}{m}$, где m–масса воды, Qи Q_1соответствующие количества теплоты. Поскольку количество теплоты пропорционально времени подвода тепла, то $\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{Q}{Q_1} = \frac{cm(t_2-t_1)}{1000rm}$, откуда $\tau = \tau_1 \frac{c(t_2-t_1)}{1000\ r}$.

Ответ:$\tau = \tau_1 \frac{c(t_2-t_1)}{1000\ r}$ мин.

ЗАДАЧА 6

...ракета между тем неслась вслепую, то и дело
попадая в гравитационные вихри.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

Чтобы не пострадать от летающих по ракете предметов, перед прохождением очередного вихря Ийон Тихий привязал себя к стулу и закрепил все тяжелые предметы. Первоначально недеформированная пружина, которая удерживала ящик с инструментами, при прохождении вихря медленно растянулась на некоторую величину x, совершив работу $A_1 = 1$Дж. Затем растяжение пружины дополнительно увеличилось еще на величину nx. Какая работа A_2 была совершена при дополнительном растяжении пружины, если $n = ...$?[##]

Решение. Согласно закону Гука, работа, совершаемая силой упругости, равна $A = \frac{k(l_2)^2}{2} - \frac{k(l_1)^2}{2}$, где l_1и l_2 – соответственно начальное и конечное растяжение пружины. Отсюда $A_1 = \frac{kx^2}{2}$, $A_2 = \frac{k(x+nx)^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = \frac{kx^2}{2}n(n+2) = n(n+2)A_1$.

[#] Параметр $\tau_1 \in [6; 15]$ был варьируемым в зависимости от варианта.
[##] Параметр $n \in [1{,}6; 2{,}4]$ был варьируемым в зависимости от варианта.

Ответ: $A_2 = n(n+2)A_1$ Дж.

ЗАДАЧА 7

Там говорилось о феноменах так называемой петли времени, то есть об искривлении вектора времени в пределах особенно мощных гравитационных полей; это явление может иногда привести даже к тому, что время повернет вспять и произойдет так называемое удвоение настоящего.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

В результате попадания в петлю времени Ийон Тихий, летевший в ракете один, утром во вторник увидел двух дублей самого себя, из завтрашнего и послезавтрашнего дней. Вторничный Ийон Тихий съел *x%* дневного запаса питания, «средовый» съел y% остатка,[#] а «четверговый» доел оставшиеся 2,5кг. Сколько кг питания было всего? Приведите полное решение.

Решение. Пусть A – исходная масса питания (в килограммах). Тогда «вторничный» Ийон съел $\frac{x}{100}A$кг, а «средовый»: $\frac{y}{100}\left(1-\frac{x}{100}\right)A$. Получаем уравнение $\frac{x}{100}A+\frac{y}{100}\left(1-\frac{x}{100}\right)A+2{,}5=A$, откуда $A=\frac{25000}{(100-\mathrm{x})(100-\mathrm{y})}$.

Ответ: $\frac{25000}{(100-\mathrm{x})(100-\mathrm{y})}$ кг

ЗАДАЧА 8

На поверхности планеты заданы две точки своими широтой и долготой. Найти минимальную длину пути по поверхности этой планеты из одной точки в другую.

Входные данные

В первой строке находится число R - радиус планеты, во второй строке заданы широта и долгота первой точки, в третьей строке - широта и долгота второй точки. Широта в градусах от -90 до 90, долгота в градусах от -180 до 180, 100 <= R <= 10 000, все числа вещественные.

Выходные данные

Вывести длину пути с двумя знаками после запятой.

Примеры

Входные данные

3437.5

-45 -45

45 -45

[#] Параметры $x, y \in [20; 40]$ были варьируемыми в зависимости от варианта.

Выходные данные

5399.61

Решение: Участнику позволяется неограниченное количество раз загружать на сервер свой программный код и запускать автоматическое тестирование программы на случайных примерах.

Ответ: Программный код, загруженный на сервер олимпиады. Тестирование кода на работоспособность проводится автоматически на случайных примерах.

ЗАДАЧА 9

Когда я пришел в себя, каюта была набита людьми.
Передвигаться по ней было почти невозможно.
Как оказалось, все они были мною из разных дней, недель, месяцев,
а один, кажется, даже из будущего года...

Но в промежутке мы успели пройти сквозь отрицательный вихрь,
уменьшивший наше количество наполовину.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.

Путешествие седьмое: 147 вихрей

Каждый положительный вихрь удваивает количество Ийонов, а каждый отрицательный – уменьшает на 3 (при этом, если число Ийонов в ракете меньше четырех, то ракета становится пустой). Известно, что вихрей было не меньше одного и не больше 147. Сколько Ийонов может оказаться в ракете, если в начале путешествия Ийон был один? Варианты ответа 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 25, 45, 147.

Решение: Будем оперировать последовательностями, где номер члена – это номер вихря, а элемент – количество Ийонов в ракете после данного вихря. Приведем примеры

1-2-4; 1-2-4-8-5; 1-2-4-8-5-10-7; 1-2-4-8; 1-2-4-8-5-10; 1-2-4-8-5-10-7-14-28-25.

Числа 6, 9, 45 и 147 не могут быть ответами, поскольку все они делятся на три, а наша последовательность таких чисел не содержит. Докажем этот факт по индукции: первый элемент последовательности не делится на три по условию; если -й член последовательности не делится на три, то и следующий член, равный либо $2n$, либо $n-3$, на три не делится.

Ответ: 4, 5, 7, 8, 10, 25.

ЗАДАЧА 10

Потом говорили, что эту историю я выдумал, а злопыхатели позволяли себе распространять гнусные сплетни, будто я питаю слабость к алкоголю и, тщательно скрывая это на Земле, предаюсь своему пороку в течение долгих лет космических путешествий.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.

Путешествие седьмое: 147 вихрей

В память о путешествии Ийон Тихий заказал изготовить золотой гаечный ключ. Однако мастер, питая к Ийону зависть, вместо чистого золота использовал сплав золота и меди. Ключ имеет массу $m = 1{,}6$ кг и объем[#] $V = \ldots$ дм^3. Считая, что объем сплава равен суммарному объему исходных компонент, определите массу m_1 золота в этом изделии. Плотность золота $\rho_1 = 19{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность меди $\rho_2 = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3. Ответ дайте в кг с точностью до двух знаков после запятой (например, 0,76).

Решение. Поскольку $m = \rho V$, то $V_1 = \frac{m_1}{\rho_1}$, $V_2 = \frac{m_2}{\rho_2}$. Из условия $V = V_1 + V_2$ получаем, что

$\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m - m_1}{\rho_2} = V$, откуда $m_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2}(m - V\rho_2)$.

Ответ: $m_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2}(m - V\rho_2)$

Задания и решения второго тура отборочного этапа Олимпиады «Ломоносов» по Космонавтике 2017/2018 10-11 классы

ЗАДАЧА 1

В 1054 г. астрономы заметили вспышку звезды в созвездии Телец: это был взрыв сверхновой. Сейчас на этом месте виден остаток взрыва звезды – газовая Крабовидная туманность радиусом около 3 угловых минут. С какой средней скоростью расширялся этот газ за прошедшее тысячелетие? Расстояние до Крабовидной туманности принять равным 2000 пк. Скорость вычислить в километрах в секунду. Приведите подробное решение.

Решение: Диаметр туманности равен $d = r\alpha$, где $r = 2000$пк $= 6{,}18 \cdot 10^{16}$ км, $\alpha = 3' = \frac{\pi}{3600}$ рад. Тогда скорость равна $v = \frac{d}{T} = \frac{6{,}18 \cdot \pi \cdot 10^{16}}{963 \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 3600} \frac{\text{км}}{\text{с}} \approx 1775$ км/с.

Ответ: около 1700 км/с.

ЗАДАЧА 2

Спутник вращается вокруг своей планеты по круговой орбите радиуса $R = 83500$км. Сколько полных оборотов сделает спутник вокруг своей планеты за 100 земных суток, если известно, что ускорение свободного падения на поверхности планеты $g = 10{,}4$м/с^2? Считайте планету однородным шаром радиуса $r = 6300$ км.

Решение: Пусть m – масса спутника, M – масса планеты, v – скорость движения спутника по орбите, G – гравитационная постоянная. Согласно второму закону Ньютона и закону всемирного

[#] Параметр $V \in [15; 30]$ был варьируемым в зависимости от варианта.

тяготения уравнение движения спутника имеет вид: $\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$. Учитывая, что ускорение свободного падения на поверхности планеты $g = G\frac{M}{r^2}$, а период обращения спутника $T = \frac{2\pi R}{v}$, получаем что $T = \frac{2\pi}{r}\sqrt{\frac{R^3}{g}}$. Тогда количество полных оборотов составляет целую часть дроби $\frac{N \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24}{T}$.

Ответ: целая часть числа $N \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot \frac{r}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R^3}}$.

ЗАДАЧА 3

Космонавты Артем и Василий высадились на Марсе и установили контакт с марсианами.

Оказалось, все марсиане имеют по две ноги, но иногда любят стоять на одной ноге. Когда марсианин стоит на одной ноге, другую ногу не видно.

Во встречающей делегации марсиан некоторые стояли на одной ноге, а некоторые на двух. Артем пересчитал видимые ноги и получил число A.

При прощании Василий пересчитал видимые ноги заново (некоторые марсиане могли поменять позу) и получил число B.

Вернувшись на корабль, космонавты заинтересовались, сколько же марсиан их встречало. Вскоре они поняли, что однозначно определить это число можно не всегда. Теперь они хотят понять, какое минимальное и какое максимальное количество марсиан могло их встречать.

Требуется написать программу, которая по заданным числам a и b выведет минимальное и максимальное количество марсиан, встреченных космонавтами.

Входные данные содержат два целых числа a и b, разделенных ровно одним пробелом ($1 \le a \le 100$, $1 \le b \le 100$).

Выходные данные

Выведите два целых числа, разделенных пробелом — минимальное и максимальное число марсиан. Гарантируется, что хотя бы одно количество марсиан соответствует условию задачи.

Примеры

Входные данные

3 4

Выходные данные

2 3

Примечание к примеру тестов

В приведенном примере возможны следующие варианты:

* Всего было два марсианина. Когда Артем считал ноги, один стоял на двух ногах, а другой — на одной. Артем насчитал три ноги. Когда Василий считал ноги, оба марсианина стояли на двух ногах, Василий насчитал четыре ноги.

* Всего было три марсианина. Когда Артем считал ноги, все стояли на одной ноге, Артем насчитал три ноги. Когда Василий считал ноги, один марсианин стоял на двух ногах, а еще два — на одной. Василий насчитал четыре ноги.

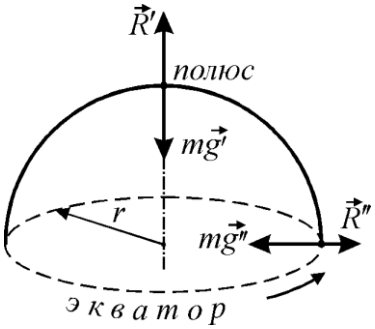
Решение: Участнику позволяется неограниченное количество раз загружать на сервер свой программный код и запускать автоматическое тестирование программы на случайных примерах.

Ответ: Программный код, загруженный на сервер олимпиады. Тестирование кода на работоспособность проводится автоматически на случайных примерах.

ЗАДАЧА 4

Вес тела на экваторе составляет η% от веса этого же тела на полюсе.[#] Найдите период вращения планеты вокруг своей оси T, если плотность вещества планеты $\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$кг/м^3. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$м^3·кг$^{-1}$·с$^{-2}$. Планету считайте однородным шаром.

Решение: Силы, действующие на тело на полюсе и на экваторе, изображены на рисунке, где $\vec{g}'$ и $\vec{g}''$ – ускорения, вызываемы силой тяжести, $\vec{R}'$ и $\vec{R}''$ – силы реакции опор, на которых покоится тело. Поскольку планета представляет собой однородный шар, ускорения $\vec{g}'$ и $\vec{g}''$ различаются только направлением, а модули их совпадают: $g' = g'' = g$. Для тела, покоящегося на полюсе, сила тяжести и сила реакции опоры уравновешены и его вес по величине равен $P' = R' = mg$. Тело, находящееся на экваторе, движется по окружности, радиус которой равен радиусу планеты r. Следовательно, сила тяжести и сила реакции опоры не уравновешены и по второму закону Ньютона $m\omega^2 r = mg - R''$, где ω – угловая скорость вращения планеты. Поэтому вес тела на



[#] Параметр $\eta \in [94; 98]$ был варьируемым в зависимости от варианта.

экваторе по величине равен $P'' = R'' = mg - m\omega^2 r$. По условию $mg - m\omega^2 r = \frac{\eta}{100\%} mg$, откуда $\omega^2 = \frac{g}{r}\left(1 - \frac{\eta}{100\%}\right)$. С другой стороны, $g = \frac{GM}{r^2}$, где $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ – масса планеты. Отсюда следует, что $\frac{g}{r} = \frac{4}{3}\pi G\rho$. Учитывая, что период вращения планеты $T = \frac{2\pi}{\omega}$, получаем, что $T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho(1 - \eta/100\%)}}$.

Ответ: $T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho(1 - \eta/100\%)}}$.

ЗАДАЧА 5

Там говорилось о феноменах так называемой петли времени, то есть об искривлении вектора времени в пределах особенно мощных гравитационных полей; это явление может иногда привести даже к тому, что время повернет вспять и произойдет так называемое удвоение настоящего.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

В результате попадания в петлю времени Ийон Тихий, летевший в ракете один, утром во вторник увидел своего двойника из среды. Каждый из Ийонов хочет починить рули ракеты, но для этого нужно выйти в открытый космос, а скафандр только один. Тогда они решают разыграть скафандр в следующей игре. «Вторничный» Ийон ставит на шахматную доску короля. Далее «средовый» может сдвинуть короля либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх, либо на одну клетку по диагонали вправо-вверх. Затем по тем же правилам ход делает «вторничный», затем снова «средовый» и т.д. (пропускать ходы нельзя). Выигрывает тот, кто поставит короля на поле h8. На какое поле надо поставить короля «вторничному» Ийону, чтобы гарантировано выиграть? Выберите правильные ответы.

Варианты ответов: a1, a2, a3, b2, b3, b4, c2, d2.

Решение: Разделим все клетки доски на «выигрышные» и «проигрышные». Пусть король находится на некоторой клетке и ход принадлежит игроку А. Клетка называется «выигрышной», если у игрока А есть стратегия, приводящая его к выигрышу вне зависимости от действий игрока Б. В противном случае клетка называется «проигрышной». Поле h8 является по определению выигрышным. Поля g8, g7 и h7 также являются «выигрышными», поскольку игрок А достигает победы за один ход. Тогда поле h6 является «проигрышным» - игрок А вынужден сделать ход на h7 (это единственный возможный ход), после чего игрок Б выигрывает. Аналогично, «проигрышным» является поле f8. Заметим, что далее поля можно классифицировать с учетом уже имеющейся информации: если с данного поля существует допустимый ход на «проигрышную» клетку, то поле является «выигрышным»; если же все допустимые ходы ведут на «выигрышные» клетки, то поле является «проигрышным». Результат «классификации» приведен на рисунке. Поскольку по условию «вторничный» ходит вторым, то ему надо

В	П	В	П	В	П	В	В
В	В	В	В	В	В	В	В
В	П	В	П	В	П	В	П
В	В	В	В	В	В	В	В
В	П	В	П	В	П	В	П
В	В	В	В	В	В	В	В
В	П	В	П	В	П	В	П
В	В	В	В	В	В	В	В

ставить короля на «проигрышные» поля.

Ответ: b2, b4, d2.

ЗАДАЧА 6

Искусственный спутник Земли, имеющий форму шара диаметра $D = ...$м,[#] движется по круговой орбите со скоростью $v = 7{,}9$ км/с. Давление воздуха на высоте орбиты спутника $p = 0{,}9$ Па, температура $T = 270$К. Полагая, что скорость теплового движения молекул воздуха пренебрежимо мала по сравнению со скоростью спутника, найдите среднее число $\bar{z}$ столкновений молекул со спутником в единицу времени. Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$Дж/К.

Решение: Оценим вначале скорость теплового движения молекул воздуха на высоте орбиты спутника. Для этого воспользуемся формулой для среднеквадратичной скорости молекул, а именно $v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{M}}$, где $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная, $M = 0{,}029$ кг/моль – молярная масса воздуха. Расчет для $v_{\text{ср.кв.}}$ дает значение $v_{\text{ср.кв.}} \approx 470$ м/с, что действительно пренебрежимо мало по сравнению со скоростью спутника. Поскольку молекулы воздуха можно считать практически неподвижными, за время τ спутник столкнется с молекулами, находящимися в воображаемом цилиндре сечением $S = \pi D^2/4$ и длиной $v\tau$. Число таких молекул $\bar{z} = Sv\tau n$, где $n = \dfrac{p}{kT}$ – их концентрация.

Ответ: $\bar{z} = \pi D^2 v \dfrac{p}{4kT}$.

ЗАДАЧА 7

Когда я пришел в себя, каюта была набита людьми.
Передвигаться по ней было почти невозможно.
Как оказалось, все они были мною из разных дней, недель, месяцев,
а один, кажется, даже из будущего года...

Но в промежутке мы успели пройти сквозь отрицательный вихрь,
уменьшивший наше количество наполовину.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.

Путешествие седьмое: 147 вихрей

Каждый положительный вихрь удваивает количество Ийонов, а каждый отрицательный – уменьшает на 7 (при этом, если число Ийонов в ракете меньше восьми, то ракета становится пустой). Известно, что вихрей было не меньше одного и не больше 147. Сколько Ийонов может оказаться в ракете, если в начале путешествия Ийон был один? Отметьте верные ответы.

Варианты ответов: 2,3,4,5,6,7, 8,9,10, 45, 57, 103, 147.

Решение: Будем оперировать последовательностями, где номер члена – это номер вихря, а элемент – количество Ийонов в ракете после данного вихря. Приведем примеры

[#] Параметр $D \in [0{,}8; 1{,}2]$ был варьируемым в зависимости от варианта.

1-2; 1-2-4; 1-2-4-8; 1-2-4-8-16-9; 1-2-4-8-16-32-64-57.

Теперь вычислим элементы последовательности по модулю 7

1-2-4-1-(2 или 1)-(4 или 2 или 2 или 1)-(1 или 4 или 4 или 2 или 4 или 2 или 2 или 1)-…

Таким образом, члены последовательности по модулю 7 могут быть равны только 1, 2 и 4.

Ответ: 2, 4, 8, 9, 57.

ЗАДАЧА 8

В звездном скоплении 251 звезда, причем каждая из них имеет блеск 16^m. Каков полный блеск этого скопления? Приведите подробное решение.

Решение: Пусть L_1 и L_2 – освещенности Земли одной звездой созвездия и всем созвездием соответственно. Тогда $L_2 = 251L_1$. Пусть m_1 и m_2 - соответствующие видимые звездные величины. Тогда

$$m_1 - m_2 = -2{,}5\lg\frac{L_1}{L_2} \approx 6.$$

Ответ: $\cong 10^m$

ЗАДАЧА 9

Четверговый аккуратно
разбивал ножом яйца и выливал их содержимое в шипящий жир.
- О, прошу прощения, - запротестовал я, - свой рацион за среду ты уже
съел, ты не имеешь права второй раз за среду ужинать!

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

В результате попадания в петлю времени Ийон Тихий, летевший в ракете один, видит в среду своего двойника из четверга. «Средовый» Ийон Тихий хочет разделить с «четверговым» кусок сыра, имеющий форму правильной четырехугольной пирамиды $TABCD$. Ийон из среды отрезает «четверговому» одним плоским разрезом пирамиду $TAB'C'D'$ (точка B' лежит на ребре TB, точка C' - на ребре TC, точка D' - на ребре TD). Поскольку «четверговый» внимательно следит за процессом разрезания, то «средовый» Ийон выбирает точки B' и D' так, что $TB: B'B = TD: D'D = x$.[#] Найдите отношение объемов $V_{TAB'C'D'}: V_{TABCD}$.

Решение. Поскольку $TB: B'B = TD: D'D = x$, то $\frac{TB'}{TB} = \frac{TD'}{TD} = \frac{x-1}{x}$. Пусть TH – высота пирамиды, H' - точка пересечения TH и $B'D'$, тогда и $\frac{TH'}{TH} = \frac{x-1}{x}$. Обозначим $V_{TABCD} = V$. Поскольку $\frac{V_{TAB'D'}}{V_{TABD}} = \frac{TA\cdot TB'\cdot TD'}{TA\cdot TB\cdot TD}$, то $V_{TAB'D'} = \frac{V}{2}\frac{(x-1)^2}{x^2}$ (пирамида $TABCD$ – правильная, значит, объем пирамиды $TABD$ равен $\frac{V}{2}$). Найдем отношение $\frac{TC'}{TC}$. Для этого применим теорему Менелая к треугольнику HTC и секущей $H'C'$: $\frac{CC'}{TC'}\frac{TH'}{HH'}\frac{AH}{AC} = 1$. Поскольку исходная пирамида является правильной, то основание ее высоты

[#] Параметр $x \in [1{,}5; 2{,}5]$ был варьируемым в зависимости от варианта.

попадает в середину диагонали основания, откуда получаем, что $\frac{CC'}{TC'} = \frac{2}{x-1}$, а значит, $\frac{TC'}{TC} = \frac{x-1}{x+1}$. Так как $\frac{V_{TCB'D'}}{V_{TCBD}} = \frac{TC \cdot TB' \cdot TD'}{TC \cdot TB \cdot TD}$, то $V_{TCB'D'} = \frac{V}{2}\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)}$.Окончательно получаем: $V_{TAB'C'D'} = \frac{V}{2}\frac{(x-1)^2}{x^2}\left(1 + \frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)}V$.

Ответ: $\frac{(x-1)^2}{x(x+1)}$.

ЗАДАЧА 10

Луноход пытается связаться с Землей. Из-за особенностей рельефа и трудностей связи, зона уверенной связи на поверхности планеты имеет форму многоугольника, причем связь возможна только из точек, имеющих целочисленные координаты. Из точек на границе многоугольника связь неустойчива, за пределами многоугольника связь невозможна.

Координаты вершин многоугольника - целые числа, всего N вершин. Требуется найти количество точек, из которых можно установить уверенную связь с Землей. Стороны многоугольника друг с другом не соприкасаются (за исключением соседних - в вершинах) и не пересекаются.

Ограничения: 3 <= N <= 100 000, координаты вершин целые и по модулю не превосходят 1 000 000 .

Входные данные

В первой строке содержится число N, в следующих N строках - пары чисел - координаты точек. Если соединить точки в данном порядке, а также соединить первую и последнюю точки, получится заданный многоугольник.

Выходные данные

Вывести одно число - количество точек, лежащих внутри многоугольника и не лежащих при этом на его границе.

Примеры

Входные данные

3

1 0

0 0

0 1

Выходные данные

0

Решение: Участнику позволяется неограниченное количество раз загружать на сервер свой программный код и запускать автоматическое тестирование программы на случайных примерах.

Ответ: Программный код, загруженный на сервер олимпиады. Тестирование кода на работоспособность проводится автоматически на случайных примерах.

Задания и решения заключительного этапа Олимпиады «Ломоносов» по Космонавтике 2017/2018 7-9 классы

Вариант 2

1. На планете Бинара принята двоичная система счисления (каждое число записывается последовательностью нулей и единиц; последовательность $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$, где каждая из цифр a_k – это 0 или 1,переводится в десятичную систему по правилу: $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_n \cdot 2^n$, например, число 1011100 в двоичной системе равняется
$$0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 = 4 + 8 + 16 + 64 = 92$$
в десятичной системе счисления). Малышка Би учится в первом классе и еще не очень хорошо умеет считать. Учитель задал ей вычислить:$100110 + 11011$=? Помогите Би, запишите правильный ответ в двоичной и десятичной системах счисления.

   Решение: Сложение в двоичной системе производится так же, как в десятичной с той лишь разницей, что перенос через разряд происходит тогда, когда сумма по данному разряду превышает 1. Тогда 100110+11011=1000001. Перевод в десятичную систему: $1000001 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^6 = 65$.
   Ответ: 1000001 в двоичной системе и 65 в десятичной системе.

2. Сферический астероид имеет среднюю плотность 5,5 г/см^3 и радиус $R = 0{,}6$ километров. С какой минимальной скоростью V нужно подпрыгнуть космонавту, находящемуся на поверхности астероида, чтобы навсегда покинуть его и улететь в космос? Значение скорости укажите в метрах в секунду, ответ округлите до одного знака после запятой. Значение гравитационной постоянной примите равным $6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}$; значение постоянной $\pi = 3{,}14$.

   Решение: Очевидно, подпрыгнуть нужно со второй космической скоростью, равной $\left(\frac{2GM}{R}\right)^{1/2}$. Учитывая, что плотность астероида равна плотности Земли, можно использовать значение второй космической скорости для Земли, чтобы облегчить вычисления: $V = 11{,}2$ км/с $\cdot(M_А/M_З)^{1/2}(R_З/R_А)^{1/2}$. Учитывая, что $M \sim R^3$, получим $V = 11{,}2$ км/с $\cdot\ (R_А/R_З)^{3/2}(R_З/R_А)^{1/2} =$ 11,2 км/с $(R_А/R_З)$. Радиус Земли $R_З$ = 6371 км.
   Ответ: V = 11 200 (R/6371) м/с.

3. К концу длинного путешествия бортовой вычислитель на корабле Ийона Тихого стал разговаривать сам с собой. Одна из тем для обсуждения - натуральные числа. Взяв вначале для рассмотрения число 2, вычислитель размышлял над такой последовательностью:
   2
   12
   1112
   3112
   132112
   ...
   а) Напишите восьмой член последовательности.

Ответ: 13211321322112
Решение: Каждый следующий член последовательности – результат прочтения слева направо цифр предыдущего члена. Например, второй член появляется в результате прочтения первой строки: «одна двойка», третий: «одна единица одна двойка» и т.д.

б) Может ли какая-либо строка иметь вид “222”? Ответ обоснуйте.

Ответ: нет
Решение: Вторая строка уже содержит единицу, следовательно, любая следующая строка содержит единицу.

в) Напишите алгоритм вычисления n-го члена последовательности на одном из Ваших любимых языков программирования (опечатки не караются!) или на естественном языке.

4. Металлический шарик, нагретый до температуры t =70 ºС, положили в стакан с водой, имеющей температуру t_0 = 20 ºС. После достижения теплового равновесия температура воды в стакане стала равной t_1 = 30 ºС. Затем шарик переложили в другой стакан с таким же количеством воды, имеющей температуру t_0. Какая температура t_2 установится в этом стакане? Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Ответ приведите в градусах Цельсия, округлив до одного знака после запятой.

Решение. Пусть $C_ш$ – теплоемкость шарика, а $C_в$ – теплоемкость стакана с водой. Уравнения теплового баланса имеют вид:

$$C_ш(t-t_1)=C_в(t_1-t_0) \quad \text{(когда шарик положили в первый стакан)},$$

$$C_ш(t_1-t_2)=C_в(t_2-t_0) \quad \text{(когда шарик переложили во второй стакан)}.$$

Из этих выражений следует равенство: $\frac{t-t_1}{t_1-t_2}=\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}$. Выражая из него t_2, находим, что $t_2=\frac{t_1^2+(t-2t_1)t_0}{t-t_0}$.

Ответ: $t_2=\frac{t_1^2+(t-2t_1)t_0}{t-t_0}$

5. Пусть x и y– натуральные числа. Известно, что из следующих четырех утверждений:
а) y делится на $x+1$;
б) $y=2x+8$;
в) $x+y$ делится на 3;
г) $7x+y+6$ – простое число –
три верных, а одно неверное. Найдите все возможные пары(x,y)таких чисел.

Ответ: (1,10) и (5,18).
Решение: Так как $7x+y+6=(x+y)+6(x+1)$, то при выполнении в), выражение $7x+y+6$ делится на три и больше 6, т.е. не простое число. Таким образом, возможны два случая – выполнено а), б) и в) или а), б) и г). Если выполнено б), то $x+y=3x+8$ – не делится на три, значит первый

случай невозможен. Во втором случае $y = k(x+1) = 2x+8$, где k целое. Отсюда $x = \frac{8-k}{k-2}$ – натуральное число, т.е. $3 \le k \le 7$. Перебирая варианты, получаем ответ.

6. Космонавты, находящиеся на борту международной космической станции (МКС), проводят открытый урок по физике для учащихся седьмых – девятых классов. Предложите эксперимент, который они бы могли продемонстрировать. Опишите (в свободной форме, в объеме 1-2 страницы) сам эксперимент, его физическую подоплеку, укажите, почему его интересно провести именно на борту МКС (ссылки на соответствующие законы физики приветствуются).

Критерии.
Задачи 3.б) и 3.в) оценивались вместе, задача 3.а) независимо.
За каждую из задач 1)-5) выставлялись оценки “+” – решена верно, “+.” – есть несущественные ошибки (приравнивается к “+”), “+/-“ – решение, в целом, верное, “-/+” – есть верная идея решения.
Оценка за задачу 6) складывалась из оценок: эксперимент может быть проведен: да/нет=1/0, учтена специфика МКС: да/нет=1/0, есть физическое обоснование да/не полное/нет=2/1/0, эксперимент полностью описан в работе: да/нет=1/0. Полученная сумма учитывалась по правилу 5=“+”, 4 и 3=”+/-“, 2 и 1=”-/+”.

Критерии общей оценки:
есть 6 плюсов=100;
ровно 5 плюсов и не менее одного плюс/минус=95;
ровно 5 плюсов, нет плюс/минус=90;
ровно 4 плюса и хотя бы один плюс/минус=85;
ровно 4 плюса, нет плюс/минус=80;
ровно 3 плюса и не менее 3 плюс/минус=75;
ровно 3 плюса и ровно 2 плюс/минус=70;
ровно 3 плюса и ровно один плюс/минус=65;
ровно 3 плюса, нет плюс/минус=60;
ровно 2 плюса и не менее 4 плюс/минус=55;
ровно 2 плюса и ровно 3 плюс/минус=50;
ровно 2 плюса и ровно 2 плюс/минус=45;
ровно 2 плюса и ровно один плюс/минус=40;
ровно 2 плюса, нет плюс/минус=35;
ровно 1 плюс=30;
нет плюсов, но есть плюс/минус=20;
нет плюс/минус=0.

Задания и решения заключительного этапа Олимпиады «Ломоносов» по Космонавтике 2017/2018 10-11 классы

Вариант 2

1. Во время своего очередного путешествия Ийон Тихий стартовал с Земли и, двигаясь с постоянной скоростью, прибыл на планету Панту в полдень 1 апреля. В пути он подсчитал, что если бы его скорость была на 20% больше, он прилетел бы ровно на 4 дня раньше. Какого числа Ийон Тихий покинул Землю?

Ответ: 8 марта.

Решение: Пусть v_1 - скорость Ийона. Если $v_2 = v_1 + 20\% v_1 = 1{,}2 v_1$, то $t_2 = t_1 : 1{,}2 = \frac{5}{6} t_1$. Тогда $t_1 - t_2 = \frac{1}{6} t_1 = 4$, а значит Ийон был в пути 24 дня.

2. Планета двигалась по круговой орбите радиуса $R = 26$ астрономических единиц, но внезапно остановилась и начала падать на Солнце. Через какое время t (суток) она достигнет поверхности Солнца? (Считайте, что R много больше радиуса Солнца.)

Ответ: $t = 64{,}6\ R^{3/2}$.

Решение: Падение по радиусу к Солнцу с расстояния R можно представить как движение по предельно сжатому эллипсу с большой полуосью $a = R/2$. Время падения t равно половине орбитального периода P на этой орбите. Значение P легко определяется из 3-го закона Кеплера путем сравнения с движением Земли: $(P / 1\text{ год})^2 = (a / 1\text{ а. е.})^3$. Отсюда $t = P/2 = 0{,}5$ года $(R / 2\text{ а. е.})^{3/2} = 0{,}177$ года $(R / 1\text{ а. е.})^{3/2} = 64{,}6$ суток $(R / 1\text{ а. е.})^{3/2}$

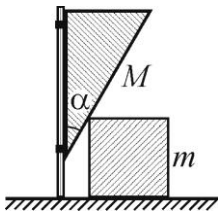
3. Вес выводимого на орбиту спутника не превышает 1 тонны. Одна ракета-носитель может вывести на орбиту не более 4 тонн полезной нагрузки.

3.1. Докажите, что группировку спутников общей массой 36 тонн можно вывести на орбиту не более чем за 11 пусков.

3.2. Напишите алгоритм, распределяющий спутники по запускам в условиях этой задачи, на вашем любимом языке программирования или на естественном языке (опечатки не караются!).

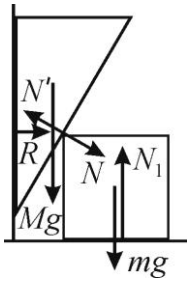
Решение: Ракету нагружаем до тех пор, пока масса груза не превысит 4т. После этого снимаем один спутник и откладываем его в сторону. За восемь стартов мы отложим в сторону не более 8 спутников, а на складе останется менее 4т. груза, который запустим на девятый старт. За десятый и одиннадцатый старт запустим оставшиеся 8 спутников.

4. Клин массой $M = 1$ кг с углом $\alpha = 30°$ при вершине может двигаться поступательно по вертикальным направляющим. Боковой стороной он касается кубика массой $m = 0{,}9$ кг, лежащего на горизонтальной поверхности стола. Найдите ускорение a, с которым будет двигаться клин, если его отпустить. Трением между всеми поверхностями можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Ответ округлите до одного знака после запятой.



Ответ: $a = \dfrac{Mg}{M + m\,\mathrm{tg}^2\alpha}$.

Решение: Модули и направления сил, действующих на клин и кубик, изображены на рисунке, где приняты следующие обозначения: Mg и mg – модули сил тяжести, N и N' – модули сил взаимодействия клина и кубика, N_1 – модуль силы реакции стола, R – модуль силы реакции вертикальных направляющих. Силы $\vec{N}$ и $\vec{N}'$ направлены перпендикулярно поверхности клина, так как трением можно пренебречь. По третьему закону Ньютона $N' = N$. Обозначив через a и a_1 ускорения клина и кубика, запишем уравнения движения этих тел: $Ma = Mg - N\sin\alpha$, $ma_1 = N\cos\alpha$. Перемещения кубика



и клина за любой промежуток времени связаны соотношением $x = y\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Отсюда следует, что $a_1 = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Исключая из уравнений движения N и используя соотношение между величинами ускорений клина и кубика, получаем, что $a = \dfrac{Mg}{M + m\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}$.

5. Бортовой компьютер вышел из строя и вместо любого числа выводит на экран только его последнюю цифру. Компьютеру была дана задача: вычислить $22^{88} + 88^{22}$.Какую цифру он выведет на экран?

   Ответ: 0.
   Решение: Так как $22^n = (20+2)^n = 10p + 2^n$, то последняя цифра числа 22^n равна последней цифре числа 2^n. Для $n = 1$ она равна 2, для $n = 2$ она равна 4, $n = 3$ она равна 8, $n = 4$ она равна 6, $n = 5$ она равна 2. Далее цифры повторяются по циклу, т.е. для $n = 88$ последняя цифра равна 6. Аналогично, последняя цифра числа 88^n совпадает с последней цифрой числа 8^n. Для $n = 1$ она равна 8, для $n = 2$ она равна 4, $n = 3$ она равна 2, $n = 4$ она равна 6, $n = 5$ она равна 8, далее вновь повторяется по циклу, так что последняя цифра числа 8^{22} равна 4.

6. Космонавты, находящиеся на борту международной космической станции (МКС), проводят открытый урок по физике для учащихся седьмых – одиннадцатых классов. Предложите эксперимент, который они бы могли продемонстрировать. Опишите (в свободной форме, в объеме двух – трех страниц) сам эксперимент, его физическую подоплеку, укажите, почему его интересно провести именно на борту МКС (ссылки на соответствующие законы физики приветствуются).

Критерии.
Задачи 3.1 и 3.2 оценивались независимо.
За каждую из задач 1)-5) выставлялись оценки “+” – решена верно, “+.” – есть несущественные ошибки (приравнивается к “+”), “+/-“ – решение, в целом, верное, “-/+” – есть верная идея решения.
Оценка за задачу 6) складывалась из оценок: эксперимент может быть проведен: да/нет=1/0, учтена специфика МКС: да/нет=1/0, есть физическое обоснование да/не полное/нет=2/1/0, эксперимент полностью описан в работе: да/нет=1/0. Полученная сумма учитывалась по правилу 5=“+”, 4 и 3=”+/-“, 2 и 1=”-/+”.

Критерии общей оценки:
есть 6 плюсов=100;
ровно 5 плюсов и не менее одного плюс/минус=95;
ровно 5 плюсов, нет плюс/минус=90;
ровно 4 плюса и хотя бы один плюс/минус=85;
ровно 4 плюса, нет плюс/минус=80;
ровно 3 плюса и не менее 3 плюс/минус=75;
ровно 3 плюса и ровно 2 плюс/минус=70;
ровно 3 плюса и ровно один плюс/минус=65;
ровно 3 плюса, нет плюс/минус=60;
ровно 2 плюса и не менее 4 плюс/минус=55;
ровно 2 плюса и ровно 3 плюс/минус=50;
ровно 2 плюса и ровно 2 плюс/минус=45;
ровно 2 плюса и ровно один плюс/минус=40;
ровно 2 плюса, нет плюс/минус=35;

ровно 1 плюс=30;
нет плюсов, но есть плюс/минус=20;
нет плюс/минус=0.