Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2017/2018 учебный год
Задания отборочного этапа для 10–11 классов с ответами и решениями (1-й тур)

Задания для разминки

1. Вычислите $1-2+3-4+5-6+\ldots-2016+2017$.
Ответ. 1009.

2. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, если сторона её основания равна $\sqrt{3}$, а угол между боковой гранью и основанием равен 60°.
Ответ. 1,5.

Основное задание

1.1. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1=20$, $x_2=17$, $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$. Найдите x_{2018}.
Ответ. 17.

Решение. Из условия следует, что $x_{n+3}=x_{n+2}-x_{n+1}=x_{n+1}-x_n-x_{n+1}=-x_n$, поэтому $x_{n+6}=-x_{n+3}=x_n$, т. е. последовательность периодична с периодом 6. Поскольку $2018=6\cdot 336+2$, получаем $x_{2018}=x_2=17$.

1.2. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1=20$, $x_2=18$, $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$. Найдите x_{2017}.
Ответ. 20.

1.3. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1=20$, $x_2=-17$, $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$. Найдите x_{2018}.
Ответ. -17.

1.4. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1=-20$, $x_2=-18$, $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$. Найдите x_{2017}.
Ответ. -20.

1.5. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1=-20$, $x_2=-17$, $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$. Найдите x_{2018}.
Ответ. -17.

1.6. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1=20$, $x_2=18$, $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$. Найдите x_{2018}.
Ответ. 18.

2.1. Найдите все значения x, при которых наибольшее из чисел x^2 и $\cos 2x$ меньше, чем $\frac{1}{2}$. В ответ запишите суммарную длину найденных промежутков числовой прямой, округлив её при необходимости до сотых.
Ответ. 0,37 (точное значение: $\sqrt{2}-\frac{\pi}{3}$).

Решение. Неравенство $\max\{x^2,\cos 2x\}<\frac{1}{2}$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2<\frac{1}{2}, \\ \cos 2x<\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{6};\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Суммарная длина найденных промежутков равна $2(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{6})=\sqrt{2}-\frac{\pi}{3}\approx 0{,}37$.

2.2. Найдите все значения x, при которых наибольшее из чисел $\sqrt{\frac{x}{2}}$ и $\operatorname{tg} x$ не больше, чем 1. В ответ запишите суммарную длину найденных промежутков числовой прямой, округлив её при необходимости до сотых.
Ответ. 1,21 (точное значение: $2-\frac{\pi}{4}$).

2.3. Найдите все значения x, при которых наименьшее из чисел $\frac{1}{x}$ и $\sin x$ больше, чем $\frac{1}{2}$. В ответ запишите суммарную длину найденных промежутков числовой прямой, округлив её при необходимости до сотых.

Ответ. 1,48 (точное значение: $2-\frac{\pi}{6}$).

2.4. Найдите все значения x, при которых наименьшее из чисел $8-x^2$ и $\operatorname{ctg} x$ не меньше, чем -1. В ответ запишите суммарную длину найденных промежутков числовой прямой, округлив её при необходимости до сотых.

Ответ. 4,57 (точное значение: $3+\frac{\pi}{2}$).

3.1. Филателист Андрей решил разложить все свои марки поровну в 2 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 3 конверта, лишней снова оказалась одна марка; когда он разложил их поровну в 5 конвертов, лишними оказались 3 марки; наконец, когда он попытался их разложить поровну в 9 конвертов, осталось 7 марок. Сколько всего марок у Андрея, если недавно, для того чтобы разместить их все у себя, ему пришлось купить второй альбом на 150 марок, так как одного такого же альбома уже не хватало?

Ответ. 223.

Решение. Если искомое число x, то из первого предложения следует, что x — нечетное, а из остальных следует, что число $x+2$ должно делиться на 3, 5 и 9, т. е. имеет вид $5\cdot 9\cdot p$. Значит, $x=45(2k-1)-2=90k-47$. По условию $150<x\leqslant 300$, поэтому $k=3$. Следовательно, $x=223$.

3.2. Филателист Борис решил разложить все свои марки поровну в 2 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 3 конверта, лишней снова оказалась одна марка; когда он разложил их поровну в 7 конвертов, осталось 5 марок; наконец, когда он попытался их разложить поровну в 9 конвертов, осталось 7 марок. Сколько всего марок у Бориса, если недавно, для того чтобы разместить их все у себя, ему пришлось купить третий альбом на 160 марок, так как двух таких же альбомов уже не хватало?

Ответ. 439.

3.3. Филателист Валерий решил разложить все свои марки поровну в 2 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 3 конверта, лишней снова оказалась одна марка; когда он разложил их поровну в 5 конвертов, лишними оказались 3 марки; наконец, когда он попытался их разложить поровну в 9 конвертов, осталось 7 марок. Сколько всего марок у Валерия, если недавно, для того чтобы разместить их все у себя, ему пришлось купить третий альбом на 160 марок, так как двух таких же альбомов уже не хватало?

Ответ. 403.

3.4. Филателист Геннадий решил разложить все свои марки поровну в 2 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 3 конверта, лишней снова оказалась одна марка; когда он разложил их поровну в 7 конвертов, осталось 5 марок; наконец, когда он попытался их разложить поровну в 9 конвертов, осталось 7 марок. Сколько всего марок у Геннадия, если недавно, для того чтобы разместить их все у себя, ему пришлось купить второй альбом на 200 марок, так как одного такого же альбома уже не хватало?

Ответ. 313.

4.1. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD, сторону CD и прямую BC в точках E, F и G соответственно. Найдите отношение $BE:ED$, если $FG:FE=4$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 2,24 (точное значение: $\sqrt{5}$).

Решение. Проведём прямую EH, параллельную AB (точка H лежит на стороне BC), и обозначим $BH=a$, $HC=b$, $BE=x$, $ED=y$ (см. рис. 1). По теореме Фалеса искомое отношение равно $t=\dfrac{x}{y}=\dfrac{a}{b}$. Из подобия треугольников BEG и AED получаем $\dfrac{x}{a+5b}=\dfrac{y}{a+b}$, значит $t=\dfrac{x}{y}=\dfrac{a+5b}{a+b}=\dfrac{t+5}{t+1}\Leftrightarrow t^2+t=t+5\Leftrightarrow t^2=5$. Следовательно, $t=\sqrt{5}\approx 2{,}24$.

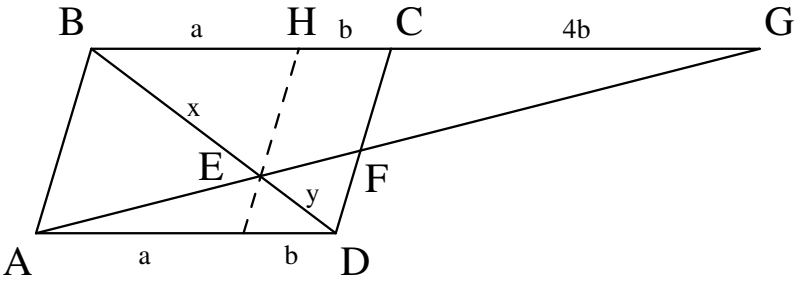


Рис. 1 (к задаче 4)

4.2. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD, сторону CD и прямую BC в точках E, F и G соответственно. Найдите отношение $FG : FE$, если $BE : ED = \sqrt{7}$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 6.

4.3. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD, сторону CD и прямую BC в точках E, F и G соответственно. Найдите ED, если $FG : FE = 7$, $BE = 8$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 2,83 (точное значение: $2\sqrt{2}$).

4.4. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD, сторону CD и прямую BC в точках E, F и G соответственно. Найдите BE, если $FG : FE = 9$, $ED = 1$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 3,16 (точное значение: $\sqrt{10}$).

5.1. Найдите сумму цифр в десятичной записи целой части числа $\sqrt{\underbrace{11\ldots11}_{2017}\underbrace{22\ldots22}_{2018}5}$.

Ответ. 6056 (число из условия задачи равно $\underbrace{33\ldots33}_{2017}5$).

Решение. Поскольку

$$\underbrace{11\ldots11}_{2017}\underbrace{22\ldots22}_{2018}5 = \frac{10^{2017}-1}{9}\cdot 10^{2019} + \frac{10^{2018}-1}{9}\cdot 20 + 5 = \frac{10^{4036}+10^{2019}+25}{9} = \left(\frac{10^{2018}+5}{3}\right)^2,$$

число из условия задачи есть $\dfrac{10^{2018}+5}{3} = \dfrac{\overbrace{99\ldots99}^{2018}+6}{3} = \underbrace{33\ldots33}_{2018}+2 = \underbrace{33\ldots3}_{2017}5$, оно является целым, а сумма его цифр равна $2017\cdot 3+5 = 6056$.

5.2. Найдите сумму цифр в десятичной записи целой части числа $\sqrt{\underbrace{11\ldots11}_{2018}\underbrace{55\ldots55}_{2017}6}$.

Ответ. 6055 (число из условия задачи равно $\underbrace{33\ldots33}_{2017}4$).

5.3. Найдите сумму цифр в десятичной записи целой части числа $\sqrt{\underbrace{44\ldots44}_{2017}\underbrace{22\ldots22}_{2018}5}$.

Ответ. 12107 (число из условия задачи равно $\underbrace{66\ldots66}_{2017}5$).

5.4. Найдите сумму цифр в десятичной записи целой части числа $\sqrt{\underbrace{44\ldots44}_{2018}\underbrace{88\ldots88}_{2017}9}$.

Ответ. 12109 (число из условия задачи равно $\underbrace{66\ldots66}_{2017}7$).

6.1. Найдите все целые решения уравнения $x\ln 27\log_{13} e = 27\log_{13} y$. В ответе укажите сумму $x+y$ для решения (x,y), в котором y — наименьшее, превосходящее 70.

Ответ. 117.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению $\dfrac{x\ln 27}{\ln 13} = \dfrac{27\ln y}{\ln 13} \Leftrightarrow x\ln 27 = 27\ln y \Leftrightarrow \ln 27^x = \ln y^{27} \Leftrightarrow 27^x = y^{27} \Leftrightarrow 3^x = y^9$, при этом $y \geqslant 1$, а значит, $x \geqslant 0$. Так как число 3 простое, то или $y = 1$ (тогда $x = 0$), или y делится на 3 и не имеет других простых делителей. Значит, $y = 3^n$, где $n \geqslant 0$. Поэтому $x = 9n$. Так как $y > 70$, то $n \geqslant 4$, искомое решение: $(x, y) = (36, 81)$. В ответ записываем $x + y = 117$.

6.2. Найдите все целые решения уравнения $x\ln 81\log_{17} e = 40\log_{17} y$. В ответе укажите разность $x - y$ для решения (x, y), в котором y — наименьшее, превосходящее 50.

Ответ. -41.

6.3. Найдите все целые решения уравнения $x\log_{11} 27 = 27\ln y\log_{11} e$. В ответе укажите разность $x - y$ для решения (x, y), в котором y — наибольшее, не превосходящее 90.

Ответ. -45.

6.4. Найдите все целые решения уравнения $x\log_{19} 81 = 40\ln y\log_{19} e$. В ответе укажите сумму $x + y$ для решения (x, y), в котором y — наибольшее, не превосходящее 100.

Ответ. 121.

7.1. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{5x^2 + 8xy + 5y^2 - 14x - 10y + 30}{(4 - x^2 - 10xy - 25y^2)^{7/2}}$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 0,16 (точное значение: $\frac{5}{32}$).

Решение. Выражение из условия задачи равно

$$\frac{(2x + y)^2 + (x + 2y)^2 - 14x - 10y + 30}{(4 - (x + 5y)^2)^{7/2}} = \frac{(2x + y - 3)^2 + (x + 2y - 1)^2 + 20}{(4 - (x + 5y)^2)^{7/2}}.$$

Числитель этой дроби не меньше 20, причём равенство достигается при $2x+y-3 = x+2y-1 = 0$, т. е. при $x = \frac{5}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$. При этих же значениях x и y знаменатель достигает своего наибольшего значения $4^{7/2} = 2^7 = 128$. Следовательно наименьшее значение дроби равно $\frac{20}{128} = \frac{5}{32} \approx 0{,}16$.

7.2. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{5x^2 - 8xy + 5y^2 - 10x + 14y + 55}{(9 - 25x^2 + 10xy - y^2)^{5/2}}$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 0,19 (точное значение: $\frac{5}{27}$).

7.3. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{13x^2 + 24xy + 13y^2 - 14x - 16y + 61}{(4 - 16x^2 - 8xy - y^2)^{7/2}}$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 0,44 (точное значение: $\frac{7}{16}$).

7.4. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{13x^2 + 24xy + 13y^2 + 16x + 14y + 68}{(9 - x^2 - 8xy - 16y^2)^{5/2}}$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 0,26 (точное значение: $\frac{7}{27}$).

Замечание. В вариантах 7.1 и 7.3 точные значения 0,15625 и 0,4375 соответственно также засчитываются как верные.

8.1. Точки K, L, M, N являются центрами окружностей, вписанных в грани SAB, SAC, SBC и ABC тетраэдра $SABC$. Известно, что $AB = SC = 5$, $AC = SB = 7$, $BC = SA = 8$. Найдите объем тетраэдра $KLMN$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 0,66 (точное значение: $\frac{\sqrt{11}}{5}$).

Решение. Решим задачу в общем виде. Пусть $BC = SA = a$, $AC = SB = b$, $AB = SC = c$. Грани тетраэдра $SABC$ являются равными треугольниками (такой тетраэдр называется *равногранным*). Проведём через каждое его ребро плоскость, параллельную противоположному ребру (см. рис. 2). Эти шесть плоскостей однозначно определяют параллелепипед, называемый

сопровождающим для тетраэдра $SABC$. Рёбра тетраэдра являются диагоналями граней параллелепипеда, а рёбра параллелепипеда равны отрезкам, соединяющим центры противоположных граней параллелепипеда (середины скрещивающихся рёбер тетраэдра). Поскольку противоположные рёбра тетраэдр равны, диагонали параллельных граней сопровождающего параллелепипеда также равны, поэтому его грани являются прямоугольниками, а сам параллелепипед — прямоугольный. Обозначив длины ребер параллелепипеда через x, y, z, получаем $x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=b^2$, $z^2+x^2=c^2$. Складывая три этих равенства, находим $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$, откуда $x^2=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}$, $y^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$, $z^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$. Значит, объём сопровождающего параллелепипеда равен $V=xyz=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)}$, а объём исходного равногранного тетраэдра равен $V_{SABC}=\frac{1}{3}V=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)}$.

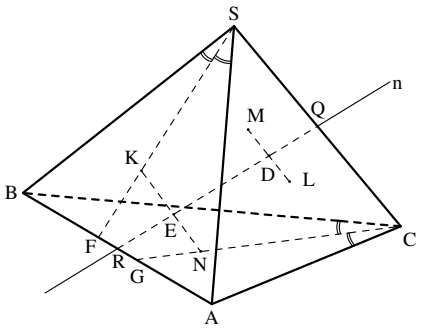


Рис. 1

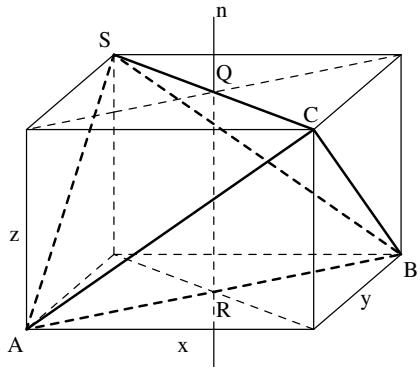


Рис. 2

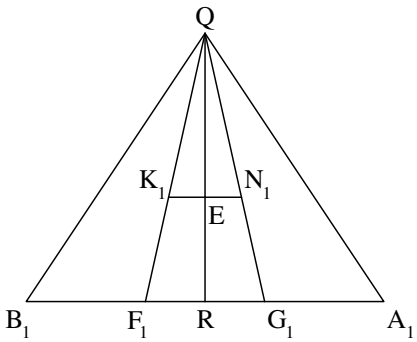


Рис. 3

Из условия задачи следует, что тетраэдр $KLMN$ также равногранный. Выразим длины рёбер параллелепипеда, сопровождающего тетраэдр $KLMN$, через длины x, y, z рёбер параллелепипеда, сопровождающего тетраэдр $SABC$. Обозначим (см. рис. 1) через Q и R середины рёбер SC и AB, а через F и G — основания биссектрис граней SAB и CAB, соответственно. Пусть l — прямая, проходящая через точки Q и R. Так как l перпендикулярна граням сопровождающего параллелепипеда (см. рис. 2), то $l\perp SC$ и $l\perp AB$. Повернём тетраэдр $SABC$ на 180° вокруг прямой l. При этом тетраэдры $SABC$, $KLMN$ (и параллелепипед, сопровождающий $SABC$) перейдут сами в себя. Так как вершины M и L перейдут друг в друга, то отрезок ML перпендикулярен прямой l и пересекает её в своей середине — точке D. Аналогично получаем $KN\perp l$, $E=KN\cap l$, $KE=EN$. Заметим также, что рёбра SC и AB используются в рассуждениях равнозначно, поэтому $QD=RE$.

Пусть Π — плоскость, проходящая через точку Q и перпендикулярная ребру SC. Рассмотрим ортогональную проекцию тетраэдра $SABC$ на плоскость Π (см. рис. 3). Точки A', B', F', G', K', N' — ортогональные проекции точек A, B, F, G, K, N на плоскость Π, точка Q — ортогональная проекция точек S и C, отрезок QR лежит в плоскости Π, и так как R — середина AB, то R — середина $A'B'$, и аналогично E — середина $K'N'$, а R — середина $F'G'$.

Точка K, являясь центром окружности, вписанной в треугольник SAB, делит биссектрису SF в отношении $\frac{FK}{FS}=\frac{c}{a+b+c}$. Так как при ортогональном проектировании отношение длин отрезков сохраняется, то $\frac{FK}{FS}=\frac{F'K'}{F'S'}$, а так как $KN\perp QR$ и $AB\perp QR$, то $K'N'\perp QR$ и $A'B'\perp QR$. Значит, $K'N'\parallel A'B'$ и $\frac{RE}{RQ}=\frac{F'K'}{F'S'}=\frac{FK}{FS}=\frac{c}{a+b+c}$. Значит, ребро DE параллелепипеда, сопровождающего тетраэдр $KLMN$, равно $DE=RQ-RE-DQ=RQ-2RE=z\left(1-\frac{2c}{a+b+c}\right)=z\frac{a+b-c}{a+b+c}$. Аналогично, рассматривая пары рёбер SA, BC и SB, AC, получаем, что другие рёбра параллелепипеда, сопровождающего тетраэдр $KLMN$, равны соответственно $y\frac{b+c-a}{a+b+c}$, $x\frac{a+c-b}{a+b+c}$. Значит, объём тетраэдра $KLMN$ равен $V_{KLMN}=\frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)^3}V_{SABC}=\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)^3}\sqrt{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)}$. При $a=8$, $b=7$, $c=5$ получаем $V_{KLMN}=\frac{\sqrt{11}}{5}\approx 0{,}66$.

Замечание. Задачу можно решать и другими способами. Например, чтобы найти длины рёбер тетраэдра $KLMN$, можно поступить так: найти длины биссектрис SA_1 и SC_1 треугольников BSC и ASB соответственно, а также длины отрезков BA_1, BC_1. Далее найти угол B

в треугольнике ABC, а затем отрезок A_1C_1 из треугольника BA_1C_1. В треугольнике SA_1C_1 по теореме косинусов найти угол S и, зная, в каком отношении точки K и L делят биссектрисы SA_1 и SC_1, найти отрезки SK и SL. Наконец, из треугольника SKL найти длину KL. Остальные рёбра тетраэдра $KLMN$ находятся аналогично.

8.2. Точки A, B, C, D являются центрами окружностей, вписанных в грани PQS, PRS, QRS и PQR тетраэдра $PQRS$. Известно, что $PQ = RS = 7$, $PR = QS = 8$, $PS = QR = 9$. Найдите объем тетраэдра $ABCD$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 1,84 (точное значение: $\frac{5\sqrt{11}}{9}$).

8.3. В тетраэдре $KLMN$ известно, что $KL = MN = 4$, $KM = LN = 5$, $KN = ML = 6$. Точки P, Q, R, S являются центрами окружностей, вписанных в треугольники KLM, KLN, KMN и LMN. Найдите объем тетраэдра $PQRS$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 0,29 (точное значение: $\frac{7\sqrt{6}}{60}$).

8.4. В тетраэдре $EFGH$ известно, что $EF = GH = 7$, $EG = FH = 10$, $EH = FG = 11$. Точки K, L, M, N являются центрами окружностей, вписанных в треугольники EFG, EFH, EGH и FGH. Найдите объем тетраэдра $KLMN$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 2,09 (точное значение: $\frac{\sqrt{215}}{7}$).

8.5. В тетраэдре $KLMN$ известны длины ребер $KL = MN = 9$, $KM = LN = 15$, $KN = LM = 16$. Точки P, Q, R, S являются центрами окружностей, вписанных в треугольники KLM, KLN, KMN и LMN. Найдите объем тетраэдра $PQRS$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 4,85 (точное значение: $\frac{11\sqrt{7}}{6}$).

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2017/2018 учебный год
Задания отборочного этапа для 10–11 классов с ответами и решениями (2-й тур)

Задания для разминки

1. Найдите сумму первых 870 натуральных чисел, не делящихся на 12.
Ответ. 412855.

2. Какую часть площади квадрата занимает вписанный в него круг? Ответ дайте в процентах, округлив его до целых.
Ответ. 79.

Основное задание

1.1. Найдите наименьшее 12-значное натуральное число, делящееся на 36 и содержащее в своей записи каждую из 10 цифр не менее одного раза.
Ответ. 100023457896.

Решение. Число должно делиться на 4 и на 9. Так как сумма 10-ти разных цифр равна 45, то две оставшиеся цифры в сумме должны дать 0, 9 или 18. Нам требуется наименьшее число, поэтому к цифрам $0, 1, \ldots, 9$ добавим две цифры 0 и в начале искомого числа поставим цифры 10002345 (это минимально возможное «начало» числа). Оставшиеся цифры 6, 7, 8, 9 должны обеспечить делимость на 4. Поэтому в двух последних разрядах могут стоять или 76, или 96, или 68. Минимальный вариант: 7896.

1.2. Найдите наибольшее 12-значное натуральное число, делящееся на 36 и содержащее в своей записи каждую из 10 цифр не менее одного раза.
Ответ. 999876543120.

1.3. Найдите наименьшее 13-значное натуральное число, делящееся на 36 и содержащее в своей записи каждую из 10 цифр не менее одного раза.
Ответ. 1000023457896.

1.4. Найдите наибольшее 13-значное натуральное число, делящееся на 36 и содержащее в своей записи каждую из 10 цифр не менее одного раза.
Ответ. 9999876543120.

2.1. Синус двугранного угла при боковом ребре правильной четырёхугольной пирамиды равен $\frac{15}{17}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь её диагонального сечения равна $3\sqrt{34}$.
Ответ. 68.

Решение. Обозначим данный в условии задачи линейный угол двугранного угла через α. Этот угол всегда тупой, поэтому $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$.

Проекция боковой грани на диагональное сечение есть треугольник, площадь которого равна половине площади этого сечения. Так как двугранный угол между боковой гранью и диагональным сечением равен $\frac{\alpha}{2}$, то $S_{\text{грани}} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}S_{\text{сеч}}$. Поэтому $S_{\text{бок}} = 4 \cdot \dfrac{S_{\text{сеч}}}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}S_{\text{сеч}}}{\sqrt{1+\cos\alpha}} = 68$.

2.2. Синус двугранного угла при боковом ребре правильной четырёхугольной пирамиды равен $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь её диагонального сечения равна 8.
Ответ. 48.

2.3. Синус двугранного угла при боковом ребре правильной четырёхугольной пирамиды равен $\frac{4\sqrt{5}}{9}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь её диагонального сечения равна 7.
Ответ. 21.

2.4. Синус двугранного угла при боковом ребре правильной четырёхугольной пирамиды равен $\frac{24}{25}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь её диагонального сечения равна 12.

Ответ. 40.

2.5. Синус двугранного угла при боковом ребре правильной четырёхугольной пирамиды равен $\frac{12}{13}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь её диагонального сечения равна $7\sqrt{13}$.

Ответ. 91.

2.6. Синус двугранного угла при боковом ребре правильной четырёхугольной пирамиды равен $\frac{4\sqrt{21}}{25}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь её диагонального сечения равна 11.

Ответ. 55.

3.1. При каком наибольшем a неравенство $\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}{\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\cos x}} > \dfrac{a}{2}$ выполнено при всех допустимых $x \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 4,49 (точное значение: $4\sqrt[6]{2}$).

Решение. Преобразуем выражение в левой части неравенства следующим образом:

$$\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}{\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\cos x}} = \frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}-\sqrt[3]{\cos^2 x}}{\sqrt[3]{\sin x\cos x}(\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\cos x})} = \frac{\sqrt[3]{\sin x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sqrt[3]{\sin x\cos x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{-\sin x}},$$

если $\cos x \neq -\sin x$. При $x \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$ оба слагаемых положительны, поэтому по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим получаем

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{-\sin x}} \geqslant \frac{2}{\sqrt[6]{-\sin x\cos x}} = \frac{2\sqrt[6]{2}}{\sqrt[6]{-\sin 2x}} \geqslant 2\sqrt[6]{2},$$

причём равенство выполняется только при $x = \frac{7\pi}{4}$, а эта точка для данного в условии выражения не является допустимой. Исходное выражение при x, близких к $\frac{7\pi}{4}$, принимает значения, близкие к $2\sqrt[6]{2}$. Значит, искомым значением a является число $4\sqrt[6]{2} \approx 4{,}49$.

3.2. При каком наибольшем отрицательном a неравенство $\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}-\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}} > a$ выполнено при всех допустимых $x \in (-3\pi; -\frac{5\pi}{2})$? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. $-0{,}45$ (точное значение: $-\frac{1}{2\sqrt[6]{2}}$).

3.3. При каком наименьшем a неравенство $\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}-\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt[3]{\sin^2 x}-\sqrt[3]{\cos^2 x}} < a$ выполнено при всех допустимых $x \in (-\frac{3\pi}{2}; -\pi)$? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. $-2{,}52$ (точное значение: $-2\sqrt[3]{2}$).

3.4. При каком наименьшем положительном a неравенство $\dfrac{\sqrt[3]{\sin^2 x}-\sqrt[3]{\cos^2 x}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}-\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}} < \dfrac{a}{2}$ выполнено при всех допустимых $x \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 0,79 (точное значение: $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$).

4.1. В компьютерный магазин завезли партию планшетов четырёх разных брендов. Среди них планшеты Lenovo, Samsung и Huawei составляли менее трети, причём планшетов Samsung было на 6 штук больше, чем Lenovo. Все остальные планшеты — бренда Apple iPad, причём их в три раза больше, чем Huawei. Если бы планшетов Lenovo было в три раза больше, а Samsung и Huawei — столько же, сколько сейчас (при том же общем числе всех планшетов), то планшетов Apple iPad было бы 59 штук. Сколько всего планшетов завезли в магазин?

Ответ. 94.

Решение. Пусть n — искомое общее число планшетов, из них x — бренда Lenovo, y — бренда Huawei. Тогда планшетов Samsung $x+6$, а планшетов Apple iPad $n-2x-y-6=3y$ штук. Из условия задачи имеем также равенство $4x+y+6=n-59$. Из двух этих равенств находим $x=\frac{3n-254}{14}$, $y=\frac{n+53}{7}$. Поскольку $x \geqslant 1$, получаем $3n-254 \geqslant 14$, откуда $n \geqslant \frac{268}{3}=89\frac{1}{3}$. С другой стороны, из условия задачи следует также неравенство $2x+y+6<\frac{n}{3}$, откуда $\frac{3n-254}{7}+\frac{n+53}{7}+6<\frac{n}{3}$, или $n<\frac{477}{5}=95\frac{2}{5}$. Кроме того, поскольку $n+53$ делится на 7, число n даёт остаток 3 при делении на 7. Среди целых чисел от 90 до 95 такое только одно, а именно $n=94$.

4.2. За отчётный период в городе строили только кирпичные, монолитные и панельные жилые дома. Если бы кирпичных домов построили в 4 раза больше, панельных — в 4 раза меньше, а монолитных не строили вовсе, то всего было бы построено на 57 домов меньше. Если бы монолитных домов построили в 4 раза больше, панельных — в 4 раза меньше, а кирпичных не строили вовсе, то общее число построенных домов было бы на 41 меньше. Наконец, если бы панельных домов построили на четверть меньше, то даже трёхкратное увеличение числа кирпичных и монолитных домов не позволило бы достичь такого же результата по суммарному количеству. Сколько всего домов построили в городе за отчётный период?

Ответ. 84.

4.3. В автосалон поступили автомобили марок Audi, BMW, Volvo и Hyundai, причём суммарное число машин первых трёх марок меньше трети числа последней. Если бы автомобилей Audi поступило в 7 раз больше, то их вместе с автомобилями Volvo было бы на 58 штук меньше, чем автомобилей Hyundai. Если бы автомобилей Volvo поступило в 5 раз больше, то в сумме с автомобилями Audi и BMW их было бы на 11 больше, чем Hyundai. Наконец, если бы автомобилей BMW поступило в 2 раза больше, то автомобилей Hyundai было бы на 52 штуки больше, чем оставшихся трёх марок. Сколько автомобилей Hyundai поступило в автосалон?

Ответ. 90.

4.4. За первое полугодие в математическом классе прошло в три раза больше уроков математики, чем в гуманитарном, а уроков химии и биологии — столько же. При этом в сумме уроков по этим трём предметам в гуманитарном классе было меньше половины суммарного числа таких же уроков в математическом. В химическом классе столько же уроков математики и биологии, сколько в гуманитарном, но в два раза больше уроков химии, и суммарно по этим трём предметам на 23 урока меньше, чем в математическом. В биологическом классе столько же уроков математики и химии, сколько в гуманитарном, но в два раза больше уроков биологии, и суммарно по этим трём предметам на 32 урока меньше, чем в математическом. Сколько уроков математики, химии и биологии состоялось в первом полугодии в математическом классе, если известно, что это число есть точный квадрат?

Ответ. 64.

5.1. Пусть $S(n)$ — сумма цифр в десятичной записи числа n. Найдите $S(S(S(S(2017^{2017}))))$.

Ответ. 1.

Решение. Поскольку $2017^{2017}<10000^{2017}$, запись числа 2017^{2017} содержит не более $4\cdot 2017=8068$ цифр, а их сумма $S(2017^{2017})$ не превосходит $9\cdot 8068=72612$. Тогда последовательно получаем $S(S(2017^{2017}))\leqslant 6+9\cdot 4=42$, $S(S(S(2017^{2017})))\leqslant 3+9=12$, $S(S(S(S(2017^{2017}))))\leqslant 9$. Заметим также, что сумма цифр числа даёт тот же остаток при делении на 9, что и само число. Поскольку 2016 делится на 9, число $2017^{2017}=(2016+1)^{2017}$ даёт остаток 1 при делении на 9. Следовательно, $S(S(S(S(2017^{2017}))))=1$.

5.2. Пусть $S(n)$ — сумма цифр в десятичной записи числа n. Найдите $S(S(S(S(2017^{2018}))))$.

Ответ. 1.

5.3. Пусть $S(n)$ — сумма цифр в десятичной записи числа n. Найдите $S(S(S(S(2018^{2017}))))$.

Ответ. 2.

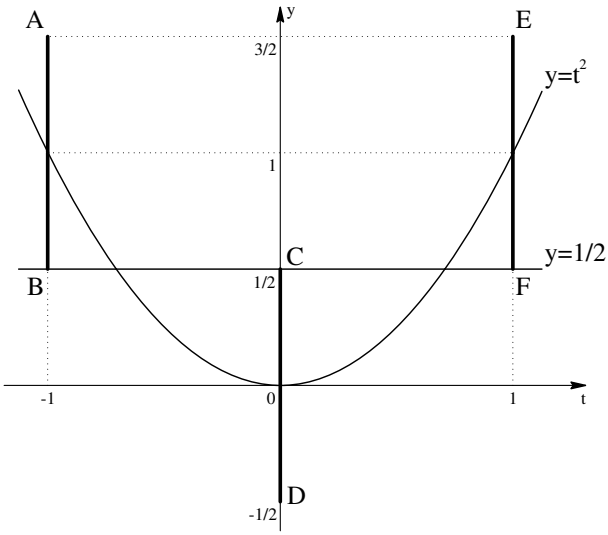
5.4. Пусть $S(n)$ — сумма цифр в десятичной записи числа n. Найдите $S(S(S(S(2018^{2018}))))$.

Ответ. 4.

6.1. Пусть $f(x) = x^2 + px + q$. Известно, что неравенство $|f(x)| > \frac{1}{2}$ не имеет решений на отрезке $[1;3]$. Найдите $\underbrace{f\Big(f\Big(\ldots f}_{2017}\Big(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\Big)\Big)\ldots\Big)$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 0,18 (точное значение: $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$).

Решение. Условие задачи означает, что для всех $x \in [1;3]$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. Сделав замену переменной $t = x + 2$, получаем неравенство $|t^2 + (p+4)t + (2p+q+4)| \leqslant \frac{1}{2}$, которое выполняется для всех $t \in [-1;1]$. Рассмотрим функции $g(t) = |t^2 - (at+b)|$, $G(a,b) = \max\limits_{t\in[-1;1]} |g(t)|$ и точки $A = (-1, \frac{3}{2})$, $B = (-1, \frac{1}{2})$, $C = (0, \frac{1}{2})$, $D = (0, -\frac{1}{2})$, $E = (1, \frac{3}{2})$, $F = (1, \frac{1}{2})$ на координатной плоскости Oty (см. рис.).



Если прямая $y = at + b$ не пересекает хотя бы один из отрезков AB, CD, EF, то $G(a,b) \geqslant \max(g(-1), g(0), g(1)) > \frac{1}{2}$. Единственная прямая, которая пересекает все три отрезка — это прямая $y = \frac{1}{2}$. Значит для любых a и b имеем $G(a,b) \geqslant \frac{1}{2}$, причём $G(a,b) = \frac{1}{2}$ только при $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$. Следовательно, в нашем случае $p + 4 = 0$, $2p + q + 4 = \frac{1}{2}$, откуда $p = -4$, $q = \frac{7}{2}$. Значит, $f(x) = x^2 - 4x + \frac{7}{2} = (x-2)^2 - \frac{1}{2}$, поэтому находим $f\Big(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\Big) = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$, $f\Big(f\Big(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\Big)\Big) = f\Big(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\Big) = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$, $\ldots$, $\underbrace{f\Big(f\Big(\ldots f}_{2017}\Big(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\Big)\Big)\ldots\Big) = \frac{3-\sqrt{7}}{2} \approx 0{,}18$.

6.2. Пусть $f(x) = x^2 + px + q$. Известно, что неравенство $|f(x)| > \frac{1}{2}$ не имеет решений на отрезке $[2;4]$. Найдите $\underbrace{f\Big(f\Big(\ldots f}_{2017}\Big(\frac{5-\sqrt{11}}{2}\Big)\Big)\ldots\Big)$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 4,16 (точное значение: $\frac{5+\sqrt{11}}{2}$).

6.3. Пусть $f(x) = x^2 + px + q$. Известно, что неравенство $|f(x)| > \frac{1}{2}$ не имеет решений на отрезке $[3;5]$. Найдите $\underbrace{f\Big(f\Big(\ldots f}_{2017}\Big(\frac{7+\sqrt{15}}{2}\Big)\Big)\ldots\Big)$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 1,56 (точное значение: $\frac{7-\sqrt{15}}{2}$).

6.4. Пусть $f(x) = x^2 + px + q$. Известно, что неравенство $|f(x)| > \frac{1}{2}$ не имеет решений на отрезке $[4;6]$. Найдите $\underbrace{f\Big(f\Big(\ldots f}_{2017}\Big(\frac{9-\sqrt{19}}{2}\Big)\Big)\ldots\Big)$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 6,68 (точное значение: $\frac{9+\sqrt{19}}{2}$).

7.1. В треугольнике ABC проведена медиана AM, точка O — центр описанной около него окружности, точка Q — центр вписанной в него окружности. Отрезки AM и OQ пересекаются в точке S, при этом $2\,\frac{OS}{MS} = 3\sqrt{3}\,\frac{QS}{AS}$. Найдите сумму синусов величин углов ABC и ACB, если известно, что $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 1,13 (точное значение: 9/8).

Решение. Точка Q является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC. Проведем биссектрису угла BAC, точку ее пересечения с описанной около треугольника ABC окружностью обозначим буквой L, соединим точки C и Q.

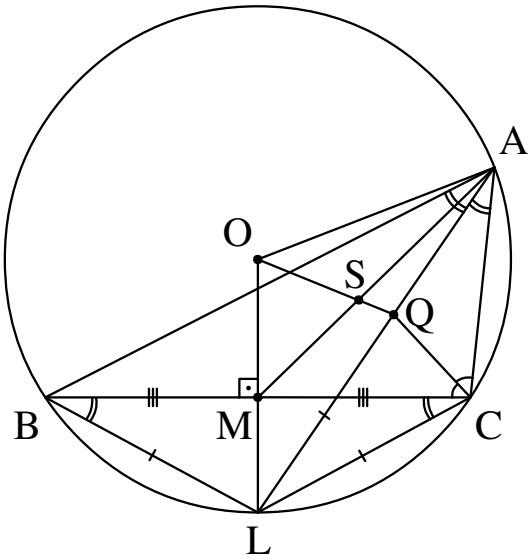
Поскольку $\angle BAL = \angle CAL = \pi/6$, дуги BL и CL равны и имеют меры $\pi/3$. Значит, $BL = CL$, треугольник BLC — равнобедренный, поэтому его медиана LM будет и его высотой, то есть прямая LM является серединным перпендикуляром к стороне BC. Стало быть, точка O тоже лежит на прямой LM, причем, в силу того, что дуга BLC меньше π, точки O и L лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC.

Дважды применяя теорему Менелая (в треугольнике AML с секущей QS и в треугольнике LOQ с секущей MS), имеем

$$\frac{MS}{AS}\cdot\frac{AQ}{QL}\cdot\frac{LO}{OM}=1;\quad \frac{QS}{OS}\cdot\frac{OM}{LM}\cdot\frac{AL}{AQ}=1.$$

Перемножив эти два соотношения, получаем

$$\frac{MS}{AS}\cdot\frac{QS}{OS}\cdot\frac{AL}{QL}\cdot\frac{LO}{LM}=1. \qquad (\star)$$



Из данного в условии задачи равенства следует, что $\frac{MS}{AS}\cdot\frac{QS}{OS}=\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Кроме того, заметим, что треугольник LOC равнобедренный (в силу того, что отрезки OL и OC являются радиусами окружности, описанной около треугольника ABC). Однако, $\angle LOC=\pi/3$, поэтому он равносторонний; CM — его высота, поэтому CM и его медиана, стало быть, $LO:LM=2$. С учетом этого равенство $(\star)$ принимает вид $\frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{AL}{QL}=1$, откуда $\frac{AL}{QL}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Обозначим величину угла ACB за 2γ, тогда $\angle ABC=2\pi/3-2\gamma$. По свойствам вписанных углов $\angle ALC=\angle ABC=2\pi/3-2\gamma$, $\angle BCL=\angle BAL=\pi/6$ и, кроме того, $\angle ACL=\angle ACB+\angle BCL=\pi/6+2\gamma$. После этого находим

$$\angle QCL=\angle QCB+\angle BCL=\frac{\pi}{6}+\gamma,$$

$$\angle LQC=\pi-\angle QCL-\angle ALC=\frac{\pi}{6}+\gamma.$$

Значит, треугольник LQC — равнобедренный, $QL=CL$. Тогда, пользуясь теоремой синусов для треугольника ALC, имеем

$$\frac{AL}{QL}=\frac{AL}{CL}=\frac{\sin\angle ACL}{\sin\angle CAL}=\frac{\sin(2\gamma+\pi/6)}{1/2}=2\sin\left(2\gamma+\frac{\pi}{6}\right),$$

откуда находим $\sin(2\gamma+\pi/6)=\frac{1}{2}\cdot\frac{AL}{QL}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. Следовательно,

$$\sin\angle ABC+\sin\angle ACB=\sin 2\gamma+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\gamma\right)=2\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\gamma\right)=\sqrt{3}\sin\left(2\gamma+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{9}{8}.$$

7.2. В треугольнике KLM проведена медиана KP, точка O — центр описанной около него окружности, точка Q — центр вписанной в него окружности. Отрезки KP и OQ пересекаются в точке S, при этом $\frac{OS}{PS}=\sqrt{6}\,\frac{QS}{KS}$. Найдите произведение косинусов величин углов KLM и KML, если известно, что $\angle LKM=\frac{\pi}{3}$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. $-0{,}38$ (точное значение: $-3/8$).

7.3. В треугольнике ABC проведена медиана AM, точка O — центр описанной около него окружности, точка Q — центр вписанной в него окружности. Отрезки AM и OQ пересекаются в точке R, при этом $\frac{OR}{MR}=\sqrt{7}\,\frac{QR}{AR}$. Найдите косинус разности величин углов ABC и ACB, если известно, что $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. $-0{,}13$ (точное значение: $-1/8$).

7.4. В треугольнике KLM проведена медиана KP, точка O — центр описанной около него окружности, точка Q — центр вписанной в него окружности. Отрезки KP и OQ пересекаются в точке R, при этом $\frac{OR}{PR}=\sqrt{14}\,\frac{QR}{KR}$. Найдите произведение синусов величин углов KLM и KML, если известно, что $\angle LKM=\frac{\pi}{3}$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. $0{,}63$ (точное значение: $5/8$).

Замечание. Точные значения $0{,}125$, $-0{,}375$, $-0{,}125$ и $0{,}625$ соответственно также засчитываются как верные.

8.1. Решите в натуральных числах уравнение $x^{x+y} = y^{y-x}$. В ответе укажите сумму $x+y$ для решения (x, y), в котором y — наименьшее, превосходящее 1500.

Ответ. 2744.

Решение. Положим $y = tx$, где $t \in \mathbb{Q}$ при $x, y \in \mathbb{N}$. Тогда, подставляя это в уравнение, найдём

$$x = t^{\frac{t-1}{2}}, \quad y = t^{\frac{t+1}{2}}.$$

Покажем, что число t может быть только целым. Предположим противное: пусть t есть рациональное число, отличное от целого, т. е. $t = \frac{p}{q}$, где числа p и q взаимно просты, $q \neq 1$. Тогда $y = \frac{px}{q}$, и уравнение примет вид

$$x^{x+\frac{px}{q}} = \left(\frac{px}{q}\right)^{\frac{px}{q}-x} \Leftrightarrow x^{xq+px} = \left(\frac{px}{q}\right)^{px-qx} \Leftrightarrow x^{xq} = p^{px-xq} \cdot x^{-qx} \cdot q^{x(q-p)} \Leftrightarrow x^{2qx} = \left(\frac{p}{q}\right)^{x(p-q)}.$$

В последнем равенстве слева всегда стоит целое число, а справа — нецелое. Противоречие.

Итак, $t \in \mathbb{N}$, поэтому числа x и y будут натуральными только в следующих двух случаях:

1) число t нечётно: $t = 2k-1$, тогда $x = (2k-1)^{k-1}$, $y = (2k-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$;

2) число t есть полный квадрат: $t = k^2$, тогда $x = k^{k^2-1}$, $y = k^{k^2+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Сведём полученные решения в таблицу:

t	1	3	4	5	7	9	...
x	1	3	8	25	343	6561	...
y	1	9	32	125	2401	59049	...

Решение (x, y), в котором y — наименьшее, превосходящее 1500, есть $x = 343$, $y = 2401$, при этом $x + y = 2744$.

8.2. Решите в натуральных числах уравнение $y^{x+y} = x^{x-y}$. В ответе укажите разность $x-y$ для решения (x, y), в котором x — наименьшее, превосходящее 2000.

Ответ. 2058.

8.3. Решите в натуральных числах уравнение $(xy)^x = \left(\frac{y}{x}\right)^y$. В ответе укажите сумму $x+y$ для решения (x, y), в котором y — наименьшее, превосходящее 3000.

Ответ. 65610.

8.4. Решите в натуральных числах уравнение $(xy)^y = \left(\frac{x}{y}\right)^x$. В ответе укажите разность $x-y$ для решения (x, y), в котором x — наименьшее, превосходящее 2500.

Ответ. 52488.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2017/2018 учебный год
Задания отборочного этапа для 5–6 классов с ответами и решениями (1-й тур)

Задания для разминки

1. После того, как Вася съел половину своих яблок и ещё одно, у него осталась треть от общего количества. Сколько яблок изначально было у Васи?

Ответ. 6.

2. Сколько натуральных чисел являются делителями числа 1000000 и при этом оканчиваются не на 0?

Ответ. 13.

Основное задание

1.1. На острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды турист встретил пятерых жителей острова и спросил у них: «Сколько лжецов среди вас?» Первый ответил: «Один», второй ответил: «Два», третий ответил: «Три», четвёртый ответил: «Четыре», пятый ответил: «Пять». Сколько лжецов было на самом деле?

Ответ. 4.

Решение. Среди опрошенных жителей острова рыцарем является ровно один, так как все они дали разные, причем все возможные ответы. Тогда оставшиеся четыре — лжецы.

1.2. На острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды турист встретил шестерых жителей острова и спросил у них: «Сколько лжецов среди вас?» Первый ответил: «Один», второй ответил: «Два», третий ответил: «Три», четвёртый ответил: «Четыре», пятый ответил: «Пять», шестой ответил: «Шесть». Сколько лжецов было на самом деле?

Ответ. 5.

1.3. На острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды турист встретил четверых жителей острова и спросил у них: «Сколько лжецов среди вас?» Первый ответил: «Один», второй ответил: «Два», третий ответил: «Три», четвёртый ответил: «Четыре». Сколько лжецов было на самом деле?

Ответ. 3.

2.1. На клетчатой бумаге закрашен квадрат из нескольких клеток, стороны которого лежат на линиях сетки. Известно, что чтобы получить больший квадрат с таким условием, нужно дозакрасить 47 клеток. Найдите сторону исходного квадрата.

Ответ. 23.

Решение. Если сторона исходного квадрата была равна n, а сторона полученного стала больше на k, то для его получения надо дозакрасить $(n+k)^2 - n^2 = 2nk + k^2$ клеток, т. е. $2nk + k^2 = 47$. Следовательно, k нечётно, причём $k^2 < 47$, поэтому $k \leqslant 5$. Если $k = 5$, то $10n + 25 = 47$, и n нецелое. Если $k = 3$, то $k = 3$, то $6n + 9 = 47$, и снова получается нецелое n. Если же $k = 1$, то $2n + 1 = 47$, откуда $n = 23$.

2.2. На клетчатой бумаге закрашен квадрат из нескольких клеток, стороны которого лежат на линиях сетки. Известно, что чтобы получить больший квадрат с таким условием, нужно дозакрасить 37 клеток. Найдите сторону исходного квадрата.

Ответ. 18.

2.3. На клетчатой бумаге закрашен квадрат из нескольких клеток, стороны которого лежат на линиях сетки. Известно, что чтобы получить больший квадрат с таким условием, нужно дозакрасить 43 клетки. Найдите сторону исходного квадрата.

Ответ. 21.

2.4. На клетчатой бумаге закрашен квадрат из нескольких клеток, стороны которого лежат на линиях сетки. Известно, что чтобы получить больший квадрат с таким условием, нужно дозакрасить 53 клетки. Найдите сторону исходного квадрата.

Ответ. 26.

3.1. На турнир по борьбе сумо приехало 20 сумо-тори (борцов сумо). После взвешивания обнаружилось, что средний вес сумо-тори равен 125 кг. Каково наибольшее возможное количество борцов, которые весят более 131 кг, если известно, что по правилам сумо в борьбе не могут участвовать люди, весящие менее 90 кг?

Ответ. 17.

Решение. Пусть n — число сумо-тори, которые весят более 131 кг. Их суммарный вес больше, чем $131n$ кг, а суммарный вес оставшихся не меньше $90(20-n)$. Значит, $\frac{131n+90(20-n)}{20} < 125$, откуда $41n < 35 \cdot 20$, т. е. $n < \frac{700}{41} = 17\frac{3}{41}$. Наибольшее целое n с таким условием равно 17. Если 17 сумо-тори весят по $131\frac{3}{17}$ кг, а остальные 3 — по 90 кг, то условия задачи выполнены.

3.2. На турнир по борьбе сумо приехало 20 сумо-тори (борцов сумо). После взвешивания обнаружилось, что средний вес сумо-тори равен 121 кг. Каково наибольшее возможное количество борцов, которые весят более 129 кг, если известно, что по правилам сумо в борьбе не могут участвовать люди, весящие менее 90 кг?

Ответ. 15.

3.3. На турнир по борьбе сумо приехало 30 сумо-тори (борцов сумо). После взвешивания обнаружилось, что средний вес сумо-тори равен 125 кг. Каково наибольшее возможное количество борцов, которые весят более 131 кг, если известно, что по правилам сумо в борьбе не могут участвовать люди, весящие менее 90 кг?

Ответ. 25.

3.4. На турнир по борьбе сумо приехало 30 сумо-тори (борцов сумо). После взвешивания обнаружилось, что средний вес сумо-тори равен 121 кг. Каково наибольшее возможное количество борцов, которые весят более 129 кг, если известно, что по правилам сумо в борьбе не могут участвовать люди, весящие менее 90 кг?

Ответ. 23.

4.1. Как-то раз в одной компании произошёл такой разговор:

— Мы должны немедленно позвонить Мише! — воскликнул Ваня.

Однако Мишиного телефонного номера никто не помнил.

— Я точно помню, что последние три цифры телефонного номера — последовательные натуральные числа, — сказала Настя.

— А я припоминаю, что первые пять цифр образовывали палиндром, — отметил Антон.

— Семизначные номера никто так не запоминает, их разбивают на три группы: сначала три цифры, а потом два раза по две, и мне кажется, что трёхзначное число, получающееся при таком разбиении, делилось на 9 — заметил Никита.

— Точно-точно, — поддержал Митя, —а ещё в телефоне было три подряд стоящих единицы.

— Только одно из двузначных чисел, получающееся при Никитином разбиении, было простым, — добавил Саша.

Помогите ребятам восстановить номер Мишиного телефона.

Ответ. 7111765.

Решение. Заметим, что три подряд единицы не могут стоять в начале, так как 111 не делится на 9. Значит, среди первых трёх цифр есть отличная от единицы. Если это вторая или третья цифры, то поскольку первые пять образуют палиндром, а последние три — последовательные натуральные числа, в номере не найдётся трёх единиц подряд. Следовательно, вторая, третья и четвёртая цифры — единицы, тогда первая и пятая — семёрки. Значит, первое двузначное число при никитином разбиении — 17 (простое число). Последние три цифры будут последовательными натуральными числами, если второе двузначное число равно 89 или 65. Но поскольку 89 — простое число, остаётся единственный вариант 65. Значит, искомый номер — 7111765.

4.2. Как-то раз в одной компании произошёл следующий разговор:

— Нам нужно позвонить Вовочке! — сказала Катя.

Однако Вовочкиного телефонного номера никто не помнил.

— Я точно помню, что число, составленное из первых двух цифр, в 3 раза больше, чем число составленное из последних двух цифр, — сказала Оля.

— А я припоминаю, что последняя цифра в два раза меньше предпоследней, — отметил Серёжа.

— Третья цифра с конца и третья цифра с начала точно одинаковые — заметил Игорь.

— Точно-точно, — поддержал Митя, — и эта цифра то ли в два раза больше, то ли на два больше предпоследней.

— А ещё число, составленное из цифр телефона, делится на 9, — добавила Лена.

Помогите ребятам восстановить номер Вовочкиного телефона.

Ответ. 6347421.

5.1. Из одной точки круговой дорожки одновременно в одном направлении стартовали пешеход и велосипедист. Скорость велосипедиста на 55% больше скорости пешехода, и поэтому время от времени велосипедист обгоняет пешехода. В скольких разных точках дорожки будут происходить обгоны?

Ответ. 11.

Решение. Примем длину дорожки за 55 (в некоторых единицах), а скорости пешехода и велосипедиста за $100x$ и $155x$. Тогда обгоны будут происходить через каждые $1/x$ единиц времени. За это время пешеход проходит 100 единиц, т. е. оказывается на расстоянии 10 единиц в обратную сторону от старта. Так будет происходить на каждом обгоне. В момент 11-го обгона пешеход пройдет 1100 единиц и окажется в точке старта, после чего точки обгона начнут повторяться.

5.2. Из одной точки круговой дорожки одновременно в одном направлении стартовали пешеход и велосипедист. Скорость велосипедиста на 60% больше скорости пешехода, и поэтому время от времени велосипедист обгоняет пешехода. В скольких разных точках дорожки будут происходить обгоны?

Ответ. 3.

6.1. Будем называть натуральное число *интересным*, если все его цифры, кроме первой и последней, меньше среднего арифметического двух соседних цифр. Найдите наибольшее интересное число.

Ответ. 96433469.

Решение. Пусть a_n — n-я цифра искомого числа. По условию $a_n < \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2}$ (кроме первой и последней цифры), поэтому $a_n - a_{n+1} < a_{n-1} - a_n$, т. е. разности $b_n = a_n - a_{n+1}$ уменьшаются. Среди них не может быть четырёх положительных, так как $1+2+3+4 = 10 > 9$. Аналогично не может быть четырёх отрицательных. Значит, максимум таких разностей может быть 7, а искомое число восьмизначное. Для того, чтобы оно было наибольшим, первая цифра должна быть равна 9, а первые разности между цифрами как можно меньше. Если разности равны последовательно 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, то получим ответ: 96433469.

7.1. Найдите наименьшее натуральное решение неравенства $2^x + 2^{x+1} + \ldots + 2^{x+2000} > 2^{2017}$.

Ответ. 17.

Решение. Значение $x = 17$, очевидно, является решением. Если же $x \leqslant 16$, то имеем

$$2^x + 2^{x+1} + \ldots + 2^{x+2000} \leqslant 2^{16} + 2^{17} + \ldots + 2^{2015} + 2^{2016} < 2^{2017},$$

так как это неравенство сводится последовательно к следующим: $2^{16} + 2^{17} + \ldots + 2^{2015} < 2^{2017} - 2^{2016} = 2^{2016}$, $2^{16} + 2^{17} + \ldots + 2^{2014} < 2^{2016} - 2^{2015} = 2^{2015}$, …, $2^{16} + 2^{17} < 2^{19} - 2^{18} = 2^{18}$, $2^{16} < 2^{18} - 2^{17} = 2^{17}$, что верно.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2017/2018 учебный год
Задания отборочного этапа для 5–6 классов с ответами и решениями (2-й тур)

Задания для разминки

1. Какое наименьшее число конфет нужно, чтобы их можно было разделить поровну и между 6, и между 15, и между 20 детьми?

Ответ. 60.

2. Если число уменьшить на 1, то его квадрат уменьшится на 111. Чему равно это число?

Ответ. 56.

Основное задание

1.1. На острове Рыцарей и Лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды путешественник опросил семерых жителей острова.

— Я рыцарь, — сказал первый.
— Да, он рыцарь, — сказал второй.
— Среди первых двух не менее 50% лжецов, — сказал третий.
— Среди первых трёх не менее 65% лжецов, — сказал четвёртый.
— Среди первых четырёх не менее 50% рыцарей, — сказал пятый.
— Среди первых пяти не менее 40% лжецов, — сказал шестой.
— Среди первых шести не менее 65% рыцарей, — сказал седьмой.

Определите, сколько рыцарей среди них на самом деле.

Ответ. 5.

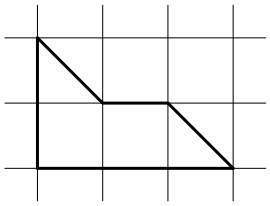
Решение. Предположим, что первый житель — рыцарь. Тогда второй — тоже, а третий и четвёртый — лжецы. Если же наоборот, первый — лжец, то второй — тоже, а третий и четвёртый — рыцари. В любом случае среди первых четырёх ровно два рыцаря и два лжеца. Следовательно, утверждения пятого, шестого и седьмого жителей истинны, т. е. они рыцари.

1.2. На острове Рыцарей и Лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды путешественник опросил семерых жителей острова.

— Я рыцарь, — сказал первый.
— Да, он рыцарь, — сказал второй.
— Среди первых двух не менее 50% лжецов, — сказал третий.
— Среди первых трёх не менее 65% лжецов, — сказал четвёртый.
— Среди первых четырёх не менее 50% рыцарей, — сказал пятый.
— Среди первых пяти не менее 40% лжецов, — сказал шестой.
— Среди первых шести не менее 65% рыцарей, — сказал седьмой.

Определите, сколько лжецов среди них на самом деле.

Ответ. 2.



2.1. Какое наименьшее число таких фигурок, что изображена на рисунке, необходимо для того, чтобы сложить из них квадрат со сторонами, лежащими на линиях сетки?

Ответ. 12.

Решение. Если принять за 1 сторону одной клетки, то площадь фигурки равна 3. Следовательно, сторона квадрата должна быть кратна 3. Перебором получаем, что квадрат 3×3 получить нельзя, а квадрат 6×6 можно сложить из шести прямоугольников 2×3, каждый из которых составлен из двух фигурок.

2.2. Какой наименьшей площади квадрат со сторонами, лежащими на линиях сетки, можно составить из таких фигурок, что изображена на рисунке? (Размер одной клетки 1×1.)

Ответ. 36.

3.1. У Пети есть яблоки, апельсины и мандарины, всего 20 фруктов. Мандаринов в 6 раз меньше, чем яблок, а яблок больше, чем апельсинов. Сколько апельсинов у Пети?

Ответ. 6.

Решение. Если обозначить число мандаринов за m, то яблок — $6m$, а апельсинов меньше, чем $6m$. Это означает, что $13m > 20$, откуда $m \geqslant 2$. С другой стороны, общее число яблок и мандаринов не более 20, т. е. $m \leqslant 2$. Следовательно, $m = 2$, откуда получаем, что у Пети 2 мандарина и 12 яблок, а оставшиеся 6 фруктов — апельсины.

3.2. У Пети есть яблоки, апельсины и мандарины, всего 16 фруктов. Мандаринов в 5 раз меньше, чем яблок, а яблок больше, чем апельсинов. Сколько яблок у Пети?

Ответ. 10.

3.3. У Пети есть яблоки, апельсины и мандарины, всего 20 фруктов. Мандаринов в 6 раз меньше, чем яблок, а яблок больше, чем апельсинов. Сколько яблок у Пети?

Ответ. 12.

3.4. У Пети есть яблоки, апельсины и мандарины, всего 16 фруктов. Мандаринов в 5 раз меньше, чем яблок, а яблок больше, чем апельсинов. Сколько апельсинов у Пети?

Ответ. 4.

4.1. Вася очень любит собирать грибы. Он подсчитал, что за осень он собрал количество грибов, которое выражается трёхзначным числом, сумма цифр которого равна 14. Потом Вася подсчитал, что из собранных грибов 8% белых, а 14% — подберезовиков. Сколько грибов собрал Вася?

Ответ. 950.

Решение. Чтобы 14% от числа грибов было целым числом необходимо, чтобы общее число грибов было кратно 50. Тогда последние две цифры — 00 или 50. Но если трёхзначное число оканчивается на два нуля, то сумма цифр не может быть больше 9, следовательно, последние две цифры — 50, т. е. первая цифра равна $14 - 5 - 0 = 9$.

4.2. Вася очень любит собирать грибы. Он подсчитал, что за осень он собрал количество грибов, которое выражается трёхзначным числом, сумма цифр которого равна 14. Потом Вася подсчитал, что из собранных грибов 8% подберезовиков, а 14% — белых. Сколько белых грибов собрал Вася?

Ответ. 133.

4.3. Вася очень любит собирать грибы. Он подсчитал, что за осень он собрал количество грибов, которое выражается трёхзначным числом, сумма цифр которого равна 14. Потом Вася подсчитал, что из собранных грибов 8% подберезовиков, а 14% — белых. Сколько подберезовиков собрал Вася?

Ответ. 76.

5.1. Сколько существует четырёхзначных чисел, содержащих в своей записи цифру 9, в которых сразу за ней идёт цифра 5?

Ответ. 279.

Решение. Для чисел вида $95**$ последние две цифры могут быть любыми — таких чисел $10 \cdot 10 = 100$, а для чисел вида $*95*$ и $**95$ первая цифра не может быть равна 0, значит, их по $10 \cdot 9 = 90$. При этом число 9595 было посчитано дважды, поэтому получаем 279 чисел.

5.2. Сколько существует четырёхзначных чисел, содержащих в своей записи цифру 7, в которых сразу за ней идёт цифра 4?

Ответ. 279.

5.3. Сколько существует четырёхзначных чисел, содержащих в своей записи цифру 3, в которых сразу за ней идёт цифра 8?

Ответ. 279.

5.4. Сколько существует четырёхзначных чисел, содержащих в своей записи цифру 6, в которых сразу за ней идёт цифра 1?

Ответ. 279.

6.1. В ряд были выписаны все натуральные числа от 1 до 2017 включительно. Сколько раз была написана цифра 7?

Ответ. 602.

Решение. Рассмотрим сначала числа от 1 до 2000. Тогда цифра 7 может стоять на 3 месте с конца: числа вида $7**$ или $17**$ — таких чисел 200. Может стоять на 2-м: $*7*$ или $1*7*$ — таких чисел тоже 200; или последней: $**7$ или $1**7$ — таких тоже 200. Кроме того, есть ещё 2007 и 2017 — ещё две цифры 7.

7.1. Сколько чисел от 1 до 1000 (включительно) не представимы в виде разности двух квадратов целых чисел?

Ответ. 250.

Решение. Заметим, что любое нечетное число $2n+1$ можно представить в виде $(n+1)^2-n^2$. Кроме того, чётное число, кратное 4, можно представить как $4n=(n+1)^2-(n-1)^2$. Остаются числа вида $4n+2$. Заметим, что квадрат может давать остатки 0 или 1 при делении на 4, поэтому числа вида $4n+2$ нельзя получить как разность квадратов. Таких чисел (вида $4n+2$) ровно одно в каждой четвёрке последовательных чисел, следовательно, всего таких чисел от 1 до 1000 будет $1000/4=250$.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2017/2018 учебный год
Задания отборочного этапа для 7–8 классов с ответами и решениями (1-й тур)

Задания для разминки

1. После того, как Вася съел половину своих яблок и ещё одно, у него осталась треть от общего количества. Сколько яблок изначально было у Васи?

Ответ. 6.

2. Сколько натуральных чисел являются делителями числа 1000000 и при этом оканчиваются не на 0?

Ответ. 13.

Основное задание

1.1. На острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды турист встретил пятерых жителей острова и спросил у них: «Сколько лжецов среди вас?» Первый ответил: «Один», второй ответил: «Два», третий ответил: «Три», четвёртый ответил: «Четыре», пятый ответил: «Пять». Сколько лжецов было на самом деле?

Ответ. 4.

Решение. Среди опрошенных жителей острова рыцарем является ровно один, так как все они дали разные, причем все возможные ответы. Тогда оставшиеся четыре — лжецы.

1.2. На острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды турист встретил шестерых жителей острова и спросил у них: «Сколько лжецов среди вас?» Первый ответил: «Один», второй ответил: «Два», третий ответил: «Три», четвёртый ответил: «Четыре», пятый ответил: «Пять», шестой ответил: «Шесть». Сколько лжецов было на самом деле?

Ответ. 5.

1.3. На острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды турист встретил четверых жителей острова и спросил у них: «Сколько лжецов среди вас?» Первый ответил: «Один», второй ответил: «Два», третий ответил: «Три», четвёртый ответил: «Четыре». Сколько лжецов было на самом деле?

Ответ. 3.

2.1. Как-то раз в одной компании произошёл такой разговор:

— Мы должны немедленно позвонить Мише! — воскликнул Ваня.

Однако Мишиного телефонного номера никто не помнил.

— Я точно помню, что последние три цифры телефонного номера — последовательные натуральные числа, — сказала Настя.

— А я припоминаю, что первые пять цифр образовывали палиндром, — отметил Антон.

— Семизначные номера никто так не запоминает, их разбивают на три группы: сначала три цифры, а потом два раза по две, и мне кажется, что трёхзначное число, получающееся при таком разбиении, делилось на 9 — заметил Никита.

— Точно-точно, — поддержал Митя, —а ещё в телефоне было три подряд стоящих единицы.

— Только одно из двузначных чисел, получающееся при Никитином разбиении, было простым, — добавил Саша.

Помогите ребятам восстановить номер Мишиного телефона.

Ответ. 7111765.

Решение. Заметим, что три подряд единицы не могут стоять в начале, так как 111 не делится на 9. Значит, среди первых трёх цифр есть отличная от единицы. Если это вторая или третья цифры, то поскольку первые пять образуют палиндром, а последние три — последовательные натуральные числа, в номере не найдётся трёх единиц подряд. Следовательно, вторая, третья

и четвёртая цифры — единицы, тогда первая и пятая — семёрки. Значит, первое двузначное число при никитином разбиении — 17 (простое число). Последние три цифры будут последовательными натуральными числами, если второе двузначное число равно 89 или 65. Но поскольку 89 — простое число, остаётся единственный вариант 65. Значит, искомый номер — 7111765.

2.2. Как-то раз в одной компании произошёл следующий разговор:

— Нам нужно позвонить Вовочке! — сказала Катя.

Однако Вовочкиного телефонного номера никто не помнил.

— Я точно помню, что число, составленное из первых двух цифр, в 3 раза больше, чем число составленное из последних двух цифр, — сказала Оля.

— А я припоминаю, что последняя цифра в два раза меньше предпоследней, — отметил Серёжа.

— Третья цифра с конца и третья цифра с начала точно одинаковые — заметил Игорь.

— Точно-точно, — поддержал Митя, —и эта цифра то ли в два раза больше, то ли на два больше предпоследней.

— А ещё число, составленное из цифр телефона, делится на 9, — добавила Лена.

Помогите ребятам восстановить номер Вовочкиного телефона.

Ответ. 6347421.

3.1. Из одной точки круговой дорожки одновременно в одном направлении стартовали пешеход и велосипедист. Скорость велосипедиста на 55% больше скорости пешехода, и поэтому время от времени велосипедист обгоняет пешехода. В скольких разных точках дорожки будут происходить обгоны?

Ответ. 11.

Решение. Примем длину дорожки за 55 (в некоторых единицах), а скорости пешехода и велосипедиста за $100x$ и $155x$. Тогда обгоны будут происходить через каждые $1/x$ единиц времени. За это время пешеход проходит 100 единиц, т. е. оказывается на расстоянии 10 единиц в обратную сторону от старта. Так будет происходить на каждом обгоне. В момент 11-го обгона пешеход пройдет 1100 единиц и окажется в точке старта, после чего точки обгона начнут повторяться.

3.2. Из одной точки круговой дорожки одновременно в одном направлении стартовали пешеход и велосипедист. Скорость велосипедиста на 60% больше скорости пешехода, и поэтому время от времени велосипедист обгоняет пешехода. В скольких разных точках дорожки будут происходить обгоны?

Ответ. 3.

4.1. Будем называть натуральное число *интересным*, если все его цифры, кроме первой и последней, меньше среднего арифметического двух соседних цифр. Найдите наибольшее интересное число.

Ответ. 96433469.

Решение. Пусть a_n — n-я цифра искомого числа. По условию $a_n < \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2}$ (кроме первой и последней цифры), поэтому $a_n - a_{n+1} < a_{n-1} - a_n$, т. е. разности $b_n = a_n - a_{n+1}$ уменьшаются. Среди них не может быть четырёх положительных, так как $1+2+3+4 = 10 > 9$. Аналогично не может быть четырёх отрицательных. Значит, максимум таких разностей может быть 7, а искомое число восьмизначное. Для того, чтобы оно было наибольшим, первая цифра должна быть равна 9, а первые разности между цифрами как можно меньше. Если разности равны последовательно 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, то получим ответ: 96433469.

5.1. Найдите наименьшее натуральное решение неравенства $2^x + 2^{x+1} + \ldots + 2^{x+2000} > 2^{2017}$.

Ответ. 17.

Решение. Значение $x = 17$, очевидно, является решением. Если же $x \leqslant 16$, то имеем

$$2^x + 2^{x+1} + \ldots + 2^{x+2000} \leqslant 2^{16} + 2^{17} + \ldots + 2^{2015} + 2^{2016} < 2^{2017},$$

так как это неравенство сводится последовательно к следующим: $2^{16} + 2^{17} + \ldots + 2^{2015} < 2^{2017} - 2^{2016} = 2^{2016}$, $2^{16} + 2^{17} + \ldots + 2^{2014} < 2^{2016} - 2^{2015} = 2^{2015}$, …, $2^{16} + 2^{17} < 2^{19} - 2^{18} = 2^{18}$, $2^{16} < 2^{18} - 2^{17} = 2^{17}$, что верно.

6.1. Сколько треугольников с целыми сторонами имеют периметр, равный 27? (Треугольники, отличающиеся только порядком сторон — например, 7, 10, 10 и 10, 10, 7 — считаются за один треугольник.)

Ответ. 19.

Решение. Упорядочим стороны по возрастанию: $a \leqslant b \leqslant c$. Тогда меньшая сторона a не превосходит 9. Если $a = 1$ или $a = 2$, то такой треугольник один. Если $a = 3$ или $a = 4$, то таких по два. Если $a = 5$ или $a = 6$, то таких по три. Если $a = 7$, то таких четыре. Если $a = 8$, то таких два. Если $a = 9$, то такой треугольник один. Итого получаем 19 треугольников.

7.1. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{n!}{2} = k! + l!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots n$. В ответе укажите 0, если решений нет, n, если решение одно, сумму значений n для всех решений, если решений несколько. Напомним, что решением является *тройка* (n, k, l); если решения отличаются хотя бы в одной компоненте, они считаются *разными*.

Ответ. 10 (все тройки решений (n, k, l): $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(4, 3, 3)$).

Решение. Заметим, что $k < n$ и $l < n$. Если $n > 4$, то $n! > 4 \cdot (n-1)! \geqslant 2 \cdot (k! + l!)$, поэтому таких решений нет. Если $n = 2$, то получаем $1 = k! + l!$ — нет решений; если $n = 3$, то уравнение $3 = k! + l!$ имеет два решения: $k = 1, l = 2$ и $k = 2, l = 1$; если $n = 4$, то уравнение $12 = k! + l!$ даёт ещё одно решение $k = l = 3$.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2017/2018 учебный год
Задания отборочного этапа для 7–8 классов с ответами и решениями (2-й тур)

Задания для разминки

1. Какое наименьшее число конфет нужно, чтобы их можно было разделить поровну и между 6, и между 15, и между 20 детьми?

Ответ. 60.

2. Если число уменьшить на 1, то его квадрат уменьшится на 111. Чему равно это число?

Ответ. 56.

Основное задание

1.1. На острове Рыцарей и Лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды путешественник опросил семерых жителей острова.

— Я рыцарь, — сказал первый.
— Да, он рыцарь, — сказал второй.
— Среди первых двух не менее 50% лжецов, — сказал третий.
— Среди первых трёх не менее 65% лжецов, — сказал четвёртый.
— Среди первых четырёх не менее 50% рыцарей, — сказал пятый.
— Среди первых пяти не менее 40% лжецов, — сказал шестой.
— Среди первых шести не менее 65% рыцарей, — сказал седьмой.

Определите, сколько рыцарей среди них на самом деле.

Ответ. 5.

Решение. Предположим, что первый житель — рыцарь. Тогда второй — тоже, а третий и четвёртый — лжецы. Если же наоборот, первый — лжец, то второй — тоже, а третий и четвёртый — рыцари. В любом случае среди первых четырёх ровно два рыцаря и два лжеца. Следовательно, утверждения пятого, шестого и седьмого жителей истинны, т. е. они рыцари.

1.2. На острове Рыцарей и Лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды путешественник опросил семерых жителей острова.

— Я рыцарь, — сказал первый.
— Да, он рыцарь, — сказал второй.
— Среди первых двух не менее 50% лжецов, — сказал третий.
— Среди первых трёх не менее 65% лжецов, — сказал четвёртый.
— Среди первых четырёх не менее 50% рыцарей, — сказал пятый.
— Среди первых пяти не менее 40% лжецов, — сказал шестой.
— Среди первых шести не менее 65% рыцарей, — сказал седьмой.

Определите, сколько лжецов среди них на самом деле.

Ответ. 2.

2.1. Вася очень любит собирать грибы. Он подсчитал, что за осень он собрал количество грибов, которое выражается трёхзначным числом, сумма цифр которого равна 14. Потом Вася подсчитал, что из собранных грибов 8% белых, а 14% — подберезовиков. Сколько грибов собрал Вася?

Ответ. 950.

Решение. Чтобы 14% от числа грибов было целым числом необходимо, чтобы общее число грибов было кратно 50. Тогда последние две цифры — 00 или 50. Но если трёхзначное число оканчивается на два нуля, то сумма цифр не может быть больше 9, следовательно, последние две цифры — 50, т. е. первая цифра равна $14 - 5 - 0 = 9$.

2.2. Вася очень любит собирать грибы. Он подсчитал, что за осень он собрал количество грибов, которое выражается трёхзначным числом, сумма цифр которого равна 14. Потом Вася

подсчитал, что из собранных грибов 8% подберезовиков, а 14% — белых. Сколько белых грибов собрал Вася?

Ответ. 133.

2.3. Вася очень любит собирать грибы. Он подсчитал, что за осень он собрал количество грибов, которое выражается трёхзначным числом, сумма цифр которого равна 14. Потом Вася подсчитал, что из собранных грибов 8% подберезовиков, а 14% — белых. Сколько подберезовиков собрал Вася?

Ответ. 76.

3.1. Найдите все пары двузначных натуральных чисел, у которых среднее арифметическое в 25/24 раза больше среднего геометрического. В ответе укажите наибольшее из средних арифметических для всех таких пар.

Ответ. 75.

Решение. Пусть a, b — искомые числа (не ограничивая общности, можно считать, что $a > b$) и пусть $\frac{a+b}{2} = 25x$ и $\sqrt{ab} = 24x$. Тогда $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} = 98x$ и $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab} = 2x$. Отсюда вытекает, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 7(\sqrt{a} - \sqrt{b})$. Таким образом, $3\sqrt{a} = 4\sqrt{b}$. Значит, $a : b = 16 : 9$. Учитывая, что a и b — двузначные числа, получаем, что сумма будет наибольшей для $a = 16 \cdot 6 = 96$, $b = 9 \cdot 6 = 54$. Их среднее арифметическое равно $\frac{96+54}{2} = 75$.

3.2. Найдите все пары двузначных натуральных чисел, у которых среднее геометрическое в 25/24 раза меньше среднего арифметического. В ответе укажите наибольшее из средних геометрических для всех таких пар.

Ответ. 72.

4.1. В ряд были выписаны все натуральные числа от 1 до 2017 включительно. Сколько раз была написана цифра 7?

Ответ. 602.

Решение. Рассмотрим сначала числа от 1 до 2000. Тогда цифра 7 может стоять на 3 месте с конца: числа вида $7**$ или $17**$ — таких чисел 200. Может стоять на 2-м: $*7*$ или $1*7*$ — таких чисел тоже 200; или последней: $**7$ или $1**7$ — таких тоже 200. Кроме того, есть ещё 2007 и 2017 — ещё две цифры 7.

5.1. В вершинах куба проставлены числа ± 1, а на его гранях — числа, равные произведению чисел, стоящих в вершинах этой грани. Найдите все возможные значения, которые может принимать сумма этих 14 чисел. В ответе укажите их произведение.

Ответ. -20160.

Решение. Очевидно, что наибольшее значение суммы равно 14. Заметим, что если поменять знак в одной из вершин, то сумма чисел, стоящих в вершинах, увеличится или уменьшится на 2. С другой стороны, поменяются знаки у трёх граней. Если их сумма была 1, -1, 3, -3, то станет -1, 1, -3, или 3, соответственно, т. е. изменится на 2 или на 6. Видно, что если сложить две суммы, то остаток от деления на 4 не меняется. Значит можно получить числа 10, 6, 2, -2, -6, -10. Число -14, очевидно, получить нельзя, поскольку для этого потребуется сделать все числа равными -1. Для остальных значений легко строятся соответствующие примеры.

6.1. Сколько чисел от 1 до 1000 (включительно) не представимы в виде разности двух квадратов целых чисел?

Ответ. 250.

Решение. Заметим, что любое нечетное число $2n+1$ можно представить в виде $(n+1)^2 - n^2$. Кроме того, чётное число, кратное 4, можно представить как $4n = (n+1)^2 - (n-1)^2$. Остаются числа вида $4n + 2$. Заметим, что квадрат может давать остатки 0 или 1 при делении на 4, поэтому числа вида $4n+2$ нельзя получить как разность квадратов. Таких чисел (вида $4n+2$) ровно одно в каждой четвёрке последовательных чисел, следовательно, всего таких чисел от 1 до 1000 будет $1000/4 = 250$.

7.1. Последовательность задана соотношениями $a_1 = 1$,

$$a_{2n} = \begin{cases} a_n, & \text{если } n \text{ чётно,} \\ 2a_n, & \text{если } n \text{ нечётно;} \end{cases} \qquad a_{2n+1} = \begin{cases} 2a_n + 1, & \text{если } n \text{ чётно,} \\ a_n, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Найдите наименьшее натуральное n, для которого $a_n = a_{2017}$.

Ответ. 5.

Решение. Указанные правила легко интерпретируются с точки зрения двоичной системы: если n оканчивается на 0 и справа приписывают 1, то и к a_n справа приписывают 1. Если n оканчивается на 1 и приписывают 0, то к a_n справа приписывают 0. В остальных случаях a_n не меняется (когда к 0 приписывают 0 или к 1 приписывают 1). Запишем в двоичной системе число 2017: $2017 = 11111100001_2$. Легко видеть, что $a_{2017} = 101_2 = 5_{10}$. Проверяя первые несколько значений, найдём $a_5 = 5$.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2017/2018 учебный год
Задания отборочного этапа для 9 класса с ответами и решениями (1-й тур)

Задания для разминки

1. Сколько натуральных чисел являются делителями числа 1000000 и при этом оканчиваются не на 0?

Ответ. 13.

2. В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AB = 6$ и $BC = 8$ высота, опущенная на CD, равна 4. Найдите высоту, опущенную на AD.

Ответ. 3.

Основное задание

1.1. Как-то раз в одной компании произошёл такой разговор:

— Мы должны немедленно позвонить Мише! — воскликнул Ваня.

Однако Мишиного телефонного номера никто не помнил.

— Я точно помню, что последние три цифры телефонного номера — последовательные натуральные числа, — сказала Настя.

— А я припоминаю, что первые пять цифр образовывали палиндром, — отметил Антон.

— Семизначные номера никто так не запоминает, их разбивают на три группы: сначала три цифры, а потом два раза по две, и мне кажется, что трёхзначное число, получающееся при таком разбиении, делилось на 9 — заметил Никита.

— Точно-точно, — поддержал Митя, —а ещё в телефоне было три подряд стоящих единицы.

— Только одно из двузначных чисел, получающееся при Никитином разбиении, было простым, — добавил Саша.

Помогите ребятам восстановить номер Мишиного телефона.

Ответ. 7111765.

Решение. Заметим, что три подряд единицы не могут стоять в начале, так как 111 не делится на 9. Значит, среди первых трёх цифр есть отличная от единицы. Если это вторая или третья цифры, то поскольку первые пять образуют палиндром, а последние три — последовательные натуральные числа, в номере не найдётся трёх единиц подряд. Следовательно, вторая, третья и четвёртая цифры — единицы, тогда первая и пятая — семёрки. Значит, первое двузначное число при никитином разбиении — 17 (простое число). Последние три цифры будут последовательными натуральными числами, если второе двузначное число равно 89 или 65. Но поскольку 89 — простое число, остаётся единственный вариант 65. Значит, искомый номер — 7111765.

1.2. Как-то раз в одной компании произошёл следующий разговор:

— Нам нужно позвонить Вовочке! — сказала Катя.

Однако Вовочкиного телефонного номера никто не помнил.

— Я точно помню, что число, составленное из первых двух цифр, в 3 раза больше, чем число составленное из последних двух цифр, — сказала Оля.

— А я припоминаю, что последняя цифра в два раза меньше предпоследней, — отметил Серёжа.

— Третья цифра с конца и третья цифра с начала точно одинаковые — заметил Игорь.

— Точно-точно, — поддержал Митя, —и эта цифра то ли в два раза больше, то ли на два больше предпоследней.

— А ещё число, составленное из цифр телефона, делится на 9, — добавила Лена.

Помогите ребятам восстановить номер Вовочкиного телефона.

Ответ. 6347421.

2.1. Найдите все значения a, для которых квадратичная функция $f(x) = ax^2 - 2ax + 1$ принимает во всех точках отрезка $[0; 2]$ значения, модуль которых не превосходит 2. В ответе укажите суммарную длину промежутков, которым принадлежат найденные значения a.

Ответ. 4 (искомое множество значений a: $[-1;0)\cup(0;3]$).

Решение. Чтобы функция $f(x)$ была квадратичной, необходимо, чтобы $a\neq 0$. Вершина параболы, являющейся графиком данной функции, находится в точке $(1;1-a)$. Поскольку $f(0)=f(2)=1$, условие задачи выполнено, если $|1-a|\leqslant 2$, т.е. $-1\leqslant a\leqslant 3$. Значит, искомым множеством значений a является объединение $[-1;0)\cup(0;3]$, а суммарная длина этих промежутков равна 4.

2.2. Найдите все значения a, для которых квадратичная функция $f(x)=ax^2-4ax+1$ принимает во всех точках отрезка $[0;4]$ значения, модуль которых не превосходит 3. В ответе укажите суммарную длину промежутков, которым принадлежат найденные значения a.

Ответ. 1,5 (искомое множество значений a: $[-\frac{1}{2};0)\cup(0;1]$).

2.3. Найдите все значения a, для которых квадратичная функция $f(x)=ax^2+2ax-1$ принимает во всех точках отрезка $[-2;0]$ значения, модуль которых не превосходит 3. В ответе укажите суммарную длину промежутков, которым принадлежат найденные значения a.

Ответ. 6 (искомое множество значений a: $[-4;0)\cup(0;2]$).

2.4. Найдите все значения a, для которых квадратичная функция $f(x)=ax^2+4ax-1$ принимает во всех точках отрезка $[-4;0]$ значения, модуль которых не превосходит 4. В ответе укажите суммарную длину промежутков, которым принадлежат найденные значения a.

Ответ. 2 (искомое множество значений a: $[-\frac{5}{4};0)\cup(0;\frac{3}{4}]$).

3.1. Найдите наибольшее целое решение неравенства $2^x+2^{x+1}+\ldots+2^{x+2000}<1$.

Ответ. -2001.

Решение. Вынося за скобку 2^x и пользуясь формулой суммы первых членов геометрической прогрессии, приведём неравенство к виду $2^x\cdot(2^{2001}-1)<1$. При $x\geqslant -2000$ оно не выполнено. Если же $x=-2001$, то получаем $1-2^{-2001}<1$, что верно.

3.2. Найдите наименьшее целое решение неравенства $2^x+2^{x+1}+\ldots+2^{x+2005}>2$.

Ответ. -2004.

3.3. Найдите наибольшее целое решение неравенства $2^x+2^{x+1}+\ldots+2^{x+2017}<1$.

Ответ. -2018.

3.4. Найдите наименьшее целое решение неравенства $2^x+2^{x+1}+\ldots+2^{x+2025}>2$.

Ответ. -2024.

4.1. Будем называть натуральное число *интересным*, если все его цифры, кроме первой и последней, меньше среднего арифметического двух соседних цифр. Найдите наибольшее интересное число.

Ответ. 96433469.

Решение. Пусть a_n — n-я цифра искомого числа. По условию $a_n<\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2}$ (кроме первой и последней цифры), поэтому $a_n-a_{n+1}<a_{n-1}-a_n$, т.е. разности $b_n=a_n-a_{n+1}$ уменьшаются с ростом n. Среди них не может быть четырёх положительных, так как $1+2+3+4=10>9$. Аналогично не может быть четырёх отрицательных. Значит, максимум таких разностей может быть 7, а искомое число восьмизначное. Для того, чтобы оно было наибольшим, первая цифра должна быть равна 9, а первые разности между цифрами как можно меньше. Если разности равны последовательно 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, то получим ответ: 96433469.

5.1. Сколько треугольников с целыми сторонами имеют периметр, равный 2017? (Треугольники, отличающиеся только порядком сторон — например, 17, 1000, 1000 и 1000, 1000, 17 — считаются за один треугольник.)

Ответ. 85008.

Решение. Пусть стороны a,b,c треугольника упорядочены следующим образом: $a\leqslant b\leqslant c$. Тогда меньшая сторона a не превосходит $2017/3=672\frac{1}{3}$.

Рассмотрим случай чётных a, т. е. $a = 2k$. Тогда для $k = 1, \ldots, 252$ будет получаться по k треугольников, всего $253 \cdot 252/2 = 31878$ треугольников. Для $k = 253, \ldots, 336$ будет получаться по $1009 - 3k$ треугольников, всего $1009 \cdot (336 - 253 + 1) - 3 \cdot (336 \cdot 337/2 - 252 \cdot 253/2) = 10542$ треугольников.

Аналогично для нечётных a, $a = 2k - 1$, при $k = 1, \ldots, 252$ будет получаться по k треугольников, всего $253 \cdot 252/2 = 31878$ треугольников. Для $k = 253, \ldots, 336$ будет получаться по $1011 - 3k$ треугольников, всего $1011 \cdot (336 - 253 + 1) - 3 \cdot (336 \cdot 337/2 - 252 \cdot 253/2) = 10710$ треугольников.

Итого получаем $31878 + 10542 + 31878 + 10710 = 85008$ треугольников.

6.1. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{n!}{2} = k! + l!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots n$. В ответе укажите 0, если решений нет, n, если решение одно, сумму значений n для всех решений, если решений несколько. Напомним, что решением является **тройка** (n, k, l); если решения отличаются хотя бы в одной компоненте, они считаются **разными**.

Ответ. 10 (все тройки решений (n, k, l): $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(4, 3, 3)$).

Решение. Заметим, что $k < n$ и $l < n$. Если $n > 4$, то $n! > 4 \cdot (n-1)! \geqslant 2 \cdot (k! + l!)$, поэтому таких решений нет. Если $n = 2$, то получаем $1 = k! + l!$ — нет решений; если $n = 3$, то уравнение $3 = k! + l!$ имеет два решения: $k = 1, l = 2$ и $k = 2, l = 1$; если $n = 4$, то уравнение $12 = k! + l!$ даёт ещё одно решение $k = l = 3$.

7.1. В остроугольном треугольнике ABC провели медиану BM и высоту CH. Оказалось, что $BM = CH = \sqrt{3}$, при этом $\angle MBC = \angle ACH$. Найдите периметр треугольника ABC.

Ответ. 6.

Решение. Докажем, что треугольник ABC равносторонний, все стороны которого равны 2.

Опустим из точки M перпендикуляр MK на сторону AB. В треугольнике BMK катет KM равен половине гипотенузы MB, значит, $\angle KBM = 30^\circ$. Пусть O — точка пересечения MB и CH, тогда $\angle MOC = 60^\circ$. Обозначим $\angle MBC = \angle ACH = \alpha$, тогда $\angle HCB = 60^\circ - \alpha$, поэтому $\angle BCA = 60^\circ$. Следовательно, треугольники MOC и MCB подобны по двум углам. Из подобия получаем $MC^2 = BM \cdot OM = CH \cdot OM$. По теореме синусов $OM = MC \cdot \sin\alpha / \sin 60^\circ$. Из треугольника AHC находим $HC = 2MC \cdot \cos\alpha$. Подставляя это в формулу $MC^2 = CH \cdot OM$ и сокращая на MC^2, получим $\sin 2\alpha = \sqrt{3}/2$, откуда $\alpha = 30^\circ$. Следовательно, треугольник ABC равносторонний.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2017/2018 учебный год
Задания отборочного этапа для 9 класса с ответами и решениями (2-й тур)

Задания для разминки

1. Если число уменьшить на 1, то его квадрат уменьшится на 111. Чему равно это число?
Ответ. 56.

2. Какую часть площади круга занимает вписанный в него квадрат? Ответ дайте в процентах, округлив его до целых.
Ответ. 64.

Основное задание

1.1. Найдите все пары двузначных натуральных чисел, у которых среднее арифметическое в 25/24 раза больше среднего геометрического. В ответе укажите наибольшее из средних арифметических для всех таких пар.
Ответ. 75.

Решение. Пусть a, b — искомые числа (не ограничивая общности, можно считать, что $a > b$) и пусть $\frac{a+b}{2} = 25x$ и $\sqrt{ab} = 24x$. Тогда $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab} = 98x$ и $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{ab} = 2x$. Отсюда вытекает, что $\sqrt{a}+\sqrt{b} = 7(\sqrt{a}-\sqrt{b})$. Таким образом, $3\sqrt{a} = 4\sqrt{b}$. Значит, $a : b = 16 : 9$. Учитывая, что a и b — двузначные числа, получаем, что сумма будет наибольшей для $a = 16 \cdot 6 = 96$, $b = 9 \cdot 6 = 54$. Их среднее арифметическое равно $\frac{96+54}{2} = 75$.

1.2. Найдите все пары двузначных натуральных чисел, у которых среднее геометрическое в 25/24 раза меньше среднего арифметического. В ответе укажите наибольшее из средних геометрических для всех таких пар.
Ответ. 72.

2.1. В вершинах куба проставлены числа ± 1, а на его гранях — числа, равные произведению чисел, стоящих в вершинах этой грани. Найдите все возможные значения, которые может принимать сумма этих 14 чисел. В ответе укажите их произведение.
Ответ. -20160.

Решение. Очевидно, что наибольшее значение суммы равно 14. Заметим, что если поменять знак в одной из вершин, то сумма чисел, стоящих в вершинах, увеличится или уменьшится на 2. С другой стороны, поменяются знаки у трёх граней. Если их сумма была 1, -1, 3, -3, то станет -1, 1, -3, или 3, соответственно, т. е. изменится на 2 или на 6. Видно, что если сложить две суммы, то остаток от деления на 4 не меняется. Значит можно получить числа 10, 6, 2, -2, -6, -10. Число -14, очевидно, получить нельзя, поскольку для этого потребуется сделать все числа равными -1. Для остальных значений легко строятся соответствующие примеры.

3.1. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены для всех $x > 0$; $f(x)$ равна большему из чисел x и $1/x$, а $g(x)$ равна меньшему из чисел x и $1/x$. Решите уравнение $f(5x) \cdot g(8x) \cdot g(25x) = 1$. В ответе укажите решение, если оно одно, или сумму решений, если их несколько. Ответ при необходимости округлите до сотых.
Ответ. 0,09 (точное значение: 0,089).

Решение. Возможны следующие случаи:
a) $0 < 5x < 8x < 25x \leqslant 1$. Тогда $f(5x) \cdot g(8x) \cdot g(25x) = \frac{8x \cdot 25x}{5x} = 40x = 1$, откуда $x = \frac{1}{40} = 0{,}025$.
b) $0 < 5x < 8x \leqslant 1 < 25x$. Тогда $f(5x) \cdot g(8x) \cdot g(25x) = \frac{8x}{5x \cdot 25x} = \frac{8}{125x} = 1$, т. е. $x = \frac{8}{124} = 0{,}064$.
c) $0 < 5x \leqslant 1 < 8x < 25x$. Тогда $f(5x) \cdot g(8x) \cdot g(25x) = \frac{1}{5x \cdot 8x \cdot 25x} = \frac{1}{1000x^3} = 1$, откуда $x = 0{,}1$, что не удовлетворяет условию $1 < 8x$.
d) $1 < 5x < 8x < 25x$. Тогда $f(5x) \cdot g(8x) \cdot g(25x) = \frac{5x}{8x \cdot 25x} = \frac{1}{40x} = 1$, откуда $x = \frac{1}{40}$, что не удовлетворяет условию $1 < 5x$.

Итак, уравнение имеет два решения $x = 0{,}025$ и $x = 0{,}064$, сумма которых равна $0{,}089 \approx 0{,}09$.

Замечание. Точное значение 0,089 также засчитывается как верный ответ.

4.1. Сколько чисел от 1 до 1000 (включительно) не представимы в виде разности двух квадратов целых чисел?

Ответ. 250.

Решение. Заметим, что любое нечетное число $2n+1$ можно представить в виде $(n+1)^2 - n^2$. Кроме того, чётное число, кратное 4, можно представить как $4n = (n+1)^2 - (n-1)^2$. Остаются числа вида $4n+2$. Заметим, что квадрат может давать остатки 0 или 1 при делении на 4, поэтому числа вида $4n+2$ нельзя получить как разность квадратов. Таких чисел (вида $4n+2$) ровно одно в каждой четвёрке последовательных чисел, следовательно, всего таких чисел от 1 до 1000 будет $1000/4 = 250$.

5.1. Последовательность задана соотношениями $a_1 = 1$,

$$a_{2n} = \begin{cases} a_n, & \text{если } n \text{ чётно,} \\ 2a_n, & \text{если } n \text{ нечётно;} \end{cases} \qquad a_{2n+1} = \begin{cases} 2a_n + 1, & \text{если } n \text{ чётно,} \\ a_n, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Найдите наименьшее натуральное n, для которого $a_n = a_{2017}$.

Ответ. 5.

Решение. Указанные правила легко интерпретируются с точки зрения двоичной системы: если n оканчивается на 0 и справа приписывают 1, то и к a_n справа приписывают 1. Если n оканчивается на 1 и приписывают 0, то к a_n справа приписывают 0. В остальных случаях a_n не меняется (когда к 0 приписывают 0 или к 1 приписывают 1). Запишем в двоичной системе число 2017: $2017 = 11111100001_2$. Легко видеть, что $a_{2017} = 101_2 = 5_{10}$. Проверяя первые несколько значений, найдём $a_5 = 5$.

6.1. На координатной плоскости изображен равнобедренный прямоугольный треугольник с вершинами в точках с целыми координатами. Известно, что на сторонах треугольника (включая вершины) находится ровно 2019 точек с целыми координатами. Какова наименьшая возможная длина гипотенузы треугольника при этих условиях? В ответе укажите длину гипотенузы, округлённую до ближайшего целого числа.

Ответ. 952.

Решение. Наименьшая длина гипотенузы соответствует случаю, когда расстояние между точками наименьшее, а это возможно только в случае, когда катеты идут по линиям сетки (для повёрнутого треугольника расстояние между точками будет не менее $\sqrt{2}$). Тогда каждый катет имеет длину 673, а гипотенуза равна $673\sqrt{2} \approx 952$.

7.1. В ряд выписаны натуральные числа от 1 до некоторого n. Когда одно из чисел удалили, оказалось, что среднее арифметическое оставшихся равно $40\frac{3}{4}$. Найдите число, которое удалили.

Ответ. 61.

Решение. Сумма чисел от 1 до n равна $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Пусть удалили число m, где $1 \leqslant m \leqslant n$. Тогда условие задачи можно записать в виде

$$\frac{S_n - m}{n-1} = 40\frac{3}{4}.$$

Преобразуем: $\frac{n+2}{2} - \frac{m-1}{n-1} = 40\frac{3}{4}$. Заметим, что $\frac{m-1}{n-1} \leqslant 1$, поэтому если n чётно, то $\frac{m-1}{n-1} = \frac{1}{4}$, а если нечётно, то $\frac{m-1}{n-1} = \frac{3}{4}$. В первом случае получаем $n = 80$, откуда $m - 1 = 79 \cdot \frac{1}{4}$ — не целое. Во втором случае $n = 81$, т. е. $m - 1 = 80 \cdot \frac{3}{4} = 60$.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2017/2018 учебного года для 10–11 классов

Условия, решения и ответы к варианту 1, ответы к вариантам 2—4

1. На каком из пяти интервалов, на которые разбивают числовую ось четыре точки

$$x^5 < y^8 < y^3 < x^6,$$

лежит число 0?

Ответ: $(x^5; y^8)$.

Решение. Из условия имеем:
1) $0 > y^8 - y^3 = y^3(y^5 - 1) \Rightarrow 0 < y < 1$;
2) $0 < x^6 - x^5 = x^5(x - 1)$, поэтому есть только две возможности:
   а) $x^5 > 1 \Rightarrow y^8 > x > 1 \Rightarrow |y| > 1$, что противоречит п. 1);
   б) $x^5 < 0 \Rightarrow 0 \in (x^5; y^8)$.

Ответ к варианту 2: $(y^5; x^4)$. *Ответ к варианту 3:* $(x^3; y^6)$. *Ответ к варианту 4:* $(y^3; x^8)$.

2. Какое из чисел больше: $\underbrace{\sqrt{17\sqrt{13\sqrt{17\sqrt{13\sqrt{17\ldots}}}}}}_{\text{2018 знаков корня}}$ или $17\sqrt[3]{\frac{13}{17}}$?

Ответ: второе.

Решение. Пусть A — первое число, B — второе. Тогда

$$A = 17^{\frac{1}{2}} \cdot 13^{\frac{1}{4}} \cdot 17^{\frac{1}{8}} \cdot 13^{\frac{1}{16}} \cdot \ldots \cdot 17^{\frac{1}{2^{2017}}} \cdot 13^{\frac{1}{2^{2018}}} = 17^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^{2017}}} \cdot 13^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{2^{2018}}}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{2^{2017}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1/2}{1 - 1/4} = \frac{2}{3},$$

и

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{2^{2018}} < \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3},$$

число A меньше, чем $17^{\frac{2}{3}} \cdot 13^{\frac{1}{3}} = B$.

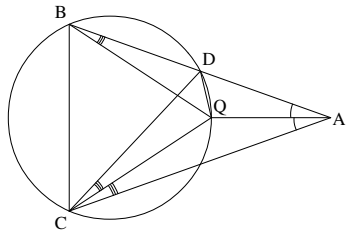
Ответ к варианту 2: второе. *Ответ к варианту 3:* первое. *Ответ к варианту 4:* первое.

3. В треугольнике ABC, площадь которого равна 20, проведена медиана CD. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что $AC = \sqrt{41}$, а центр окружности, вписанной в треугольник ACD, лежит на окружности, описанной около треугольника BCD.

Ответ: $\frac{41}{10}$ или $\frac{41}{8}$.

Решение. Пусть Q — центр окружности, вписанной в треугольник ACD. Тогда отрезки AQ и CQ — биссектрисы углов BAC и ACD соответственно, по свойствам вписанных углов $\angle DBQ = \angle DCQ$. Значит, треугольники ABQ и ACQ равны по стороне и двум углам. Следовательно, $AB = AC$, т. е. треугольник ABC равнобедренный.

Положим $BC = 2x$, тогда $S_{ABC} = x\sqrt{41 - x^2}$, поэтому с учётом условия получаем уравнение $x\sqrt{41 - x^2} = 20$, имеющее два корня $x = 4$ или $x = 5$. Радиус описанной около треугольника ABC окружности равен



$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{41 \cdot 2x}{4 \cdot 20} = \frac{41x}{40}.$$

Подставляя сюда найденные значения x, получаем два возможных ответа, причём обе возможности реализуются.

Ответ к варианту 2: 10 или $\frac{8}{5}$. *Ответ к варианту 3:* $\frac{17}{5}$ или $\frac{17}{3}$. *Ответ к варианту 4:* $\frac{15}{4}$ или $\frac{27}{20}$.

4. Архив фотографий укладывают в порядке их нумерации в одинаковые альбомы, ровно по 4 фотографии на одну страницу. При этом 81-я по счёту фотография попала на 5-ю страницу одного из альбомов, 171-я — на 3-ю страницу другого. Сколько фотографий вмещает каждый альбом?

Ответ: 32.

Решение. Пусть x, y — номера альбомов, в которые попали 81-я и 171-я фотографии соответственно, $n > 4$ — количество страниц в альбоме. Тогда $4n(x-1)+16 < 81 \leqslant 4n(x-1)+20$, $4n(y-1)+8 < 171 \leqslant 4n(y-1)+12$, т. е. $61 \leqslant 4n(x-1) < 65$, $159 \leqslant 4n(y-1) < 163$. Тогда $n(x-1) = 16$, $n(y-1) = 40$. Из первого неравенства следует, что n может быть равно 1, 2, 4, 8, 16, из второго — 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40. Таким образом, $n = 8$, $4n = 32$.

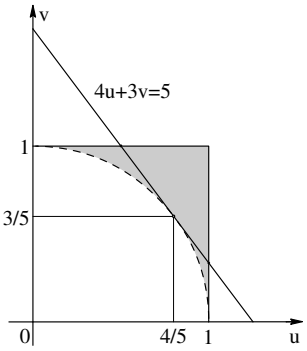
Ответ к варианту 2: 54. *Ответ к варианту 3:* 40. *Ответ к варианту 4:* 42.

5. Решите неравенство $\arcsin\left(\frac{5}{2\pi}\arccos x\right) > \arccos\left(\frac{10}{3\pi}\arcsin x\right)$.

Ответ: $\left[\cos\frac{2\pi}{5}; \cos\frac{8\pi}{25}\right) \cup \left(\cos\frac{8\pi}{25}; \cos\frac{\pi}{5}\right]$.

Решение. Обозначим $u = \frac{5}{2\pi}\arccos x$, $v = \frac{10}{3\pi}\arcsin x$. Тогда справедливо соотношение $4u + 3v = 5$. Решением неравенства $\arcsin u > \arccos v$ является множество

$$0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1,\ u^2 + v^2 > 1,$$



на чертеже оно закрашено серым. Прямая $4u + 3v = 5$ имеет общие точки с этим множеством — это отрезок с выколотой точкой $u = 4/5$, $v = 3/5$. Таким образом.

$$u \in \left[\frac{1}{2}; \frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{5}; 1\right] \ \Leftrightarrow\ \arccos x \in \left[\frac{\pi}{5}; \frac{8\pi}{25}\right) \cup \left(\frac{8\pi}{25}; \frac{2\pi}{5}\right],$$

откуда, с учетом убывания арккосинуса,

$$x \in \left[\cos\frac{2\pi}{5}; \cos\frac{8\pi}{25}\right) \cup \left(\cos\frac{8\pi}{25}; \cos\frac{\pi}{5}\right].$$

Ответ к варианту 2: $\left[\sin\frac{\pi}{5}; \sin\frac{8\pi}{25}\right) \cup \left(\sin\frac{8\pi}{25}; \sin\frac{2\pi}{5}\right]$.
Ответ к варианту 3: $\left[\cos\frac{2\pi}{5}; \cos\frac{8\pi}{25}\right) \cup \left(\cos\frac{8\pi}{25}; \cos\frac{\pi}{5}\right]$.
Ответ к варианту 4: $\left[\sin\frac{\pi}{5}; \sin\frac{8\pi}{25}\right) \cup \left(\sin\frac{8\pi}{25}; \sin\frac{2\pi}{5}\right]$.

6. Найдите все такие наборы чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, что $x_1 = x_{n+1}$ и при всех $k = 1, \ldots, n$ выполнено равенство

$$2\log_2 x_k \cdot \log_2 x_{k+1} - \log_2^2 x_k = 9.$$

Ответ: $x_k = 8, k = 1, \ldots, n+1$, или $x_k = \frac{1}{8}, k = 1, \ldots, n+1$.

Решение. Требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9 - 2\log_2 x_1 \cdot \log_2 x_2 + \log_2^2 x_1 = 0, \\ 9 - 2\log_2 x_2 \cdot \log_2 x_3 + \log_2^2 x_2 = 0, \\ \ldots \\ 9 - 2\log_2 x_{n-1} \cdot \log_2 x_n + \log_2^2 x_{n-1} = 0, \\ 9 - 2\log_2 x_n \cdot \log_2 x_1 + \log_2^2 x_n = 0. \end{cases}$$

Замена $a_k = \frac{1}{3}\log_2 x_k$, $k = 1, \ldots, n$, приводит систему к виду

$$\begin{cases} a_1 + a_1^{-1} = 2a_2, \\ \ldots \\ a_{n-1} + a_{n-1}^{-1} = 2a_n, \\ a_n + a_n^{-1} = 2a_1. \end{cases}$$

Из неравенства для суммы взаимно обратных чисел следует, что либо $a_k \geqslant 1, k = 1, \ldots, n$, либо $a_k \leqslant -1$, $k = 1, \ldots, n$. Решениями системы являются наборы $a_k = 1$, $k = 1, \ldots, n$ и $a_k = -1$, $k = 1, \ldots, n$. Сложим все уравнения системы и перенесём все слагаемые в одну часть равенства, тогда получим

$$a_1 - a_1^{-1} + \cdots + a_{n-1} - a_{n-1}^{-1} + a_n - a_n^{-1} = 0.$$

Левая часть последнего равенства больше нуля, если хотя бы одно $a_k > 1$, и меньше нуля, если хотя бы одно $a_k < -1$, поэтому других решений, кроме вышеуказанных, система не имеет.

Ответ к варианту 2: $x_k = 9, k = 1, \ldots, n+1$, или $x_k = \frac{1}{9}, k = 1, \ldots, n+1$.
Ответ к варианту 3: $x_k = 2, k = 1, \ldots, n+1$, или $x_k = \frac{1}{2}, k = 1, \ldots, n+1$.
Ответ к варианту 4: $x_k = 3, k = 1, \ldots, n+1$, или $x_k = \frac{1}{3}, k = 1, \ldots, n+1$.

7. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \sin(x + \sin x) + \sin(x - \sin x) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right) \sin\sin x.$$

Ответ: $\dfrac{\pi - 2}{\sqrt{2}}$.

Решение. Пользуясь формулой преобразования суммы синусов в произведение, получаем

$$f(x) = 2\sin x \cdot \cos\sin x + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right) \sin\sin x = g(\sin x),$$

где $g(t) = 2t\cos t + (\frac{\pi}{2} - 2)\sin t$, $t = \sin x \in [-1; 1]$. Функция g нечётная и

$$g'(t) = -2t\sin t + \frac{\pi}{2}\cos t = \frac{\pi}{2}\sin t\left(\operatorname{ctg} t - \frac{4}{\pi}t\right).$$

Поскольку $g'(t) > 0$ при $0 \leqslant t < \frac{\pi}{4}$, $g'(t) < 0$ при $\frac{\pi}{4} < t \leqslant 1$, функция $g(t)$ имеет единственный максимум на отрезке $[0; 1]$ в точке $t = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, $g(t) \leqslant g(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi-2}{\sqrt{2}}$, $t \in [0; 1]$. В силу нечётности на отрезке $[-1; 0]$ ситуация симметричная. Покажем, что $g(-1) < g(\frac{\pi}{4})$. Действительно,

$$g(-1) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sin 1 - 2\cos 1 = 2\sin 1\left(1 - \frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg} 1\right) < 2\sin 1\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) < 0 < g\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Таким образом, наибольшее значение функции $g(t)$ на отрезке $[-1; 1]$, а значит, и функции $f(x)$ на всей числовой прямой, равно $\frac{\pi-2}{\sqrt{2}}$.

Ответ к варианту 2: $\dfrac{2 - \pi}{\sqrt{2}}$. *Ответ к варианту 3:* $\dfrac{4 - 2\pi}{\pi\sqrt{2}}$. *Ответ к варианту 4:* $\dfrac{4\pi - 8}{\pi\sqrt{2}}$.

8. Андрею нравятся все числа, не делящиеся на 3, а Тане нравятся все числа, в которых нет цифр, делящихся на 3.

а) Сколько четырёхзначных чисел нравятся и Андрею, и Тане?

б) Найдите общую сумму цифр всех таких четырёхзначных чисел.

Ответ: а) 810; б) 14580.

Решение. а) Искомые числа должны быть составлены из цифр 1, 2, 4, 5, 7, 8, причём по критерию делимости на 3 в каждом числе сумма цифр не должна быть кратной трём. Цифры 1, 4 и 7 (назовем их цифрами множества A) при делении на 3 дают остаток 1, а цифры 2, 5, 8 (цифры множества B) — остаток 2. Значит, удовлетворяющее условию число должно быть составлено одним из следующих способов:

1) 4 цифры из множества A — таких чисел 3^4;
2) 4 цифры из множества B — таких чисел 3^4;
3) 3 цифры из множества A и одна цифра из множества B — таких чисел $4 \cdot 3^4$;
4) 3 цифры из множества B и одна цифра из множества A — таких чисел $4 \cdot 3^4$.

Всего таких чисел $10 \cdot 3^4 = 810$.

б) Для поиска общей суммы цифр всех этих чисел разобьём их на пары: второе число получается из первого заменой всех цифр по принципу $1 \leftrightarrow 8$, $2 \leftrightarrow 7$, $4 \leftrightarrow 5$. Например, число 1545 имеет пару 8454, число 5271 имеет пару 4728, и т. д. Сумма цифр любой пары равна $9 \cdot 4$, а число таких пар равно $\frac{10 \cdot 3^4}{2}$. Значит, искомая сумма всех цифр равна $\frac{9 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 3^4}{2} = 20 \cdot 3^6 = 14580$.

Ответ к варианту 2: а) 160; б) 2880.
Ответ к варианту 3: а) 810; б) 14580.
Ответ к варианту 4: а) 160; б) 2880.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2017/2018 учебного года для 5—6 классов

Условия заданий, решения и ответы к ним

1. На острове рыцарей и лжецов живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды пятерых жителей этого острова по очереди спросили, сколько среди них рыцарей.

— Один, — ответил первый.

— Два, — ответил второй.

— Три, — ответил третий.

— Не верьте им, они все лжецы, — сказал четвёртый.

— Сам ты лжец! — сказал пятый четвёртому.

Сколько рыцарей было на самом деле?

Ответ: 2.

Решение. Среди первых трёх не более одного рыцаря, так как они все дают разные ответы. Если рассмотреть 4-го и 5-го, то один из них рыцарь, а другой лжец. Следовательно, всего рыцарей один или два. В любом случае из первых трёх один сказал правду. Значит, рыцарей два: второй и пятый.

2. Первоклассник Петя выкладывал из имеющихся у него фишек контур равностороннего треугольника так, что каждая его сторона, включая вершины, содержит одинаковое число фишек. Затем из тех же фишек ему удалось выложить таким же образом контур квадрата. Сколько фишек у Пети, если сторона квадрата содержит на 2 фишки меньше, чем сторона треугольника?

Ответ: 24.

Решение. Пусть сторона треугольника содержит x фишек, а сторона квадрата — y фишек. Общее количество фишек, подсчитанное двумя способами, равно $3x - 3 = 4y - 4$ (учитываем, что угловые фишки считаются по два раза). Из условия задачи следует, что $y = x - 2$. Поэтому получаем уравнение $3(x - 1) = 4(x - 3)$, откуда $x = 9$. Таким образом, всего фишек $3 \cdot 9 - 3 = 24$.

3. Петров и Васечкин решали один и тот же арифметический пример. Некоторое число надо было разделить на 2, умножить на 7 и отнять 1001. Петров произвёл все действия правильно, а Васечкин всё перепутал: поделил на 8, возвёл в квадрат и тоже отнял 1001. Известно, что у Петрова получилось простое число. Какое число получилось у Васечкина?

Ответ: 295.

Решение. Заметим, что число 1001 делится на 7 без остатка. Значит, число, которое получил Петров, должно быть кратно 7. Но оно простое, поэтому Петров получил 7. Проведём действия Петрова в обратном порядке и получим исходное число: $\frac{7+1001}{7} \cdot 2 = 288$. Повторим с ним действия Васечкина: $(288 : 2)^2 - 1001 = 295$.

4. Назовём натуральное число n *квадратируемым*, если числа от 1 до n можно расставить в таком порядке, что каждый член последовательности в сумме со своим номером даёт точный квадрат. Например, число 5 квадратируемо, так как можно расставить числа так: 3 2 1 5 4, при этом $3 + 1 = 2 + 2 = 1 + 3 = 4$ и $5 + 4 = 4 + 5 = 9$. Выясните, какие из чисел 7, 9, 11, 15 являются квадратируемыми.

Ответ: 9 и 15.

Решение. Число 7 не может быть квадратируемым, поскольку оба числа 1 и 6 должны находиться на третьей позиции, что невозможно.

Число 9 квадратируемо, так как числа от 1 до 9 можно расставить в следующем порядке: 8, 2, 6, 5, 4, 3, 9, 1, 7, при этом требуемое условие выполнено.

Число 11 не квадратируемо, поскольку оба числа 11 и 4 должны стоять на пятой позиции.

Число 15 квадратируемо, поскольку можно расставить числа от 1 до 15 по убыванию, и тогда $1 + 15 = 2 + 14 = \ldots = 15 + 1 = 16$.

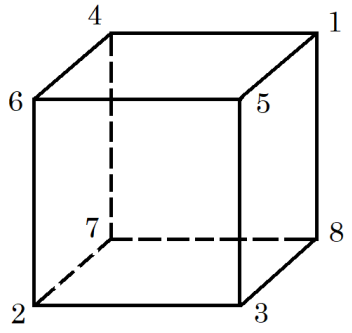
5. Числа от 1 до 8 расставлены в вершинах куба так, чтобы сумма чисел в любых трёх вершинах, находящихся в одной грани, была не менее 10. Какова наименьшая возможная сумма чисел, стоящих в вершинах одной грани?

Ответ: 16.

Решение. В каждой грани есть вершина, в которой стоит число, не меньшее 6. Действительно, в противном случае одна из троек даже из оставшихся наибольших чисел 2, 3, 4, 5 даёт сумму, меньшую 10 (а именно тройка 2, 3, 4 с суммой 9).

Рассмотрим грань, содержащую вершину, в которой стоит число 6. Поскольку сумма чисел, стоящих в остальных трёх вершинах, не меньше 10, сумма всех чисел в вершинах этой грани не меньше 16.

Пример расстановки, при которой наименьшая сумма чисел, стоящих в вершинах одной грани, равна 16, приведён на рисунке: сумма чисел в передней грани равна $2+3+5+6=16$.



6. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) нарисован прямоугольник, стороны которого лежат на линиях сетки, причём одна сторона на 5 см меньше другой. Оказалось, что его можно разрезать по линиям сетки на несколько частей и сложить из них квадрат. Чему может быть равна сторона этого квадрата? Найдите все возможные значения.

Ответ: 6 см.

Решение. Пусть бóльшая сторона прямоугольника равна k см, $k>5$, а сторона полученного квадрата равна n см. Тогда из равенства площадей получаем $k(k-5)=n^2$. Заметим, что $k^2-5k<k^2-4k+4=(k-2)^2$. Кроме того, $k^2-5k>k^2-6k+9=(k-3)^2$ при $k>9$. Значит, $6\leqslant k\leqslant 9$. При $k=6,7,8,9$ получаем, что $k(k-5)$ равно соответственно $6\cdot 1=6$, $7\cdot 2=14$, $8\cdot 3=24$, $9\cdot 4=36$. Из этих значений квадратом натурального числа является только последнее, причём $n=6$. Разрезать прямоугольник 9×4 по линиям сетки и сложить из него квадрат 6×6 можно множеством способов.

7. Все натуральные числа, сумма цифр каждого из которых равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 125-м месте?

Ответ: 41000.

Решение. Подсчитаем количество n-значных чисел, сумма цифр каждого из которых равна 5, для каждого натурального n. Вычтем из старшего разряда 1, получим число (которое может теперь начинаться с нуля), сумма цифр которого равна 4. Представим разряды этого числа в виде ячеек, в каждой из которых лежит число шаров, равное цифре, стоящей в соответствующем разряде. Разложить таким образом 4 шара по n ячейкам — это то же самое, что между 4 шарами установить $n-1$ перегородку (между некоторыми перегородками шаров может не быть вовсе). Это можно сделать $C_{n+3}^4=\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{24}$ способами, столько же существует искомых n-значных чисел.

При $n=1,2,3,4,5$ получаем соответственно $C_4^4=1$, $C_5^4=5$, $C_6^4=15$, $C_7^4=35$, $C_8^4=70$, итого 126 чисел. На 126-м месте стоит набольшее пятизначное такое число, т. е. 50000. Значит, на 125-м месте стоит предыдущее — 41000.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2017/2018 учебного года для 7—8 классов

Условия заданий, решения и ответы к ним

1. На острове рыцарей и лжецов живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды пятерых жителей этого острова по очереди спросили, сколько среди них рыцарей.

— Один, — ответил первый.

— Два, — ответил второй.

— Три, — ответил третий.

— Не верьте им, они все лжецы, — сказал четвёртый.

— Сам ты лжец! — сказал пятый четвёртому.

Сколько рыцарей было на самом деле?

Ответ: 2.

Решение. Среди первых трёх не более одного рыцаря, так как они все дают разные ответы. Если рассмотреть 4-го и 5-го, то один из них рыцарь, а другой лжец. Следовательно, всего рыцарей один или два. В любом случае из первых трёх один сказал правду. Значит, рыцарей два: второй и пятый.

2. Первоклассник Петя выкладывал из имеющихся у него фишек контур равностороннего треугольника так, что каждая его сторона, включая вершины, содержит одинаковое число фишек. Затем из тех же фишек ему удалось выложить таким же образом контур квадрата. Сколько фишек у Пети, если сторона квадрата содержит на 2 фишки меньше, чем сторона треугольника?

Ответ: 24.

Решение. Пусть сторона треугольника содержит x фишек, а сторона квадрата — y фишек. Общее количество фишек, подсчитанное двумя способами, равно $3x - 3 = 4y - 4$ (учитываем, что угловые фишки считаются по два раза). Из условия задачи следует, что $y = x - 2$. Поэтому получаем уравнение $3(x - 1) = 4(x - 3)$, откуда $x = 9$. Таким образом, всего фишек $3 \cdot 9 - 3 = 24$.

3. Назовём натуральное число n *квадратируемым*, если числа от 1 до n можно расставить в таком порядке, что каждый член последовательности в сумме со своим номером даёт точный квадрат. Например, число 5 квадратируемо, так как можно расставить числа так: 3 2 1 5 4, при этом $3 + 1 = 2 + 2 = 1 + 3 = 4$ и $5 + 4 = 4 + 5 = 9$. Выясните, какие из чисел 7, 9, 11, 15 являются квадратируемыми.

Ответ: 9 и 15.

Решение. Число 7 не может быть квадратируемым, поскольку оба числа 1 и 6 должны находиться на третьей позиции, что невозможно.

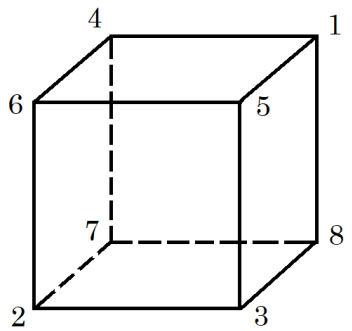
Число 9 квадратируемо, так как числа от 1 до 9 можно расставить в следующем порядке: 8, 2, 6, 5, 4, 3, 9, 1, 7, при этом требуемое условие выполнено.

Число 11 не квадратируемо, поскольку оба числа 11 и 4 должны стоять на пятой позиции.

Число 15 квадратируемо, поскольку можно расставить числа от 1 до 15 по убыванию, и тогда $1 + 15 = 2 + 14 = \ldots = 15 + 1 = 16$.

4. Числа от 1 до 8 расставлены в вершинах куба так, чтобы сумма чисел в любых трёх вершинах, находящихся в одной грани, была не менее 10. Какова наименьшая возможная сумма чисел, стоящих в вершинах одной грани?

Ответ: 16.



Решение. В каждой грани есть вершина, в которой стоит число, не меньшее 6. Действительно, в противном случае одна из троек даже из оставшихся наибольших чисел 2, 3, 4, 5 даёт сумму, меньшую 10 (а именно тройка 2, 3, 4 с суммой 9).

Рассмотрим грань, содержащую вершину, в которой стоит число 6. Поскольку сумма чисел, стоящих в остальных трёх вершинах, не меньше 10, сумма всех чисел в вершинах этой грани не меньше 16.

Пример расстановки, при которой наименьшая сумма чисел, стоящих в вершинах одной грани, равна 16, приведён на рисунке: сумма чисел в передней грани равна $2+3+5+6=16$.

5. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) нарисован прямоугольник, стороны которого лежат на линиях сетки, причём одна сторона на 7 см меньше другой. Оказалось, что его можно разрезать по линиям сетки на несколько частей и сложить из них квадрат. Чему может быть равна сторона этого квадрата? Найдите все возможные значения.

Ответ: 6 см.

Решение. Пусть бóльшая сторона прямоугольника равна k см, $k>7$, а сторона полученного квадрата равна n см. Тогда из равенства площадей получаем $k(k-7)=n^2$. Поскольку $n<k$, положим $n=k-m$, где $m\geqslant 1$. Тогда $k^2-7k=(k-m)^2$, $k^2-7k=k^2-2mk+m^2$, откуда $m(2k-m)=7k$. Следовательно, одно из чисел m или $2k-m$ делится на 7.

Если $m=7s$, то получаем $s(2k-7s)=k$, откуда

$$k=\frac{7s^2}{2s-1}=7\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4(2s-1)}\right)\quad\Rightarrow\quad 4k=14s+7+\frac{7}{2s-1}.$$

Значит, 7 делится на $2s-1$, что возможно только при $s=1$ или $s=4$. В первом случае $m=7$, $k=7$ и $n=0$, что невозможно. Во втором случае получаем $m=28$, $k=16$ и $n=12$.

Случай, при котором $2k-m$ делится на 7, сводится к предыдущему заменой $m_1=2k-m$, $m=2k-m_1$.

Таким образом, единственное возможное значение n равно 12, при этом $k=16$. Разрезать прямоугольник 16×9 по линиям сетки и сложить из него квадрат 12×12 можно множеством способов.

6. Все натуральные числа, сумма цифр каждого из которых равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 125-м месте?

Ответ: 41000.

Решение. Подсчитаем количество n-значных чисел, сумма цифр каждого из которых равна 5, для каждого натурального n. Вычтем из старшего разряда 1, получим число (которое может теперь начинаться с нуля), сумма цифр которого равна 4. Представим разряды этого числа в виде ячеек, в каждой из которых лежит число шаров, равное цифре, стоящей в соответствующем разряде. Разложить таким образом 4 шара по n ячейкам — это то же самое, что между 4 шарами установить $n-1$ перегородку (между некоторыми перегородками шаров может не быть вовсе). Это можно сделать $C_{n+3}^4=\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{24}$ способами, столько же существует искомых n-значных чисел.

При $n=1,2,3,4,5$ получаем соответственно $C_4^4=1$, $C_5^4=5$, $C_6^4=15$, $C_7^4=35$, $C_8^4=70$, итого 126 чисел. На 126-м месте стоит набольшее пятизначное такое число, т. е. 50000. Значит, на 125-м месте стоит предыдущее — 41000.

7. В «Драконьем покере» в колоде четыре масти. Туз приносит 1 очко, валет — 2 очка, двойка — 2^2, тройка — 2^3, …, десятка — $2^{10}=1024$ очка. Короли и дамы отсутствуют. Можно выбирать из колоды любое количество карт. Сколькими способами можно набрать 2018 очков?

Ответ: $C_{2021}^3=1373734330$.

Решение. В любой масти можно набрать любое количество очков от 0 до 2047, причём единственным образом. Это можно сделать так: надо записать это количество в двоичной системе и выбрать карты, соответствующие двоичным разрядам, содержащим 1 (т. е. если в k-м разряде стоит 1, то следует взять карту, приносящую 2^k очков).

Таким образом, задача сводится к разбиению числа 2018 на 4 неотрицательных целых слагаемых. Рассуждая аналогично предыдущей задаче, получим искомое число способов: $C_{2021}^3=1373734330$.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2017/2018 учебного года для 9 класса

Условия заданий, решения и ответы к ним

1. Назовём натуральное число n *квадратируемым*, если числа от 1 до n можно расставить в таком порядке, что каждый член последовательности в сумме со своим номером даёт точный квадрат. Например, число 5 квадратируемо, так как можно расставить числа так: 3 2 1 5 4, при этом $3+1=2+2=1+3=4$ и $5+4=4+5=9$. Выясните, какие из чисел 7, 9, 11, 15 являются квадратируемыми.

Ответ: 9 и 15.

Решение. Число 7 не может быть квадратируемым, поскольку оба числа 1 и 6 должны находиться на третьей позиции, что невозможно.

Число 9 квадратируемо, так как числа от 1 до 9 можно расставить в следующем порядке: 8, 2, 6, 5, 4, 3, 9, 1, 7, при этом требуемое условие выполнено.

Число 11 не квадратируемо, поскольку оба числа 11 и 4 должны стоять на пятой позиции.

Число 15 квадратируемо, поскольку можно расставить числа от 1 до 15 по убыванию, и тогда $1+15=2+14=\ldots=15+1=16$.

2. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если высота, проведённая из прямого угла, разбивает его на два треугольника, у которых радиусы вписанных окружностей равны 3 и 4.

Ответ: 150.

Решение. Отношение радиусов вписанных окружностей равно коэффициенту подобия прямоугольных треугольников, на которые высота разбивает исходный треугольник. Этот коэффициент равен отношению катетов исходного треугольника. Обозначим эти катеты через $3x$ и $4x$. По теореме Пифагора гипотенуза исходного треугольника равна $5x$, а радиус вписанной в него окружности в силу подобия равен 5. Пользуясь равенством $2r=a+b-c$ для радиуса вписанной окружности (где a и b — катеты, c — гипотенуза), получаем уравнение: $10=3x+4x-5x$, откуда $x=5$. Таким образом, катеты исходного треугольника равны 15 и 20, а его площадь равна $S=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 20=150$.

3. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{4}{4-y^2}$ при условиях $|x|<1$, $|y|<2$ и $xy=1$.

Ответ: 4.

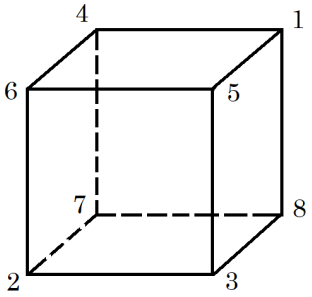
Решение. Пользуясь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим, при заданных условиях на x и y получаем

$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{4}{4-y^2}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{4}{4-y^2}}=\frac{4}{\sqrt{5-4x^2-y^2}}=\frac{4}{\sqrt{1-(2x-y)^2}}\geqslant 4,$$

причём все неравенства обращаются в равенства, если $2x=y$ и $xy=1$, т. е. $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\sqrt{2}$.

4. Числа от 1 до 8 расставлены в вершинах куба так, чтобы сумма чисел в любых трёх вершинах, находящихся в одной грани, была не менее 10. Какова наименьшая возможная сумма чисел, стоящих в вершинах одной грани?

Ответ: 16.



Решение. В каждой грани есть вершина, в которой стоит число, не меньшее 6. Действительно, в противном случае одна из троек даже из оставшихся наибольших чисел 2, 3, 4, 5 даёт сумму, меньшую 10 (а именно тройка 2, 3, 4 с суммой 9).

Рассмотрим грань, содержащую вершину, в которой стоит число 6. Поскольку сумма чисел, стоящих в остальных трёх вершинах, не меньше 10, сумма всех чисел в вершинах этой грани не меньше 16.

Пример расстановки, при которой наименьшая сумма чисел, стоящих в вершинах одной грани, равна 16, приведён на рисунке: сумма чисел в передней грани равна $2+3+5+6=16$.

5. Найдите все натуральные k, при которых число $k^2 - 101k$ является точным квадратом, т. е. квадратом целого числа.

Ответ: 101 или 2601.

Решение. Пусть $k^2-101k = (k-m)^2$, $m \geqslant 1$, тогда $k^2-101k = k^2-2mk+m^2$, откуда $m(2k-m) = 101k$. Поскольку число 101 простое, одно из чисел m или $2k-m$ делится на 101.

Если $m = 101s$, то получаем $s(2k-101s) = k$, откуда

$$k = \frac{101s^2}{2s-1} = 101\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(2s-1)}\right) \quad \Rightarrow \quad 4k = 202s + 101 + \frac{101}{2s-1}.$$

Значит, 101 делится на $2s-1$, что возможно только если $2s-1 = 1$ или $2s-1 = 101$, т. е. соответственно $s = 1$ или $s = 51$. В первом случае получаем $m = k = 101$, а во втором $m = 101 \cdot 51$, $k = 51^2 = 2601$.

Случай, при котором $2k - m$ делится на 101, сводится к предыдущему заменой $m_1 = 2k - m$, $m = 2k - m_1$.

6. Все натуральные числа, сумма цифр каждого из которых равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 125-м месте?

Ответ: 41000.

Решение. Подсчитаем количество n-значных чисел, сумма цифр каждого из которых равна 5, для каждого натурального n. Вычтем из старшего разряда 1, получим число (которое может теперь начинаться с нуля), сумма цифр которого равна 4. Представим разряды этого числа в виде ячеек, в каждой из которых лежит число шаров, равное цифре, стоящей в соответствующем разряде. Разложить таким образом 4 шара по n ячейкам — это то же самое, что между 4 шарами установить $n-1$ перегородку (между некоторыми перегородками шаров может не быть вовсе). Это можно сделать $C_{n+3}^4 = \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{24}$ способами, столько же существует искомых n-значных чисел.

При $n = 1, 2, 3, 4, 5$ получаем соответственно $C_4^4 = 1$, $C_5^4 = 5$, $C_6^4 = 15$, $C_7^4 = 35$, $C_8^4 = 70$, итого 126 чисел. На 126-м месте стоит набольшее пятизначное такое число, т. е. 50000. Значит, на 125-м месте стоит предыдущее — 41000.

7. В «Драконьем покере» в колоде четыре масти. Туз приносит 1 очко, валет — 2 очка, двойка — 2^2, тройка — 2^3, …, десятка — $2^{10} = 1024$ очка. Короли и дамы отсутствуют. Можно выбирать из колоды любое количество карт. Сколькими способами можно набрать 2018 очков?

Ответ: $C_{2021}^3 = 1373734330$.

Решение. В любой масти можно набрать любое количество очков от 0 до 2047, причём единственным образом. Это можно сделать так: надо записать это количество в двоичной системе и выбрать карты, соответствующие двоичным разрядам, содержащим 1 (т. е. если в k-м разряде стоит 1, то следует взять карту, приносящую 2^k очков).

Таким образом, задача сводится к разбиению числа 2018 на 4 неотрицательных целых слагаемых. Рассуждая аналогично предыдущей задаче, получим искомое число способов: $C_{2021}^3 = 1373734330$.

8. Моль проела в ковре дырку в форме прямоугольника со сторонами 10 см и 4 см. Найдите наименьший размер квадратной заплатки, которой можно закрыть эту дырку (заплатка закрывает дырку, если все точки прямоугольника лежат внутри квадрата или на его границе).

Ответ: $7\sqrt{2} \times 7\sqrt{2}$ см.

Решение. Требуется найти квадрат минимального размера, внутри которого можно поместить прямоугольник 10×4 см. Если менее 4 вершин прямоугольника лежат на сторонах квадрата, то можно уменьшить размер квадрата, поворачивая его относительно прямоугольника. Пусть вершины прямоугольника A, B, C и D лежат на сторонах квадрата $EFGH$ (см. рисунок).

Треугольники AEB и BFC подобны с коэффициентом $5:2$. Обозначим $AE = 5a$, $EB = 5b$, $BF = 2a$, $FC = 2b$. Аналогично, треугольники BFC и CGD подобны с коэффициентом $2:5$, следовательно, $CG = 5a$, $GD = 5b$. Получаем, что сторона квадрата равна, с одной стороны, $5a + 2b$, а с другой стороны $2a + 5b$. Следовательно, $a = b$. Значит, острые углы треугольников равны по 45 градусов, откуда находим $a = b = \sqrt{2}$. Тогда сторона квадрата равна $7\sqrt{2}$ см.

Если суммарное количество баллов было больше 100, то выставлялось 100 баллов.

ЛОМОНОСОВ – 2018. МАТЕМАТИКА. Критерии проверки

Задача № 1 = 15 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Найдены верные промежутки по отношению к точкам 0 и 1, которым принадлежат каждая из данных в условии четырёх точек, но ответ в явном виде не предъявлен	$\pm$	10
Выяснено, что вторая и третья точки принадлежат интервалу (0;1) ИЛИ что первая и четвёртая точки лежат вне отрезка [0;1]	$\mp$	5

Задача № 2 = 15 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Арифметическая ошибка при вычислении суммы первых 2018 (2017) членов геометрической прогрессии	$\pm$	10
Замечание. Не следует требовать обоснования того, что число с бесконечным числом знаков корня (равное второму числу из условия) существует и больше первого из данных в условии		

Задача № 3 = 15 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Найден лишь один из двух возможных вариантов ответа	$\pm$	10
Доказано, что треугольник *ABC* равнобедренный, но ответ на вопрос задачи получен неверный или не получен ИЛИ не доказано, что треугольник равнобедренный, но с использованием этого предположения получен ответ или часть ответа	$\mp$	5

Задача № 4 = 15 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
В качестве ответа дано правильное число страниц в альбоме, а не число фотографий в альбоме	$\dot{+}$	15
Из-за арифметической ошибки при решении неравенств получен неверный ответ, но в целом решение идейно верное	$\pm$	10

Задача № 5 = 15 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Верно найдено решение неравенства относительно arccos x или arcsin x, но ответ относительно переменной x неверный ИЛИ в ответ включена выколотая точка	$\pm$	10
Задача верно сведена к решению системы уравнений и неравенств	$\mp$	5

относительно $u = \arccos x$ и $v = \arcsin x$, но эта система не решена ИЛИ в решении с применением тригонометрических функций к внешним аркфункциям задача верно сведена к неравенству на внутренние аркфункции, но не доведена до ответа		
Задача № 6 = 15 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Верно и обоснованно найден только один из двух искомых наборов, а второй не найден или найден неверно (например, из-за предположения о положительности логарифмов или арифм. ошибки)	$\pm$	10
Обоснование отсутствия других решений, кроме двух верно найденных, неполное или отсутствует	$\mp$	5
Задача сведена к решению системы уравнений относительно переменных a_k (без логарифмов), но эта система не решена	–	0

Задача № 7 = 15 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Получен верный ответ, но имеются недостатки в обосновании его максимальности (минимальности): например, не исследован знак производной, а лишь найден её корень (корни) и использован для получения ответа ИЛИ арифметическая ошибка в конце идейно верного решения	$\pm$	10
Верно найдена производная и произведена замена $t = \sin x$ ($t = \cos x$), независимо от порядка этих действий, а затем корень (корни) производной подобран, но не доказано, что других нет	$\mp$	5
Замечание. В вариантах 1 и 3 не следует снижать оценку за отсутствие сравнения $g(-1)$ и $g(\pi/4)$.		

Задача № 8 а) = 10 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
При идейно верном решении получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	$\pm$	5

Задача № 8 б) = 10 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
При идейно верном решении получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	$\pm$	5