ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!»
ПО ФИЗИКЕ.
2017/18 учебный год, ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА.

10 и 11 классы.

Возможные решения и критерии проверки.

Задание отборочного тура состояло из тестовой части (проверялись только **ответы**) и творческой части (проверялись и оценивались **решения**).

Часть I (тестовое задание): пример варианта.

Вопрос 1 (8 баллов):
Маленький мальчик катается на карусели, сидя почти неподвижно в кресле, которое вращается вокруг вертикальной оси карусели с угловой скоростью 2 рад/с по окружности с радиусом 2 м. Его отец едет на велосипеде со скоростью 10 м/с по дорожке, проходящей мимо карусели. В момент, когда он проезжает точку дорожки, наиболее близкую к карусели, его сын тоже проходит точку своей траектории, наиболее близкую к дорожке, при этом расстояние между ними равно 3 м, и их скорости относительно Земли сонаправлены. Найдите скорость отца в системе отсчета, связанной с сыном, в этот момент времени. Ответ запишите в м/с.
Ответ: 0.
Пояснение: Для получения ответа достаточно заметить, что если мысленно поместить отца неподвижно на карусель (в этом случае он, очевидно, покоится относительно сына), то на расстоянии 5 м от оси карусели его скорость относительно Земли как раз будет равна заданной (10 м/с)! Для более подробного решения нужно заметить, что движение отца в системе отсчета, связанной с сыном, состоит из поступательного движения со скоростью 6 м/с и вращения с угловой скоростью 2 рад/с по окружности с радиусом 3 м. Мгновенные скорости этих движений направлены в разные стороны, поэтому искомая скорость равна (6-2×3) м/с=0 м/с.

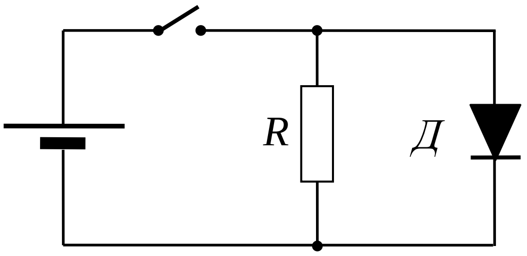
Вопрос 2 (8 баллов):
Один моль гелия нагревают таким образом, что его давление растет прямо пропорционально объему, увеличиваясь в 1,3 раза. Найти количество теплоты, подведенное к гелию в ходе этого процесса, если известно, что его начальная температура равнялась 200 К. Универсальная газовая постоянная $R \approx 8{,}31$ Дж/(моль·К). Ответ запишите в Джоулях, округлив до ближайшего целого.
Ответ: 2294.

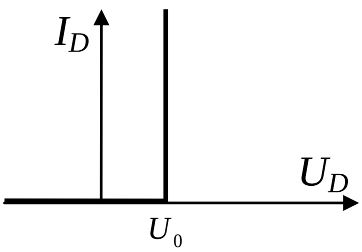
Пояснение: Поскольку $p = C \cdot V$, то температура $T = \frac{pV}{R} = \frac{p^2}{CR}$, то есть в процессе нагрева температура возрастает $(1{,}3)^2 = 1{,}69$ в раза. Поэтому $\Delta T = [1{,}69 - 1]T_1 = 138$ К. В таком процессе $Q = A + \Delta U$, причем $\Delta U = \frac{3}{2} R \cdot \Delta T$, а работа (площадь под диаграммой процесса в координатах давление-объем) $A = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) = \frac{1}{2C}(p_2^2 - p_1^2) = \frac{1}{2} R \cdot \Delta T$. Значит, $Q = 2R \cdot \Delta T \approx 2294$ Дж.

Вопрос 3 (9 баллов):

В схеме, показанной на рисунке, диод не является идеальным – его вольтамперная характеристика (зависимость силы тока от приложенного напряжения) показана на рисунке. Как видно, у диода есть некоторое пороговое напряжение, ниже которого он заперт даже при прямом включении, а при его превышении он пропускает любой ток (считаем, что это справедливо для токов, характерных для этой схемы). Известно, что величина ЭДС источника в 6 раз больше порогового напряжения диода, а внутреннее сопротивление источника во столько же раз меньше сопротивления резистора. Найдите отношение мощности, выделяемой на диоде, к мощности, выделяемой на резисторе. Ответ запишите в виде числа.

Ответ: 29.

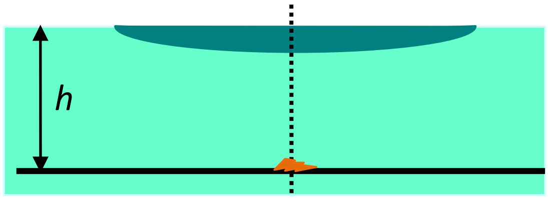




Пояснение: Источник подключен к диоду в «правильной» полярности, и в отсутствие диода напряжение на резисторе равнялось бы $U'_R = \frac{6U_0}{R+R/6}R = \frac{36}{7}U_0 > U_0$, то есть диод будет открыт. Значит, напряжение на диоде и резисторе на самом деле $U_R = U_D = U_0$, и отношение мощностей рано отношению токов: $\frac{P_D}{P_R} = \frac{I_D}{I_R}$. Ток через резистор $I_R = \frac{U_0}{R}$, а ток в ветви с источником определяется из уравнения $6U_0 - I\frac{R}{6} = U_0 \Rightarrow I = 30\frac{U_0}{R}$. Следовательно, $I_D = I - I_R = 29\frac{U_0}{R}$. В итоге $\frac{P_D}{P_R} = 29$.

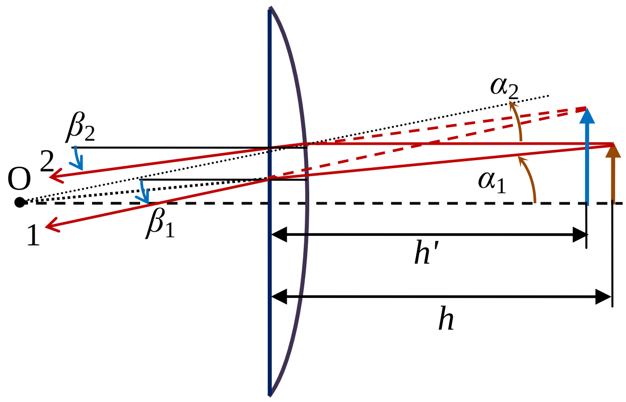
Часть II (творческое задание). *«АРХИВЫ ПРОФЕССОРА ЧЕЛЛЕНДЖЕРА».*

1. («**Подводная оптика**») Однажды профессор Челленджер производил наблюдения за обитателями пруда с чистой водой. При этом он использовал плосковыпуклую тонкую линзу, фокусное расстояние которой в воздухе равнялось $F = 30$ см. Линза размещалась на поверхности воды (см. рисунок). Профессор рассматривал мелкий объект, находившийся точно под центром линзы на глубине $h = 63$ см. С каким поперечным увеличением был виден объект? Известно, что показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза $n_Л = 2$, показатель преломления воды $n \approx \sqrt{2} \approx 1{,}414$.



Решение:

Рассмотрим два луча, падающей от крайней точки наблюдаемого объекта на линзу. Первый луч – идущий по радиусу сферической поверхности линзы. Он не преломляется на сферической поверхности линзы, и падает под углом $\alpha_1 \approx \dfrac{l}{R+h}$ на ее плоскую поверхность. Здесь l – размер объекта, а R – радиус сферической поверхности (в этой и последующих выкладках мы считаем все углы малыми, а толщиной линзы везде будем пренебрегать). После преломления на



границе раздела стекло-воздух этот луч будет направлен под углом $\beta_1 \approx n_Л \alpha_1 \approx \dfrac{n_Л l}{R+h}$ к главной оптической оси линзы. Второй луч – идущий параллельно главной оптической оси линзы. Угол его падения на сферическую поверхность равен $\alpha_2 \approx \dfrac{l}{R}$, и после преломления на границе раздела вода-стекло он будет идти под углом $\alpha_2' \approx \dfrac{l}{R} - \dfrac{n}{n_Л}\dfrac{l}{R} = \dfrac{n_Л - n}{n_Л}\dfrac{l}{R}$ к главной оптической оси. После преломления на плоской поверхности этот угол станет равным $\beta_2 \approx n_Л \alpha_2 \approx \dfrac{(n_Л - n)l}{R}$. Численный анализ позволяет заметить, что $\beta_1 > \beta_2$, и поэтому пересекаются продолжения этих лучей (то есть изображение объекта – мнимое). Обозначив h' расстояние от линзы до изображения, запишем два выражения для величины изображения: $l' \approx \dfrac{Rl}{R+h} + \beta_1 h' \approx l + \beta_2 h'$. Используя полученное соотношение как уравнение для h', находим: $h' = \dfrac{Rh}{nR - (n_Л - n)h}$. Подставляя это значение во второе выражение, определяем размер изображения $l' \approx l \cdot \left(1 + \dfrac{(n_Л - n)h}{nR - (n_Л - n)h}\right) = l \cdot \dfrac{nR}{nR - (n_Л - n)h}$.

Следовательно, увеличение изображения $\Gamma = \dfrac{l'}{l} \approx \dfrac{nR}{nR - (n_Л - n)h}$. Отметим, что для плоско-выпуклой линзы с показателем преломления стекла $n_Л$ в воздухе фокусное расстояние $F = \dfrac{R}{n_Л - 1} \Rightarrow R = (n_Л - 1)F$. Поэтому окончательно $\Gamma = \dfrac{l'}{l} \approx \dfrac{n(n_Л - 1)F}{n(n_Л - 1)F - (n_Л - n)h} \approx 7{,}7$.

Примечание: В этой задаче есть целый ряд «альтернативных» путей: можно мысленно добавить «над» линзой бесконечно тонкий слой воды. Как известно, бесконечно тонкая параллельная пластина не вызовет смещения или преломления лучей, и задача сводится к анализу комбинации «линза в воде + преломление на границе раздела вода-воздух (в этом случае ключевые формулы – это $\Gamma = n\dfrac{h'}{h}$, формула линзы $\dfrac{1}{h} - \dfrac{1}{nh'} = \dfrac{1}{F'}$ и формулы для оптической силы линзы в воде $\dfrac{1}{F'} = \dfrac{n_Л - n}{nR}$ и в воздухе $\dfrac{1}{F} = \dfrac{n_Л - 1}{R}$). Также можно использовать «обобщенную формулу линзы» для системы преломляющих поверхностей $-\frac{1}{h'}+\frac{n}{h}=\frac{n_Л - n}{R}$ вместе с анализом хода одного из рассмотренных лучей. Но все эти пути должны приводить к тому же ответу.

ОТВЕТ: $\Gamma=\frac{l'}{l}\approx\frac{n(n_Л-1)F}{n(n_Л-1)F-(n_Л-n)h}\approx 7{,}7$.

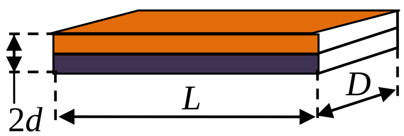
КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

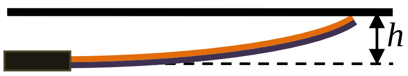
действие	макс. балл	примечания
Построен ход двух лучей для обеих поверхностей линзы, или описано добавление тонкого слоя, или записана обобщенная формула линзы вместе с построением хода одного луча.	**3**	Или «первый шаг» другого пути, который приводит к ответу
Записана полная система соотношений, позволяющая найти увеличение	**7**	
Получена формула для увеличения	**3**	Допускается «составная» формула*
Правильный численный ответ	**2**	С учетом знака**
ВСЕГО	**15**	

*например, увеличение через h', h' через R, R через F и $n_Л$.

** ответ «-7,7» оценивается в 1 балл вместо 2.

2. («**Термомеханическое реле**») В одном из опытов профессора Челленджера было необходимо, чтобы при достижении в установке определенной температуры подавался сигнал. Нужный датчик удалось изготовить на основе «биметаллической пластины», то есть двух длинных тонких пластин одинаковых размеров (длина L, ширина D, толщина d, причем $L >> D >> d$), изготовленных из разных металлов и по всей поверхности соприкосновения прочно сваренных друг с другом. Металлы имеют разные коэффициенты теплового расширения $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и разные модули Юнга $E_1 \neq E_2$. При температуре $t_0 = 0°C$ пластина ровная, а при изменении температуры она изгибается по дуге окружности, и при достижении необходимой температуры t она касается контакта и замыкает цепь подачи сигнала. Для правильной регулировки датчика нужно подобрать расстояние h между плоскостью недеформированной пластины и поверхностью контакта. Выведите формулу «калибровочной зависимости» датчика $h(t)$.





Решение:

Везде в решении будем считать тепловые удлинения пластин очень малыми (по сравнению с L), а изменениями поперечных размеров пренебрежем. Изгиб пластины появляется из-за того, что коэффициенты теплового расширения различаются: «ненапряженная» длина каждой пластины изменяется при нагреве, и поэтому они перестают быть равными. Однако из-за прочной сварки длина пластин по линии сварки должна остаться одинаковой. В результате пластина с меньшим α (далее для определенности будем считать, что $\alpha_1 < \alpha_2$) окажется в растянутом состоянии, а с большим – в сжатом, и возникает изгибающий пластину момент сил упругости. В условии есть указание, что пластины изгибаются по дуге окружности. Пусть R – радиус кривизны поверхности спайки, а $\tilde{L}$ – ее длина в состоянии равновесия при температуре t. Тогда угловой размер изогнутой пластины $\varphi = \tilde{L}/R$ (см.

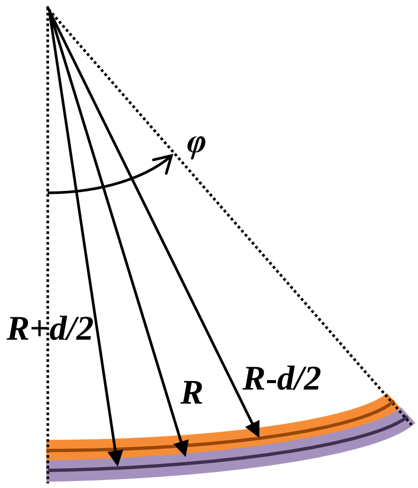


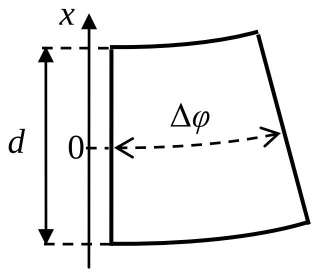
рисунок). Длина средней линии первой пластины в состоянии равновесия $L_1 = \varphi\left(R - \dfrac{d}{2}\right) = \tilde{L}\left(1 - \dfrac{d}{2R}\right)$, а второй $L_2 = \tilde{L}\left(1 + \dfrac{d}{2R}\right)$. Деформации этих пластин равны разности этих длин и «ненапряженной» длины каждой пластины, то есть:

$$\Delta L_1 = \tilde{L}\left(1 - \frac{d}{2R}\right) - L(1 + \alpha_1 t) > 0,$$

$$\Delta L_2 = \tilde{L}\left(1 + \frac{d}{2R}\right) - L(1 + \alpha_2 t) < 0.$$

Равновесная длина поверхности спайки определяется из условия уравновешивания сил упругости: $k_1 \Delta L_1 + k_2 \Delta L_2 = 0$, где коэффициенты жесткости пластин выражаются через модули Юнга и их размеры: $k_{1,2} = E_{1,2}\dfrac{Dd}{L}$. Таким образом, из условия равновесия сил находим: $\tilde{L} = \dfrac{E_1(1+\alpha_1 t) + E_2(1+\alpha_2 t)}{E_1(1 - d/2R) + E_2(1 + d/2R)} L$. Это позволяет найти величину сил упругости: например, $|F_1| = k_1 |\Delta L_1| = \dfrac{E_1 E_2 [(\alpha_2 - \alpha_1)t - d/R] Dd}{E_1 + E_2 + (E_2 - E_1) d/2R}$. Ясно, что $|F_2|$ точно такой же. Отметим: из этого выражения видно, что при ненапряженном изгибе ($|F_{1,2}| = 0$) радиус изгиба удовлетворяет соотношению $\dfrac{d}{R} = (\alpha_2 - \alpha_1)t$, но такое выражение не учитывает упругие свойства пластин, и этот результат может считаться «простой» оценкой для радиуса изгиба. Конечно, в реальном случае $|F_{1,2}| > 0$ и поэтому $\dfrac{d}{R} < (\alpha_2 - \alpha_1)t << 1$.

Две силы упругости создают изгибающий момент сил, равный $M_{изг} = |F_1| d = \dfrac{E_1 E_2 [(\alpha_2 - \alpha_1)t - d/R] Dd^2}{E_1 + E_2 + (E_2 - E_1) d/2R}$. Рассмотрим теперь «тонкий поперечный слой» первой пластины толщиной ΔL с угловым размером $\Delta\varphi = \Delta L / R$. «Средняя»



деформация этой пластины вычислена для средней линии, но в действительности «наружные» по отношению к изгибу слои растянуты сильнее, чем «внутренние». Если ввести координату x, отсчитываемую поперек пластины, то изменение деформации по сравнению со средней линией $\delta L = x \cdot \Delta\varphi = x \cdot \Delta L / R$. Поэтому изменения сил упругости в каждом слое толщиной dx равно (поскольку коэффициент жесткости $dk = E_1 D \cdot dx / \Delta L$)

$dF = \dfrac{E_1 D \cdot dx}{\Delta L}\delta L = \dfrac{E_1 D}{R} x\,dx$. Эти изменения создают вклад в момент сил упругости, противоположный «изгибающему» моменту сил, и в состоянии равновесия они в точности компенсируют друг друга. Полный вклад в момент первой пластины вычисляется через интегрирование: $M_1 = \int\limits_{-d/2}^{+d/2} x \cdot dF = \dfrac{E_1 D}{R}\int\limits_{-d/2}^{+d/2} dx\,x^2 = \dfrac{E_1 D d^3}{12R}$. Участникам, не знакомым с интегрированием, пришлось бы исходить из того, что при суммировании малых вкладов ($M_1 = \sum x \cdot \Delta F = \dfrac{E_1 D}{R}\sum x^2 \Delta x$) можно заметить, что $x^2 \Delta x \approx \Delta\left(\dfrac{x^3}{3}\right)$, и тогда $\sum x^2 \Delta x = \sum \Delta\left(\dfrac{x^3}{3}\right) = \dfrac{1}{3}\left[\left(\dfrac{d}{2}\right)^3 - \left(-\dfrac{d}{2}\right)^3\right] = \dfrac{d^3}{12}$ (ясно, что по сути это то же самое интегрирование). Аналогично вклад второй пластины $M_2 = \dfrac{E_2 D d^3}{12R}$, и условие равновесия $M_{изг} = M_1 + M_2$ позволяет определить радиус кривизны. Как видно, это условие приводит к уравнению

$$\frac{E_1 E_2[(\alpha_2 - \alpha_1)t - d/R]Dd^2}{E_1 + E_2 + (E_2 - E_1)d/2R} = \frac{(E_1 + E_2)Dd^3}{12R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{12E_1E_2}{(E_1 + E_2)^2}\left[(\alpha_2 - \alpha_1)t - \frac{d}{R}\right] = \frac{d}{R}\left[1 + \frac{E_2 - E_1}{E_1 + E_2}\frac{d}{2R}\right].$$

Решая это квадратное уравнение относительно d/R, находим положительный корень, равный нулю при $t = 0°C$: например, при $E_2 > E_1$ это $\dfrac{d}{R} = -A + \sqrt{A^2 + B}$. Здесь $A \equiv \dfrac{12E_1E_2 + (E_1 + E_2)^2}{E_2^2 - E_1^2}$, а $B \equiv \dfrac{24E_1E_2(\alpha_2 - \alpha_1)t}{E_2^2 - E_1^2}$. Здесь следует отметить, что коэффициенты теплового расширения большинства металлов порядка 10^{-5}К$^{-1}$. Поэтому даже для температур порядка 100°С величина $(\alpha_2 - \alpha_1)t$ порядка 10^{-3}. Считая модули Юнга материалов величинами одного порядка, а $(\alpha_2 - \alpha_1)t << 1$, преобразуем это выражение к более простому виду: $\dfrac{d}{R} \approx \dfrac{12E_1E_2}{12E_1E_2 + (E_1 + E_2)^2}(\alpha_2 - \alpha_1)t$ (для $E_2 < E_1$ получается такое же выражение). Как мы и ожидали, равновесное значение $d/R < (\alpha_2 - \alpha_1)t << 1$. Итак: радиус кривизны линии «спайки» удовлетворяет соотношению $\dfrac{1}{R(t)} \approx \dfrac{12E_1E_2}{12E_1E_2 + (E_1 + E_2)^2}\dfrac{(\alpha_2 - \alpha_1)t}{d}$. Угол изгиба пластины $\varphi = \dfrac{\tilde{L}}{R}$. Если отсчитывать h от плоскости «спайки» (как было показано на рисунке в условии), то контакт достигается, если $h - d = R[1 - \cos(\tilde{L}/R)]$. Здесь предполагается, что параметры пластины подобраны таким образом, чтобы выполнялось требование $\varphi < \pi$ (при $\varphi \geq \pi$ пластина «сворачивается», и h практически перестает расти при дальнейшем изгибе, что неудобно для конструирования датчика). Заметим также, что отличие $\tilde{L}$ от L очень мало:

$\tilde{L} \approx L\left[1+\frac{\alpha_1 E_1+\alpha_2 E_2}{E_1+E_2}t\right]$, и в рамках используемой точности им можно пренебречь. Тогда $h(t) \approx d + R(t)[1-\cos(L/R(t))]$. На самом деле удобнее всего подобрать параметры так, чтобы выполнялись соотношения $h >> d$ и $\varphi << 1$ (например, $L = 100d$, и для «нужной» температуры $(\alpha_2-\alpha_1)t \approx 0{,}001$). Тогда «калибровочная зависимость» датчика имеет наиболее простой и удобный линейный вид

$$h(t) \approx \frac{L^2}{2R(t)} \approx \frac{6E_1E_2(\alpha_2-\alpha_1)L^2}{[12E_1E_2+(E_1+E_2)^2]d}\cdot t.$$

Примечание: Конечно, основная часть решения задачи – это вывод формулы для радиуса кривизны. При использовании «готовой» формулы баллы за эту часть решения <u>не начислялись</u>. Однако (см. критерии проверки) баллы начислялись и за вывод этой формулы в более простых (хоть и менее точных) моделях. Самая простая модель (модель 1, оценочная) состоит в следующем: нужно считать, что реальный изгиб будет близок к изгибу в «ненапряженном» состоянии (когда средние силы упругости каждой пластины равны нулю). Тогда радиус можно оценить из чисто геометрических соображений: длина каждой из пластин равна «равновесному» значению, то есть $L_1 = \varphi\left(R-\frac{d}{2}\right) = L(1+\alpha_1 t)$ и $L_2 = \varphi\left(R+\frac{d}{2}\right) = L(1+\alpha_2 t)$. Разделив эти соотношения одно на другое, найдем: $R \approx \frac{d}{(\alpha_2-\alpha_1)t}$ – в точном соответствии с тем, что мы раньше получали при $F=0$. В более сложной модели (модель 2) можно пренебречь изгибом при использовании условия баланса сил упругости для вычисления $\tilde{L}$. В этом случае условие равновесия сил имеет вид $k_1[\tilde{L} - L(1+\alpha_1 t)] = k_2[L(1+\alpha_2 t) - \tilde{L}]$. Выкладки, аналогичные приведенным в решении (но теперь для d/R получается более простое линейное уравнение), приводят к результату $\frac{d}{R} \approx \frac{3E_1E_2}{(E_1+E_2)^2}(\alpha_2-\alpha_1)t$. Он отличается от правильного, но при близких величинах модулей Юнга дает почти те же значения радиуса кривизны. Конечно, можно было использовать и другие модели, и оценка за эту часть задачи в основном определялась точностью выбранной модели и правильностью вычислений в рамках модели. Конечно, важное значение имеет и обоснование выбора той или иной модели. Например, в «авторской» модели пренебрегается влиянием теплового расширения на толщину слоев пластины. Дело здесь в том, что при учете этого обстоятельства в рамках аналогичного подхода объем вычислений вырастает значительно, а точность увеличивается очень незначительно – возникающие поправки к величине d/R содержат множители $[(\alpha_2-\alpha_1)t]^2$ или $(\alpha_2-\alpha_1)t\cdot\frac{d}{L}$, и поэтому их влияние на результат очень мало.

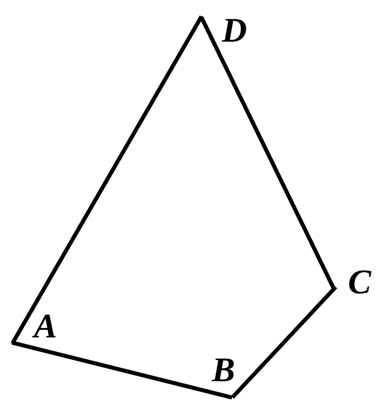
ОТВЕТ: при «оптимальном» выборе параметров системы ($\frac{d}{(\alpha_2-\alpha_1)t} >> L >> D >> d$)

$$h(t) \approx \frac{6E_1E_2(\alpha_2-\alpha_1)L^2}{[12E_1E_2+(E_1+E_2)^2]d}\cdot t.$$

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс. балл	примечания
Записано условие равновесия сил упругости слоев	**3**	при учете изгиба; без учета (модель 2 или аналогичная): **2 балла**; используется условие отсутствия напряжений: **1 балл**.
Получено выражение для $\tilde{L}$	**3**	при учете изгиба; без учета (модель 2 или аналогичная) или при записи уравнения для длин слоев «ненапряженной» пластины: **2 балла**.
Записано условие равновесия моментов сил упругости	**2**	в модели, которая по точности не уступает авторской; в модели 2 или аналогичной по точности: **1 балл**.
Вычислены все моменты сил, входящие в условие равновесия	**4**	в модели, которая по точности не уступает авторской; в модели 2 или аналогичной по точности: **2 балла**.
Получено выражение для кривизны пластины	**4**	в модели, которая по точности не уступает авторской; в модели 2 или аналогичной по точности: **2 балла**; при использовании условия отсутствия напряжений: **1 балл**.
Записано общее выражение связи h и R	**3**	Есть выражение только для более частного случая: **2 балла**.
Приведен ответ для калибровочной зависимости	**1**	
Проведен анализ с учетом того, что $\frac{d}{R} < (\alpha_2 - \alpha_1)t << 1$	**3**	
Указано ограничение, связанное с возможностью «скручивания»	**1**	
Произведен подбор параметров для «наиболее удобной» зависимости	**1**	
ВСЕГО	**25**	

3. («**Поиски нуля**») В одной из записных книжек профессора Челленджера найдено упоминание об «особенном четырехугольнике». Плоский четырехугольный каркас $ABCD$ был изготовлен из непроводящего жестокого стержня и имел стороны с длинами $|AB| = 3$см, $|BC| = 2$см, $|CD| = 4$ см, и $|DA| = 5$см. Площадь четырехугольника равнялась $S \approx 10{,}78$ см^2. На этот каркас по всему периметру был равномерно нанесен заряд. В записной книжке утверждалось, что у этого четырехугольника есть точка, в которой напряженность электрического поля равна нулю. Найдите эту точку, определите расстояние от нее до каждой из сторон четырехугольника и укажите еще хотя бы один пример равномерно заряженного четырехугольника,



имеющего такую точку.

Решение:

Докажем сначала следующее утверждение: вектор напряженности электростатического поля $\vec{E}$, созданного равномерно заряженным с плотностью λ отрезком AB в точке C, не лежащей на прямой AB, равен вектору напряженности $\vec{E}'$, создаваемому равномерно заряженной с той же плотностью λ дугой A'B' окружности радиуса CH с центром C (см. рис. 1). Непосредственный расчет доказывает это утверждение. Действительно, для бесконечно малого элемента dl отрезка AB, расположенного в точке D, имеем следующее выражение для проекции электростатического поля $\vec{E}$ на направление от этого элемента к точке C: $dE = \dfrac{k\,dq}{R^2} = \dfrac{k\lambda\,dl}{R^2}$, где $R \equiv |CD|$. Для соответствующего малого элемента dl' дуги

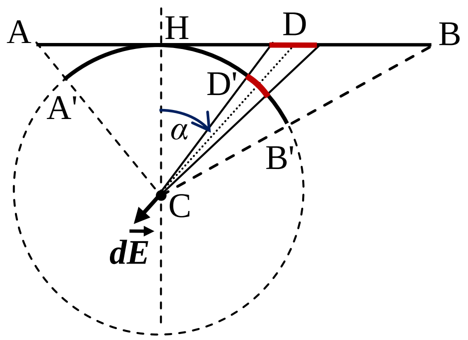


рис. 1.

A'B' аналогичное выражение для электростатического поля $dE' = \dfrac{k\,dq'}{r^2} = \dfrac{k\lambda\,dl'}{r^2}$, где $r \equiv |CH|$ – радиус кривизны дуги. Учитывая соотношения $dl' = \dfrac{r}{R}dl \cdot \cos(\alpha)$ и $r = R\cos(\alpha)$, получим, что

$$dE' = \frac{k\lambda}{(R\cdot\cos(\alpha))^2}\frac{R\cos(\alpha)}{R}dl\cos(\alpha) = \frac{k\lambda\,dl}{R^2} = dE.$$

Направление этих векторов совпадает, поэтому $d\vec{E}' = d\vec{E}$. Таким образом, поля, созданные соответственно малыми элементами dl и dl', равны друг другу. Суммируя поля всех малых элементов отрезка AB и дуги A'B', доказываем равенство полей, созданными ими: $\vec{E}' = \vec{E}$, т.е. утверждение доказано. Можно отметить, что из него сразу же следует, что поле равномерно заряженного отрезка направлено вдоль биссектрисы угла ACB.

Теперь заметим, что в данном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, следовательно, существует <u>вписанная в него</u> окружность. Рассмотрим ее центр O (рис. 2). Согласно доказанному утверждению, можно заменить при расчете поля в точке O каждую сторону четырехугольника соответствующей дугой вписанной окружности. Сделав это, убеждаемся, что поле четырехугольника в точке O равно полю вписанной в него окружности в ее центре, а из соображений симметрии ясно, что поле в центре равномерно заряженной окружности равно нулю. Таким образом, требуемая точка – это центр вписанной окружности. Расстояние от этой точки до всех сторон

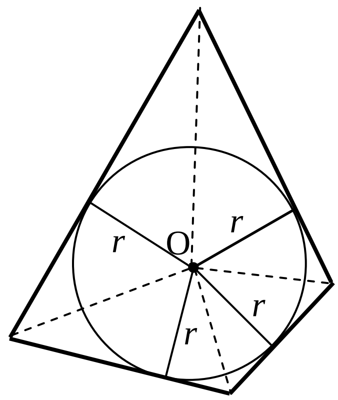


рис.2.

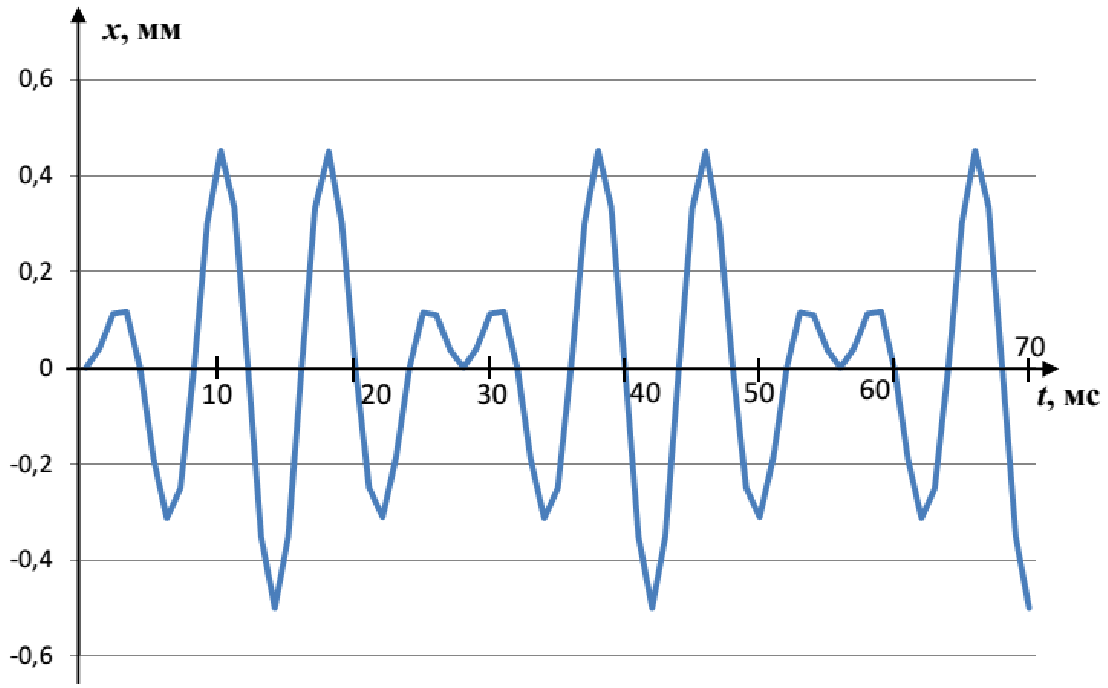
четырехугольника равно радиусу вписанной окружности, который можно найти как отношение площади четырехугольника к его полупериметру: $r = \dfrac{2S}{P} \approx 1{,}54$ см. Кроме того, понятно, что для любого равномерно заряженного по периметру выпуклого многоугольника, у которого существует вписанная окружность, центр этой окружности – это точка, в которой напряженность электростатического поля равна нулю. Поэтому в качестве примера подойдет любой выпуклый четырехугольник, у которого суммы длин противоположных сторон равны. Вместе с тем можно найти и другие примеры. Например, такая точка очевидно существует у любого прямоугольника – это его центр.

ОТВЕТ: центр вписанной в ABCD окружности (он же – точка пересечения биссектрис), расстояние до всех сторон $r \approx 1{,}54$ см, любой выпуклый четырехугольник, у которого суммы длин противоположных сторон равны или прямоугольник.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс. балл	примечания
Есть идея преобразования поля отрезка в поле окружности (или другая, обеспечивающая возможность **правильного решения**)	**2**	«другие идеи»: использовать формулу поля отрезка или поля «симметричного угла» конечных размеров
Преобразование **доказано** (или **выведена** используемая формула)	**6**	При «угадывании» нужной точки баллы не начисляются
Обнаружена нужная точка	**3**	При «угадывании»: **2 балла**.
Вычислено расстояние до сторон	**3**	При «угадывании»: **2 балла**.
Приведен правильный пример аналогичного четырехугольника	**1**	Достаточно одного, даже «случайно» выбранного!
ВСЕГО	**15**	

4. («**Гравитационная волна**») Судя по записям в архивах, профессор Челенджер много внимания уделял поиску гравитационных волн. Для этой цели он создал детектор в виде тяжелого груза и пружины, которые были помещены в вакуумную камеру. Крепление камеры было снабжено специальными устройствами, изолирующими ее от колебаний здания. В состоянии покоя груз растягивал пружину на $\Delta l_0 = (7{,}000 \pm 0{,}005)$ см (здесь и далее указаны погрешности, с которыми известны данные эксперимента). Профессору удалось обеспечить очень слабое затухание колебаний груза: после выведения его из равновесия в процессе свободных колебаний амплитуда убывала в два раза примерно за 1000 периодов колебания. Однажды детектор зарегистрировал почти периодический сигнал продолжительностью около 900 с, в течении которых груз колебался практически вертикально (угол отклонения оси колебаний от вертикали не превышал 0,1°). На графике представлена временная зависимость отклонений груза $x(t)$ от положения равновесия на участке длительностью 70 мс, взятом из «средней части» сигнала (на других аналогичных участках картина с высокой точностью повторялась):



Анализ показал, что эту кривую можно (с отклонениями, не превышающими 0,01 мм) описать формулой $\bar{x}(t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{7T}t\right)$, где $A = (0{,}50 \pm 0{,}01)$ мм, а $T = (8{,}00 \pm 0{,}01)$ мс. Предположим, что этот сигнал был вызван гравитационным излучением, которое является наложением гармонических колебаний вида $\delta\vec{g}(t) = \vec{g}_m \cos(\omega t + \varphi)$. Здесь $\delta\vec{g}$ – изменение ускорения свободного падения, вызванное волной. В рамках этого предположения найдите:

- спектр сигнала (то есть набор частот гармонических колебаний, из которых он состоит);
- амплитуду ($|\vec{g}_m|$) каждого из гармонических колебаний.

Насколько реалистично это предположение? При ответе на этот вопрос учтите, что сигнал, зарегистрированный 14.09.2015 детекторами LIGO, вносил в ускорение свободного падения искажения порядка $10^{-12}g$.

Решение:

Формулу, с хорошей точностью описывающую сигнал, можно представить как сумму гармонических колебаний, воспользовавшись тригонометрической формулой $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$. Тогда обнаруживаем, что

$$\bar{x}(t) = \frac{A}{2} \cdot \cos\left(\frac{12\pi}{7T}t\right) - \frac{A}{2} \cdot \cos\left(\frac{16\pi}{7T}t\right).$$

Так как периоды этих колебаний порядка десятка миллисекунд, то к «середине сигнала» длительностью 900 с пройдет несколько десятков тысяч периодов колебаний. Следовательно, возбужденные включением сигнала собственные колебания груза к этому моменту практически затухнут, и наблюдаемую часть сигнала необходимо рассматривать как <u>вынужденные</u> колебания под действием периодической силы. Вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы, поэтому частоты гармонических составляющих предполагаемого сигнала – это $\nu_1 = \frac{6}{7T} \approx (107{,}14 \pm 0{,}14)$ Гц и $\nu_2 = \frac{8}{7T} \approx (142{,}86 \pm 0{,}18)$ Гц. В этих значениях сохранен один «лишний» разряд, чтобы уменьшить потери точности при округлении. Пренебрегая диссипативными силами на интервалах времен порядка нескольких периодов колебаний, запишем уравнение колебаний под действием одной вертикальной гармонической составляющей (координата x – отклонение груза по вертикали от положения равновесия): $ma_x = -kx + mg_m \cos(\omega t)$. Здесь m и k – масса груза и жесткость пружины, а начало отсчета времени выбрано так, чтобы начальная фаза колебаний гравитационного поля равнялась нулю. Поскольку ускорение есть вторая производная координаты по времени $a_x = x_t''$, то это – уравнение вынужденных гармонических колебаний $x_t'' + \omega_0^2 x = g_m \cos(\omega t)$ ($\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$). Если искать его решение в виде колебаний на частоте вынуждающей силы $x(t) = x_m \cos(\omega t)$, то можно установить связь амплитуды сигнала с амплитудой вынужденных колебаний груза: $x_m = \frac{g_m}{\omega_0^2 - \omega^2}$. В нашем случае оказалось, что амплитуды колебаний под действием двух гармонических компонент сигнала совпали по величине, и при этом эти колебания происходят в противофазе. Это, как видно из найденной формулы, означает, что сигналы имели сдвиг по фазе на π, причем $\frac{A}{2} = \frac{g_{m1}}{\omega_1^2 - \omega_0^2} = \frac{g_{m2}}{\omega_2^2 - \omega_0^2}$. Отметим также, что известная нам с высокой точностью величина $\Delta l_0 = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega_0^2} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{g}{\Delta l_0}$. Эти соотношения позволяют нам найти амплитуды сигналов. Отметим, что нам неизвестно расположение лаборатории профессора Челленджера, поэтому мы будем вынуждены использовать значение ускорения свободного падения $g \approx (9{,}81 \pm 0{,}03)$ м/с^2 (этот интервал вмещает в себя значения практически для всей поверхности Земли). В этом случае:

$$g_{m1} = \frac{gA}{2\Delta l_0}\left(\frac{\Delta l_0 \omega_1^2}{g} - 1\right) \approx (11{,}5 \pm 0{,}3)g \approx (113 \pm 3)\ \text{м/с}^2,$$

$$g_{m2} = \frac{gA}{2\Delta l_0}\left(\frac{\Delta l_0 \omega_2^2}{g} - 1\right) \approx (20{,}5 \pm 0{,}5)g \approx (201 \pm 5)\ \text{м/с}^2.$$

На самом деле можно заметить, что основной вклад в погрешность вносит ошибка в определении A (2%), и а соотношение $\omega_0^2 / \omega_{1,2}^2$ порядка нескольких сотых процента. Поэтому можно было обойтись и без использования ускорения свободного падения (оно потребовалось только для оценки ω_0), что даже немного повысит точность:

$$g_{m1} \approx \frac{A}{2}\omega_1^2 \approx (113{,}3 \pm 2{,}3)\ \text{м/с}^2,\ g_{m2} \approx \frac{A}{2}\omega_2^2 \approx (201{,}4 \pm 4{,}2)\ \text{м/с}^2.$$

Примечание: То, что свободные колебания практически не вносят вклад в наблюдаемый сигнал, видно по самому сигналу – в нем нет колебаний на частоте около 2 Гц! Формально роль диссипации можно учесть (для этого в условии достаточно информации), но вычисления показывают, что влияние диссипации на результат значительно меньше имеющихся ошибок определения, поэтому ее учет не имеет смысла, и баллы за него не начислялись.

ОТВЕТ: $\nu_1 = \frac{6}{7T} \approx (107{,}14 \pm 0{,}14)$ Гц, $g_{m1} \approx (113{,}3 \pm 2{,}3)$ м/с^2 и $\nu_2 = \frac{8}{7T} \approx (142{,}86 \pm 0{,}18)$ Гц, $g_{m2} \approx (201{,}4 \pm 4{,}2)$ м/с^2, предположение нереалистично.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс. балл	примечания
Формула для аппроксимации приведена к суперпозиции гармоник.	**2**	
Правильно найдены частоты (или циклические частоты) гармоник	**4**	По **2 балла** за каждую частоту
Показано, что регистрируемое колебание можно рассматривать как вынужденные колебания	**2**	
Указано, что на данном участке времени можно не учитывать диссипацию	**1**	
Получена формула для амплитуды вынужденных колебаний	**4**	
Найдены амплитуды гармоник (с использованием «табличного» значения g только для оценки)	**6**	По **3 балла** за каждую амплитуду. При вычислении с прямым использованием значения g - 2×2=**4 балла**
Сделан правильный мотивированный вывод о реалистичности предположения	**1**	
ВСЕГО	**20**	

7, 8 и 9 классы.

Возможные решения и критерии проверки.

Задание отборочного тура состояло из тестовой части (проверялись только **ответы**) и творческой части (проверялись и оценивались **решения**).

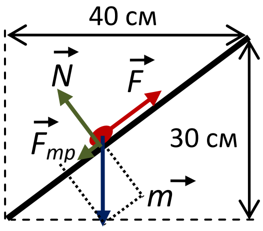
Часть I . Тестовое задание: пример варианта.

Вопрос 1 (8 баллов):

Из ровных деревянных планок изготовлена подставка в виде прямоугольного треугольника со сторонами 30см, 40 см и 50 см. Сначала подставку установили так, что катет 30 см был вертикален, а катет 40 см – горизонтален, и по гипотенузе, как по наклонной плоскости, медленно провели небольшой груз (с помощью нити, идущей вдоль плоскости). Затем подставку переставили: теперь катет 40 см был вертикален, а катет 30 см – горизонтален. Подъем груза повторили. Оказалось, что силы натяжения нити в первом и втором опыте соотносились как $F_2 : F_1 = 7 : 6$. Найдите коэффициент трения груза о плоскость гипотенузы. Ответ запишите в десятичной форме, при необходимости округлив до сотых.

Ответ: 0,30.

Пояснение: При медленном затаскивании сумма приложенных к грузу сил должна



равняться нулю. Поэтому сила F должна уравновешивать сумму силы трения скольжения (то есть μN, где N – сила нормальной реакции плоскости) и проекции силы тяжести на плоскость. Как видно из рисунка, с учетом подобия треугольников, для первого опыта $F_1 = \frac{3}{5}mg + \mu\frac{4}{5}mg$. Аналогично для второго $F_2 = \frac{4}{5}mg + \mu\frac{3}{5}mg$.

Поэтому $\frac{F_2}{F_1} = \frac{4+3\mu}{3+4\mu} = \frac{7}{6} \Rightarrow \mu = \frac{3}{10}$.

Вопрос 2 (8 баллов):

В вертикальном цилиндрическом сосуде с теплоизолирующими гладкими стенками под подвижным поршнем находится 40 г воды с температурой 0°С. Вес поршня и внешнее давление подобраны так, чтобы давление под поршнем в точности равнялось 1 Атм. В сосуд вводят 10 г водяного пара с температурой 101°С. Какой будет температура содержимого сосуда после установления теплового равновесия? Удельная теплоемкость воды 4,2 Дж/г, удельная теплоемкость пара в условиях опыта равна примерно 1,85 Дж/г, удельная теплота парообразования для воды 2480 Дж/г. Ответ запишите в градусах Цельсия.

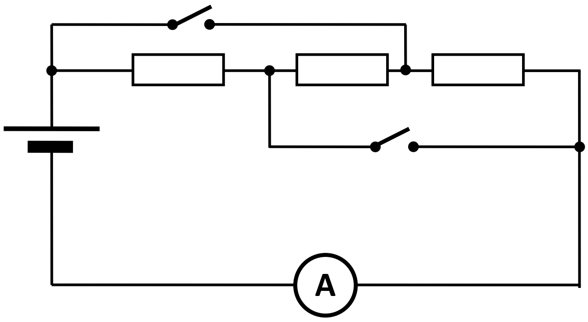
Ответ: 100.

Пояснение: При охлаждении пара до 100°С выделится 1,85×10=18,5 Дж тепла. Прежде чем продолжить остывание, пару нужно сконденсироваться. При полной конденсации пара выделится 2480×10=24800 Дж. Для нагрева жидкой воды до 100°С нужно 4,2×40×100=16800 Дж, то есть очевидно больше, чем выделится только при остывании, и очевидно меньше, чем выделится при остывании и конденсации пара. Это означает, что пар остынет до 100°С, но сконденсируется только частично – настолько, чтобы нагреть воду до равновесной температуры 100°С. Значит, в конечном состоянии мы имеем находящиеся в равновесии воду и пар при температуре 100°С.

Вопрос 3 (9 баллов):

В схеме, показанной на рисунке, сопротивление всех соединительных проводов и контактов ключей пренебрежимо мало. Все три резистора одинаковы. Пока оба ключа были разомкнуты, амперметр показывал силу тока в цепи, равную 1 А. Когда один из ключей замкнули, сила тока возросла до 2 А. Какой станет сила тока, если замкнуть и второй ключ? Считать, что провода и приборы не выйдут из строя. Ответ запишите в Амперах, без указания единиц.

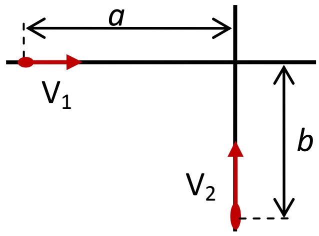
Ответ: 3.



Пояснение: Пока оба ключа были разомкнуты, то ток тек через три последовательно соединенных резистора. Поэтому ток в первом случае $I_1 = \dfrac{\mathrm{E}}{3R+r}$, где мы обозначили: E – ЭДС источника (равную напряжению, которое источник создает на своих клеммах при разомкнутой цепи), r – внутреннее сопротивление источника, а R – сопротивление каждого из резисторов. После замыкания одного из ключей (любого) два резистора оказываются закороченными, и ток течет только через один резистор. Поэтому $I_2 = \dfrac{\mathrm{E}}{R+r} \Rightarrow \dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{3R+r}{R+r} = 2$, и поэтому $r = R$. После замыкания второго ключа оказывается, что ток опять течет через все три резистора, но они оказываются подключены к клеммам источника параллельно. Поэтому $I_3 = \dfrac{\mathrm{E}}{(R/3)+r}$, и мы можем найти, что $\dfrac{I_3}{I_1} = \dfrac{3(3R+r)}{R+3r} = 3$, то есть $I_3 = 3$ А.

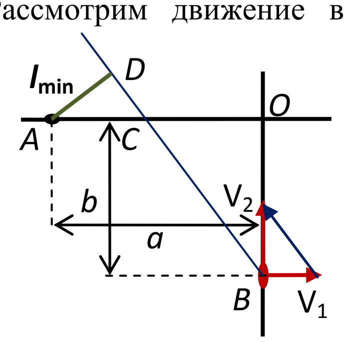
Часть II (творческое задание).

1. (**«Перекресток»**) Два автомобиля подъезжают по разным дорогам к перекрестку (дороги пересекаются под прямым углом – см. рисунок). Скорость «первого» автомобиля $V_1 = 54$ км/час, а второго – $V_2 = 72$ км/час. В тот момент времени, когда первому автомобилю осталось проехать до перекрестка расстояние $a = 400$ м, второму осталось до перекрестка $b = 300$ м. В дальнейшем скорости автомобилей не изменяются. Найдите минимальное расстояние между автомобилями в процессе движения.



Решение:

Так как нас спрашивают только про величину, характеризующую относительное положение автомобилей, то удобная система отсчета – связанная с одним из автомобилей. Рассмотрим движение в СО «автомобиль 1». Отметим характерные точки так, как показано на рисунке.



В этой СО автомобиль 1 покоится, а автомобиль 2 движется с постоянной скоростью $\vec{V}_2' = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$. Построив векторный треугольник скоростей (см. рисунок), мы находим положение линии BD, вдоль которой движется автомобиль 2 в этой системе отсчета. Минимальное расстояние равно длине перпендикуляра AD, опущенного на эту линию. Далее используем подобие треугольников. Треугольник OBC подобен треугольнику скоростей, поэтому $|OC| = \dfrac{V_1}{V_2} b$. Значит, $|AC| = a - \dfrac{V_1}{V_2} b$. Треугольник ACD тоже подобен треугольнику скоростей, поэтому $l_{\min} = |AD| = \dfrac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} |AC| = \dfrac{V_2 a - V_1 b}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$. Подставляя скорости, находим: $l_{\min} = \dfrac{4a - 3b}{5} = 140$ м.

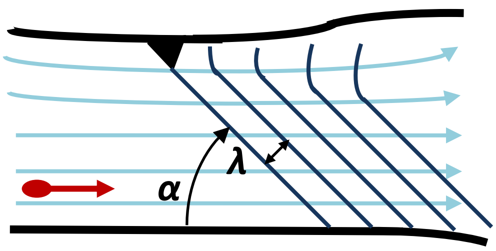
ОТВЕТ: $l_{\min} = \dfrac{V_2 a - V_1 b}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} = \dfrac{4a - 3b}{5} = 140$ м.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс. балл	примечания
Выбрана система отсчета и описано движение обоих автомобилей в этой СО	2	Любая СО!
Построен треугольник скоростей (для СО, связанной с одним из автомобилей) или записана формула для изменяющегося расстояния (СО «земля»)	5	
Найден минимум расстояния (геометрически или формула)	5	
Правильный численный ответ	3	
ВСЕГО	**15**	

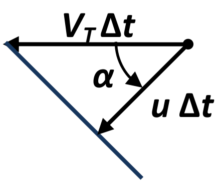
2. («**Стоячие валы**») При изучении русла реки в ходе разведывательных работ исследовательская партия вышла к почти прямолинейному участку ее берега. На противоположной стороне реки находился скальный уступ, в который ударялось течение.

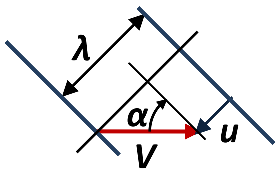
Ниже уступа по течению была видна система «водяных валов», расходящихся от уступа. Гребни валов были почти прямолинейны и ориентированы под углом $\alpha \approx 45°$ к берегу (см. рисунок). Исследователи измерили расстояние между валами $\lambda \approx 3{,}2$ м. В это время их коллега спускался вниз по течению на моторной лодке, двигавшейся со скоростью $V = 8$ м/с относительно воды. Он сообщил, что при прохождении системы валов период ударов лодки о валы равен $T \approx 0{,}4$ с. Какова скорость течения реки на этом участке?



Решение:

Перейдем в систему отсчета, связанную с водой. В этой системе отсчета уступ движется «против течения» со скоростью течения V_T. Он возбуждает волны. Наблюдаемая картина соответствует тому, что V_T больше скорости распространения волн по воде u. В самом деле,





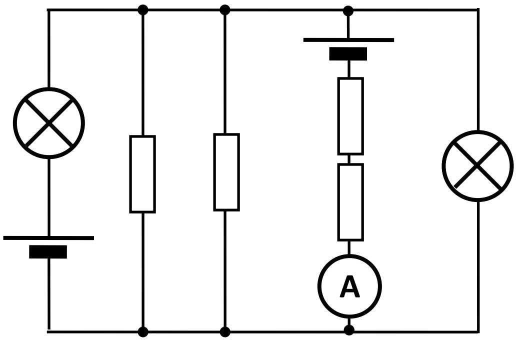
скорость распространения волны направлена перпендикулярно фронту, и за время утес сдвинется на расстояние $V_T \Delta t$, а фронт волны пройдет расстояние $u\Delta t$ (рисунок слева). Значит, угол наклона валов удовлетворяет соотношению $\sin(\alpha) = \frac{u}{V_T}$. С другой стороны, при движении лодки (ее скорость задана именно в рассматриваемой системе отсчета!) интервал времени между «встречами» с валами $T = \frac{\lambda}{V\sin(\alpha) + u}$ (на рисунке справа показано, как происходит сближение лодки и очередного фронта волны – относительно воды они движутся навстречу друг другу под углом). Подставляя сюда выражение $u = V_T \sin(\alpha)$, находим: $V_T = \frac{\lambda}{T\sin(\alpha)} - V \approx 3{,}3$ м/с.

ОТВЕТ: скорость течения $V_T = \frac{\lambda}{T\sin(\alpha)} - V \approx 3{,}3$ м/с.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

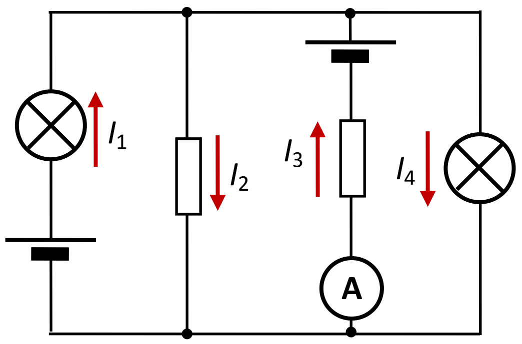
действие	макс. балл	примечания
Объяснен вид картины валов	2	На базе свойств волн
Найдена связь угла наклона валов с соотношением скоростей	5	
Найдена связь T и скоростей	5	
Правильный численный ответ	3	
ВСЕГО	**15**	

3. (**«Баланс света»**) Из четырех одинаковых резисторов, двух одинаковых ламп, двух разных аккумуляторов и амперметра собрали схему, показанную на рисунке. При этом оказалось, что обе лампы светят одинаково: мощность светового излучения каждой из них равна $P = 2{,}5$ Вт. При этом амперметр показывает ток $I = 0{,}6$ А. Известно, что КПД ламп равен $\eta = 40$ %, а сопротивление каждого из резисторов $R = 40$ Ом. Сопротивление амперметра много меньше 1 Ом. Какими станут показания амперметра, если перенести его в ветвь с одним из сопротивлений? Чему равно сопротивление ламп в режиме, в котором они работают в данной схеме?



Решение:

Для простоты расчетов заменим два параллельных резистора на один с сопротивлением $R/2$, а два последовательно соединенных – на один с сопротивлением $2R$. Обозначим общее напряжение на всех «вертикальных» (по рисунку) ветвях символом U и запишем закон Ома для участка цепи с ЭДС для каждой из ветвей:



$$\begin{cases} U = \mathrm{E}_1 - I_1(R_Л + r_1) \\ U = I_2 \dfrac{R}{2} \\ U = \mathrm{E}_2 - I_3(2R + r_2) \\ U = I_4 R_Л \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = \dfrac{\mathrm{E}_1 - U}{R_Л + r_1} \\ I_2 = \dfrac{2U}{R} \\ I_3 = \dfrac{\mathrm{E}_2 - U}{2R + r_2} \\ I_4 = \dfrac{U}{R_Л} \end{cases}$$

(нумерация ветвей и направления токов, выбранные как положительные, показаны на рисунке, $\mathrm{E}_{1,2} > 0$ и $r_{1,2}$ – величины ЭДС и внутренних сопротивлений источников, сопротивлением амперметра пренебрегаем). Нам известно, что обе лампы светят одинаково. Это означает, что протекающий через них ток по величине одинаков. Теоретически возможны два варианта.

Первый: $I_1 = I_4$. С учетом условия непрерывности тока $I_1 + I_3 = I_2 + I_4$ находим, что выполняется также соотношение $I_3 = I_2$. Но $I_3 = I$ – это ток, измеряемый амперметром. Перенос амперметра практически не влияет на токи в схеме, и поэтому после переноса (когда амперметр будет измерять половину тока I_2), его показания уменьшатся вдвое: $I' \approx 0{,}3$ А. Заметим также, что в соответствии с записанными уравнениями $I = I_3 = I_2 = \dfrac{2U}{R} \Rightarrow U = \dfrac{IR}{2}$. Мощность потребления ламп $\dfrac{P}{\eta} = \dfrac{U^2}{R_Л}$, и из этого соотношения находим: $R_Л = \dfrac{\eta U^2}{P} = \dfrac{\eta I^2 R^2}{4P} \approx 23$ Ом. Отметим, что следующие значащие цифры указывать некорректно – мы пренебрегали внутренним сопротивлением амперметра, поэтому у нас есть неучтенные поправки, величина которых около 2%.

Второй: $I_1 = -I_4$. Действуя аналогично, убеждаемся, что этот вариант невозможен: в этом случае $I_3 = I_2 + \dfrac{2U}{R_Л} = \dfrac{2U(R + R_Л)}{R_Л R} \Rightarrow U = \dfrac{I R_Л R}{2(R + R_Л)}$, поэтому $\dfrac{P}{\eta} = \dfrac{I^2 R_Л R^2}{2(R_Л + R)^2}$, и для сопротивления лампы получается квадратное уравнение $R_Л^2 + 2R\left(1 - \dfrac{\eta I^2 R}{4P}\right)R_Л + R^2 = 0$ без вещественных корней.

ОТВЕТ: При переносе амперметра его показания уменьшатся в два раза ($I' \approx 0{,}3$ А), сопротивление ламп в рабочем режиме $R_Л = \dfrac{\eta I^2 R^2}{4P} \approx 23$ Ом.

Примечание 1: Доказательство осуществимости или неосуществимости вариантов можно провести и на базе полной системы уравнений. Для этого нужно выразить ЭДС с учетом требований к токам. Тогда для первого случая $\mathrm{E}_1 = U\left(2 + \dfrac{r_1}{R_Л}\right)$ и $\mathrm{E}_2 = U\left(5 + \dfrac{2r_2}{R}\right)$, а для второго $\mathrm{E}_1 = -\dfrac{r_1}{R_Л}U$ и $\mathrm{E}_2 = U\left(1 + \dfrac{2(R_Л + R)(2R + r_2)}{R_Л R}\right)$. Как видно, в первом случае обе ЭДС могут одновременно удовлетворять требованию $\mathrm{E}_{1,2} > 0$, а во втором – нет.

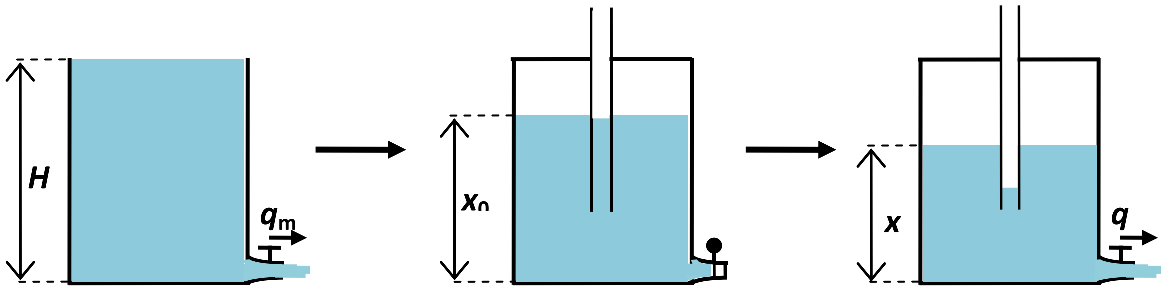
Примечание 2: Важно, что при вычислениях не должны быть использованы неизвестные параметры – такие, как ЭДС и внутренние сопротивления источников. Например, решение, в котором используются явно значения $r_1 = r_2 = 0$, не является полностью корректным.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс. балл	примечания
Записаны исходные соотношения токов и напряжений, необходимые для получения ответа (законы Ома, непрерывность токов, правила Кирхгофа)	3	Может быть и неполная система, если ее достаточно
Учтено условие равенства мощностей свечения ламп	2	
Найдено «новое» значение силы тока	4	
Получено уравнение для сопротивления ламп	4	
Получен правильный ответ для сопротивления	4	
Рассматривается вторая ситуация	1	
Проведен анализ реализуемости обеих ситуаций	2	По 1 баллу за каждую
ВСЕГО	**20**	

Если используется полная система с $r_1 = r_2 = 0$, и правильный ответ получен с использованием этих значений – такое решение оценивается максимум в **16 баллов**.

4. («**Очень большой сифон**») В архивах одной секретной лаборатории был найден отчет о необычном эксперименте. Для него была построена вертикальная колонна высотой $H = 6$ м. Колонна снабжена вентилем небольшого диаметра, расположенным в



самом низу колонны и снабженным очень точным электронным счетчиком расхода воды (*расход воды* – это объем воды, проходящей через вентиль в единицу времени). Если колонну заполнить целиком и открыть вентиль, то расход воды будет максимален и равен некоторой величине q_m. В ходе эксперимента колонну заполняли водой частично при запертом вентиле, закрывали сверху крышкой с тонкостенной трубкой, идущей сквозь крышку внутрь колонны, тщательно герметизировали все стыки (стенок колонны с крышкой и крышки с трубой), а затем открывали вентиль. В архиве сохранилась таблица данных о связи расхода воды (в процентах от q_m) и высоты уровня воды в колонне.

x, …	5,62	5,50	5,00	4,50	4,00	3,50	3,00	2,50	2,00
q/q_m, %	81,6	71,4	57,7	57,8	57,8	57,7	57,7	54,4	48,7

Правда, в таблице не указаны единицы измерения высоты, но в пояснениях сообщается, что погрешность всех данных равна единице последнего указанного разряда. Пользуясь имеющимися данными, ответьте на следующие вопросы:

- На какой высоте над дном колонны находится нижний конец трубы?
- Каков был начальный уровень воды в колонне в этом эксперименте?
- В каких единицах могут быть приведены высоты в таблице?
- При каком атмосферном давлении проводился эксперимент?

Атмосферное давление считайте неизменным и найдите его в мм.рт.ст. (плотность ртути примерно в 13,546 раза больше плотности воды). Все высоты нужно найти в метрах. Для всех найденных величин постарайтесь обеспечить наилучшую возможную точность, и укажите ее. Известно, что в рамках требуемой точности вязкое трение, поверхностное натяжение и сжимаемость воды можно не учитывать.

Решение:

Расход воды связан со скоростью вытекания воды v и площадью поперечного сечения потока через вентиль S соотношением $q = v \cdot S$. Скорость вытекания проще всего определить из уравнения Бернулли: если давление на уровне вентиля (то есть у дна колонны) равно p, а давление снаружи (атмосферное давление) равно p_0, то (сечение колонны много больше сечения вентиля, и скорость движения воды на уровне вентиля в колонне много меньше скорости вытекания) $p \approx p_0 + \frac{\rho v^2}{2} \Rightarrow v \approx \sqrt{\frac{2(p-p_0)}{\rho}}$, где ρ – плотность воды. Значит, $q \approx S\sqrt{\frac{2(p-p_0)}{\rho}}$. При открытой полностью заполненной колонне давление у дна $p \approx p_0 + \rho g H$, и поэтому $q_m \approx S\sqrt{2gH}$. При закрытой колонне в первый момент давление над поверхностью воды равно p_0, и давление у дна $p \approx p_0 + \rho g x_0$, поэтому начальный расход $q_0 \approx S\sqrt{2gx_0}$. Следовательно, $\frac{q_0}{q_m} = \sqrt{\frac{x_0}{H}}$. Согласно таблице, $\frac{q_0}{q_m} = 0{,}816 \pm 0{,}001$. Поэтому $\frac{x_0}{H} \approx 0{,}6659 \pm 0{,}0016$ (в промежуточных результатах для повышения точности расчетов сохраняем «лишний» разряд), и $x_0 = (4{,}00 \pm 0{,}01)$ м. По таблице $x_0 = 5{,}62 \pm 0{,}01$ неизвестных единиц длины, поэтому используемая единица длины равна $0{,}712 \pm 0{,}002$ м. В этот диапазон попадает аршин (1 аршин $\approx 0{,}7112$ м), так что лаборатория скорее всего располагалась в России. По мере вытекания воды давление над поверхностью уменьшается обратно пропорционально объему воздушного промежутка (при неизменной температуре), поэтому давление у дна $p \approx p_0 \frac{H - x_0}{H - x} + \rho g x$, поэтому скорость вытекания и расход воды через вентиль изменяются: $q(x) = q_m \sqrt{\frac{x}{H} - \frac{p_0}{\rho g H}\frac{x_0 - x}{H - x}}$ (как видно из таблицы, расход убывает). Однако при этом уменьшается давление у нижнего конца трубки, и когда оно достигнет p_0, то уровень воды в трубке опустится до ее нижнего конца, и дальше воздух начнет поступать через трубку в колонну, поддерживая давление, равное p_0 на уровне нижнего конца трубки). Поэтому давление у дна будет постоянно и равно $p \approx p_0 + \rho g h$ (где h и – высота нижнего конца трубы над дном колонны). На этом этапе расход должен быть постоянен и равен $\bar{q} = q_m \sqrt{\frac{h}{H}}$. Из таблицы видно, что расход действительно постоянен в пределах точности измерений в диапазоне $3{,}00 \le x \le 5{,}00$.

Усредняя имеющиеся значения, находим: $\frac{q}{q_m} \approx 0{,}5774$, и поэтому $\frac{h}{H} \approx 0{,}3334 \pm 0{,}0011$, что дает для высоты нижнего конца трубы над дном колонны $h = (2{,}000 \pm 0{,}007)$ м. Этот этап прекращается, когда уровень воды достигает нижнего конца трубы. Далее воздух поступает в колонну, поддерживая над поверхностью воды давление p_0, при этом давление у дна $p \approx p_0 + \rho g x$, и поэтому $q(x) = q_m \sqrt{\frac{x}{H}}$ – расход воды уменьшается, как и видно из таблицы. Как видно, атмосферное давление можно найти только по одному из значений расхода – при $x = (5{,}50 \pm 0{,}01)$ аршин $\approx (3{,}912 \pm 0{,}007)$ м. Из формулы для расхода жидкости на этом этапе найдем, что $\frac{p_0}{\rho g} = \frac{H(H-x)}{x_0 - x}\left(\frac{x}{H} - \frac{q^2}{q_m^2}\right)$, что позволяет найти атмосферное давление в мм водяного столба. Ясно, что для перевода в мм.рт.ст. нужно учесть различие плотностей: $\frac{p_0}{\rho_{PT} g} = \frac{\rho}{\rho_{PT}} \frac{H(H-x)}{x_0 - x}\left(\frac{x}{H} - \frac{q^2}{q_m^2}\right)$. Подставляя численные значения находим, что $p_0 = (1500 \pm 300)$ мм.рт.ст. (точность оказывается низкой, так как при вычислении величины $x_0 - x$ возникает очень большая ошибка – это величина около 9 см, и ошибка может быть близка к ней по порядку величины: $x_0 - x = (8{,}8 \pm 1{,}7)$ см! Обнаруживается, что в любом случае давление значительно превышало нормальное атмосферное (760 мм.рт.ст). Можно сделать вывод, что эксперимент проводился в барокамере очень значительных размеров.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс. балл	примечания
Записано выражение для расхода воды при полной колонне	2	
Записан закон Бернулли иди эквивалентные соотношения	3	
Определен начальный уровень воды в метрах	3	Не указана точность или указана очень «неразумно»: **- 1 балл**.
Определены единицы измерения	2	
Получена формула для $q(x)$ до начала поступления воздуха	4	
Обнаружено, что при некоторой высоте воздух начинает поступать в колонну и расход становится постоянным	3	
Определена высота конца трубы над дном колонны	3	Не указана точность или указана очень «неразумно»: **- 1 балл**.
Найдено атмосферное давление	3	
Указана (с отклонение не более чем в 1,5 раза) погрешность нахождения p_0	2	Отклонение не более чем в 2 раза: **1 балл**
ВСЕГО	**25**	

2017/18 учебный год, ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА.

Критерии оценивания:

Для вопросов:

Есть отдельные правильные соображения – **1 балл.**

Ответ в целом правилен, но содержит существенные неточности, или существенно неполон, или отсутствует обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **2 балла.**

Ответ правилен, но присутствуют мелкие неточности, или ответ недостаточно полон, или отсутствует достаточное обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **3 балла.**

Ответ полностью правильный, но недостаточно обоснованный (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **4 балла.**

Правильный, полный и обоснованный ответ – **5 баллов (максимальная оценка).**

Для задач:

Есть отдельные правильные соображения – **1-2 балла.**

Есть часть необходимых для решения соображений, решение не закончено или содержит серьезные ошибки – **3-4 балла.**

Присутствует большая часть необходимых для решения соображений, правильно записана часть необходимых соотношений, решение не закончено или содержит ошибки – **5-7 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны почти все необходимые для решения исходные уравнения, но решение не закончено или содержит ошибки – **8-10 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит ошибки – **11-14 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит одну-две мелкие неточности, не позволившие получить правильный ответ, или правильное решение с недостаточным обоснованием существенных использованных результатов – **15-17 баллов.**

Правильное обоснованное решение с верным аналитическим ответом, но мелкой неточностью при получении численного ответа, либо правильное решение с правильными ответами с недостаточным обоснованием одного из использованных результатов (из числа не ключевых для решения, но необходимых) – **18-19 баллов.**

Полное, правильное, обоснованное решение с правильными ответами – **20 баллов (максимальная оценка).**

МАКСИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЗА РАБОТУ: 100 БАЛЛОВ

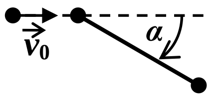
10 и 11 классы: возможные решения

БИЛЕТ № 02 (МОСКВА)

Задание 1.

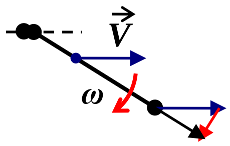
Вопрос: Назовем «линией удара» прямую, вдоль которой направлены силы взаимодействия соударяющихся тел. При каком положении этой линии тела, до удара двигавшиеся поступательно, после удара начнут вращаться?

Задача: Гантель, состоящая из двух массивных маленьких шариков и легкого жесткого стержня длины L, покоилась на гладкой горизонтальной поверхности. В один из ее шариков врезается третий (такой же), скорость которого $\vec{v}_0$ направлена под углом 30° к стержню. Происходит лобовое абсолютно неупругое соударение. Найти угловую скорость вращения «утяжеленной гантели» после удара.



Ответ на вопрос: Для того, чтобы состояние вращения тел изменилось в ходе соударения, момент сил относительно центра масс, приложенных к каждому из тел, должен отличаться от нуля. Для этого достаточно, чтобы «линия удара» не проходила через центры масс тел. Такой удар в физике называют нецентральным.

Решение задачи: Поскольку здесь «линия удара» не проходит через центр масс гантели, то после соударения она начнет вращаться. Из закона сохранения импульса можно определить, что скорость центра масс «утяжеленной гантели» после удара сонаправлена с $\vec{v}_0$, а ее величина $V = \dfrac{1}{3m} m v_0 = \dfrac{v_0}{3}$ (где m – масса каждого из шариков). Рассмотрим движение



гантели после удара как движение центра масс с этой скоростью и вращение вокруг него с угловой скоростью ω. Сила, действующая на «второй» шарик гантели (на тот, по которому не наносит удар налетающий шарик) – это сила упругости жесткого стержня, направленная вдоль стержня. Поэтому его скорость сразу после «мгновенного» удара направлена вдоль стержня и при этом является суммой скорости центра масс и скорости вращения $\vec{v}_2 = \vec{V} + \vec{v}_{\text{вр}}$, которая перпендикулярна радиусу вращения и по величине равна $v_{\text{вр}} = \omega r_2$. Так как после удара на «первом» конце гантели находятся два слипшихся шарика, то расстояние от центра масс «утяжеленной гантели» до второго шарика $r_2 = \dfrac{2}{3} L$. При этом из векторного треугольника скоростей видно, что $\omega r_2 = \omega \dfrac{2}{3} L = V \sin(\alpha) = \dfrac{v_0}{3} \sin(\alpha) \Rightarrow \omega = \dfrac{v_0}{2L} \sin(\alpha)$. При заданном значении угла $\alpha = 30°$ получаем: $\omega = \dfrac{v_0}{4L}$.

ОТВЕТ: $\omega = \dfrac{v_0}{4L}$.

Задание 2.

Вопрос: Чему равна теплоемкость одного моля одноатомного идеального газа в процессе сжатия газа, в котором его давление убывает пропорционально объему? Ответ обосновать.

Задача: Постоянное количество гелия участвует в процессе, в котором его давление сначала остается постоянным, затем возрастает в $n = 2$ раза так, что его объем изменяется пропорционально давлению, а затем снова остается постоянным. Зная, что конечная температура гелия в $k = 1{,}2$ раза больше начальной, и что полное количество теплоты, которым гелий обменялся с окружающими телами в этом процессе, равно нулю, найдите отношение максимального и минимального объема гелия в этом процессе.

Ответ на вопрос: Запишем уравнение процесса 1→2 в виде $p = \alpha V$. Количество теплоты в таком процессе, в соответствии с 1-ым Началом термодинамики, $Q_{12} = A_{12} + \Delta U$. Площадь под диаграммой процесса – площадь трапеции: $A_{12} = \dfrac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) = \dfrac{\alpha}{2}(V_2^2 - V_1^2)$. Изменение внутренней энергии $\Delta U = \dfrac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \dfrac{3\alpha}{2}(V_2^2 - V_1^2)$. Следовательно, $A_{12} = \dfrac{1}{3}\Delta U$, и поэтому $Q_{12} = \dfrac{4}{3}\Delta U$. Для одного моля $\Delta U = \dfrac{3}{2}R\Delta T$. Значит, . $Q_{12} = 2R\Delta T \Rightarrow c = 2R$.

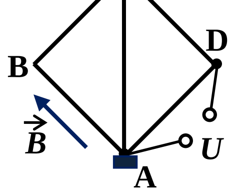
Решение задачи: Заданный процесс 1→2→3→4 состоит из изобары (молярная теплоемкость $c_p = \dfrac{5}{2}R$), процесса с $p = \alpha V$ $(c = 2R)$ и еще одной изобары. Таким образом, температуры состояний удовлетворяют соотношению $\dfrac{5}{2}R(T_2 - T_1) + 2R(T_3 - T_2) + \dfrac{5}{2}R(T_4 - T_3) = 0$. Из этого соотношения следует, что $5T_4 + T_2 - T_3 - 5T_1 = 0$. По условию $T_4 = kT_1$, а в процессе 2→3 давление возрастает в n раз, и во столько же раз возрастает объем, поэтому $T_3 = \dfrac{1}{\nu R}p_3V_3 = n^2\dfrac{1}{\nu R}p_2V_2 = n^2T_2$. Объединяя эти соотношения, найдем, что $T_2 = \dfrac{5(k-1)}{n^2-1}T_1 = \dfrac{1}{3}T_1$. С учетом этого и характера процессов $V_2 = \dfrac{1}{3}V_1$, $V_3 = 2V_2 = \dfrac{2}{3}V_1$ и $V_4 = \dfrac{3}{5}V_1$. Таким образом, $V_{max} = V_1$ и $V_{min} = V_2$. Значит, $\dfrac{V_{max}}{V_{min}} = \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{n^2-1}{5(k-1)} = 3$.

ОТВЕТ: $\dfrac{V_{max}}{V_{min}} = \dfrac{n^2-1}{5(k-1)} = 3$.

Задание 3.

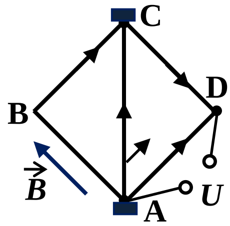
Вопрос: Контур в форме окружности закреплен шарнирно на вертикальной оси и помещен в горизонтальное магнитное поле. Опишите его поведение после появления в нем тока.

Задача: Из медной проволоки изготовлен квадратный контур с перемычкой. Контур подключен к источнику постоянного напряжения $U = 1{,}5$ В между точками A и D и помещен в магнитное поле с индукцией $B = 8$ мТл, причем силовые линии лежат в плоскости контура и параллельны двум его сторонам. Найдите величину и направление силы, действующей на контур со стороны магнитного поля, а также величину и направление момента сил, поворачивающего контур вокруг оси AC. Удельное сопротивление проволоки $\rho = 0{,}018$ мкОм·м, площадь сечения проволоки $S = 1{,}8$ мм^2, длина стороны квадрата $a = 1$ м.



Ответ на вопрос: Суммарная сила Ампера, действующая на контур с током в магнитном поле, уравновешивается силой реакции оси (если поле однородно, то эта сила и вовсе равна нулю). Однако суммарный момент сил относительно оси равен нулю только при одном положении контура – когда плоскость контура перпендикулярна линиям магнитной индукции. Таких положений два, и в одном из них равновесие устойчиво (при малом отклонении момент сил возвращает контур в это положение), а в другом – неустойчиво. Поэтому движение контура – это колебания вокруг устойчивого положения равновесия (при наличии потерь механической энергии – затухающие).

Решение задачи: Сопротивление стороны квадрата $R=\rho\dfrac{a}{S}$, тогда сопротивление участка AC равно $R\sqrt{2}$, а участка ABC – $2R$. Примем, что потенциал A выше потенциала D. Направления токов показаны на рисунке. Величины сил тока обозначим следующим образом: $I_{AD}\equiv I_1$, $I_{AC}\equiv I_2$, $I_{ABC}\equiv I_3$ и $I_{CD}\equiv I_4$. Ясно, что $I_1=\dfrac{U}{R}$, $I_4=I_2+I_3=\dfrac{U}{R+2R/(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{3+\sqrt{2}}\dfrac{U}{R}$.



Далее находим, что $I_2=\dfrac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\dfrac{U}{R}$ и $I_3=\dfrac{1}{3+\sqrt{2}}\dfrac{U}{R}$. Силы Ампера, действующие на участки AB и CD, равны нулю. Силы Ампера, действующие на остальные участки, направлены «на наблюдателя» от плоскости контура. Величины этих сил $F_1=aBI_1=\dfrac{aBU}{R}=\dfrac{BUS}{\rho}$,

$F_2=a\sqrt{2}\,BI_2\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\dfrac{BUS}{\rho}$, $F_3=aBI_3=\dfrac{1}{3+\sqrt{2}}\dfrac{BUS}{\rho}$. Суммарная сила

$$F=F_1+F_2+F_3=\frac{4+2\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\frac{BUS}{\rho}\approx 1{,}9\,\text{Н}.$$

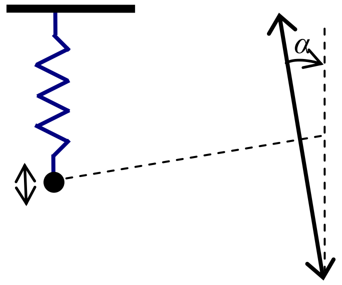
Точками приложения сил F_1 и F_3 можно считать середины участков AD и BC, поэтому они имеют одинаковые плечи по отношению к оси AC, равные $l=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$, а направления создаваемого ими вращения противоположные. Плечо силы F_2 равно нулю. Таким образом, момент сил $M=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}(F_1-F_3)=aBI_3=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2(3+\sqrt{2})}\dfrac{BUSa}{\rho}\approx 0{,}33\,\text{Н·м}$. Этот момент создает направление вращения, при котором точка D движется «на наблюдателя». При изменении полярности напряжения величины силы и моменты остаются прежними, а направления изменяются на противоположные.

ОТВЕТ: $F=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\dfrac{BUS}{\rho}\approx 1{,}9\,\text{Н}$, направление силы при $\varphi_A>\varphi_D$ «на наблюдателя» от плоскости контура, $M=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2(3+\sqrt{2})}\dfrac{BUSa}{\rho}\approx 0{,}33\,\text{Н·м}$, создает направление вращения, при котором точка D движется «на наблюдателя». При изменении полярности напряжения величины силы и моменты остаются прежними, а направления изменяются на противоположные.

Задание 4.

Вопрос: Нить лампочки накаливания длиной l размещена вдоль главной оптической оси тонкой собирающей линзы с $|F|>>l$. Изображение нити имеет 5-кратное увеличение. Каким станет увеличение, если нить повернуть на 90°, не меняя ее положения?

Задача: Маленький груз совершает малые вертикальные гармонические колебания на пружине. Амплитуда колебаний равна x_m. За этими колебаниями наблюдают через тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $F>>x_m$. Линза отклонена от вертикали на «не слишком большой» угол α, а ее главная оптическая ось проходит через положение равновесия груза. Найти амплитуду колебаний изображения груза, если расстояние от точки равновесия груза до линзы $a=\frac{3}{2}F$.



Ответ на вопрос: В первом случае для «дальнего» края нити, находящегося на расстоянии a от линзы, изображение находится на расстоянии b от линзы, которое можно найти по формуле тонкой линзы: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}\Rightarrow b=\frac{aF}{a-F}$. Аналогично для другого края $\frac{1}{a-l}+\frac{1}{b+l'}=\frac{1}{F}\Rightarrow b+l'=\frac{(a=l)F}{a-l-F}$. Следовательно, размер изображения $l'=\frac{F^2}{(a-F)(a-l-F)}l$. С учетом малости l продольное увеличение $\Gamma_\parallel=\frac{F^2}{(F-a)^2}$. После поворота соотношение поперечных размеров изображения и предмета равно соотношению расстояний до линзы: $\Gamma_\perp=\left|\frac{b}{a}\right|=\frac{F}{|F-a|}=\sqrt{\Gamma_\parallel}=\sqrt{5}$.

Примечание: допустим ответ $\pm\sqrt{5}$, имея в виду определение увеличения с учетом знака (то есть ориентации изображения).

Решение задачи: Колебания груза можно представить как наложение колебаний вдоль оптической оси амплитудой $x_m\sin\alpha$ и перпендикулярно оси с амплитудой $x_m\cos\alpha$. В соответствии с результатами ответа на вопрос, продольное увеличение $\Gamma_\parallel=\frac{F^2}{(F-a)^2}=4$, а поперечное увеличение $\Gamma_\perp=\frac{F}{|F-a|}=2$. Поэтому амплитуда колебаний изображения $\tilde{x}_m=\sqrt{(2x_m\cos\alpha)^2+(4x_m\sin\alpha)^2}=2x_m\sqrt{1+3\sin^2\alpha}$.

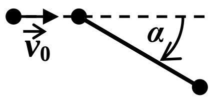
ОТВЕТ: $\tilde{x}_m=2x_m\sqrt{1+3\sin^2\alpha}$.

БИЛЕТ № 06 (УФА)

Задание 1.

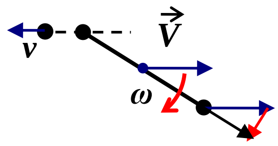
Вопрос: Гантель, состоящая из двух маленьких шариков массы m и легкого жесткого L, стержня длины, движется в плоскости таким образом, что скорость ее центра масс равна V, а угловая скорость ω. Чему равна ее кинетическая энергия?

Задача: Гантель, состоящая из двух массивных маленьких шариков и легкого жесткого стержня длины L, покоилась на гладкой горизонтальной поверхности. В один из ее шариков врезается третий (такой же), скорость которого $\vec{v}_0$ направлена под углом 30° к стержню. Происходит лобовое абсолютно упругое соударение. Найти угловую скорость вращения гантели после удара.



Ответ на вопрос: Кинетическая энергия гантели в этом случае есть сумма энергий поступательного ($\frac{2mV^2}{2}=mV^2$) и вращательного ($2\frac{mV_{вр}^2}{2}=m\left(\omega\frac{L}{2}\right)^2=\frac{m\omega^2L^2}{4}$) движений, то есть $E_K=m\left(V^2+\frac{\omega^2L^2}{4}\right)$.

Решение задачи: Поскольку здесь «линия удара» (линия действия сил взаимодействия шариков во время удара) не проходит через центр масс гантели, то после соударения она начнет вращаться. Запишем закон сохранения импульса в проекции на направление начального движения $mv_0=2mV-mv$ (где m – масса одного шарика). Значит, $v=2V-v_0$. Рассмотрим движение гантели после удара как движение центра масс с этой



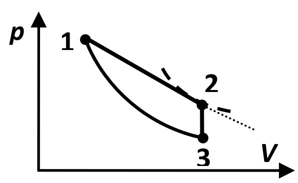
скоростью V и вращение вокруг него с угловой скоростью ω. Сила, действующая на «второй» шарик гантели (на тот, по которому не наносит удар налетающий шарик) – это сила упругости жесткого стержня, направленная вдоль стержня. Поэтому его скорость сразу после «мгновенного» удара направлена вдоль стержня и при этом является суммой скорости центра масс и скорости вращения $\vec{v}_2=\vec{V}+\vec{v}_{вр}$, которая перпендикулярна радиусу вращения и по величине равна $v_{вр}=\omega r_2$. Расстояние от центра масс гантели до второго шарика $r_2=\frac{L}{2}$. При этом из векторного треугольника скоростей видно, что $\omega r_2=\omega\frac{1}{2}L=V\sin(\alpha)\Rightarrow\omega=\frac{2V}{L}\sin(\alpha)=\frac{V}{L}$. Следовательно, закон сохранения энергии записывается в виде $\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+m\left(V^2+\frac{\omega^2L^2}{4}\right)=\frac{m}{2}\left[(2V-v_0)^2+\frac{5}{2}V^2\right]$. Для скорости центра масс гантели получается уравнение $13V^2-8Vv_0=0$, ненулевой корень которого $V=\frac{8}{13}v_0$. Таким образом, $\omega=\frac{8}{13}\frac{v_0}{L}$.

ОТВЕТ: $\omega=\frac{8}{13}\frac{v_0}{L}$.

Задание 2.

Вопрос: Точка К – это точка на $p-V$-диаграмме, описывающая состояние постоянного количества одноатомного идеального газа. Угол наклона изотермы в этой точке к оси V равен α. Каков угол наклона адиабаты в этой же точке к оси V? Ответ обосновать.

Задача: На рисунке показана диаграмма циклического процесса над постоянным количеством гелия, являющимся рабочим телом тепловой машины Цикл состоит из изохоры, адиабаты и процесса с линейной зависимостью давления от объема, в котором объем увеличивается в 2,5 раза. Пунктирная



кривая – участок адиабаты, касающейся диаграммы этого процесса в точке 2. Найти КПД цикла. Уравнение адиабаты для одноатомного идеального газа имеет вид $pV^{5/3} = const$.

Ответ на вопрос: В изотермическом процессе $pV = const$, поэтому $\Delta(pV) = p\Delta V + V\Delta p = 0$, откуда для угла наклона изотермы получим $\frac{\Delta p}{\Delta V}|_K = -\frac{p_K}{V_K} = -\text{tg}(\alpha)$. В адиабатическом процессе $\delta Q = p\Delta V + \frac{3}{2}\Delta(pV) = \frac{5}{2}p\Delta V + \frac{3}{2}V\Delta p = 0$, поэтому угол наклона адиабаты β в точке К определяется из соотношения $\text{tg}(\beta) = -\frac{\Delta p}{\Delta V}|_K = \frac{5}{3}\frac{p_K}{V_K} = \frac{5}{3}\text{tg}(\alpha)$. Значит, $\beta = \text{arctg}\left(\frac{5}{3}\text{tg}(\alpha)\right)$.

Решение задачи: Как видно из диаграммы, на всем участке 1-2 гелий получает тепло, а при изохорном охлаждении – отдает. Поэтому $Q_H = Q_{12}$, а $Q_X = -Q_{23}$. Рассмотрим процесс 1-2. По условию, $V_2 = \frac{5}{2}V_1$. Кроме того, в соответствии с ответом на вопрос:

$$\text{tg}(\beta) = \frac{5}{3}\frac{p_2}{V_2} = \frac{p_1 - p_2}{V_2 - V_1} \Rightarrow \frac{3(p_1 - p_2)}{p_2} = \frac{5(V_2 - V_1)}{V_2} = 3 \Rightarrow p_2 = \frac{p_1}{2}.$$

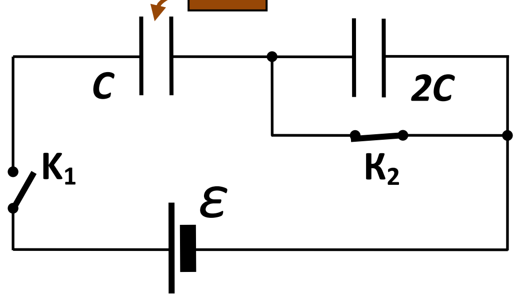
Вычислим $Q_H = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) + \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{3}{2}p_1V_1$. В соответствии с приведенным в условии уравнением адиабаты $p_3V_2^{5/3} = p_1V_1^{5/3} \Rightarrow p_3 = \left(\frac{2}{5}\right)^{5/3} p_1$, следовательно, $Q_X = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_3V_3) = \frac{15}{8}\left[1 - \frac{4}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{2/3}\right]p_1V_1$. Таким образом, КПД цикла $\eta = 1 - \frac{Q_X}{Q_H} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2/3} - \frac{1}{4} \approx 0{,}29$.

ОТВЕТ: $\eta = \left(\frac{2}{5}\right)^{2/3} - \frac{1}{4} \approx 0{,}29$.

Задание 3.

Вопрос: Плоский воздушный конденсатор заряжен и отключен от источника. В него частично вставили диэлектрическую пластинку, толщина которой чуть меньше расстояния между пластинами конденсатора, и отпустили ее, не подталкивая. Что произойдет с пластиной после этого? Трение между пластинкой и пластинами конденсатора очень мало.

Задача: В схеме, показанной на рисунке, конденсаторы изначально разряжены. После замыкания ключа К$_1$ заряд конденсатора с емкостью C стал равен $q = 5$ мкКл. Затем ключ К$_2$ разомкнули, а после этого конденсатор C полностью заполнили диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 3$. Какой заряд после этого будет на конденсаторе емкостью $2C$?



Ответ на вопрос: Так как конденсатор отключен от источника, то его заряд сохраняется. При этом ему энергетически выгодно увеличивать свою емкость (энергия $E=\dfrac{q^2}{2C}$), то есть втягивать в себя пластину. Поэтому пластина будет втягиваться в конденсатор и набирать скорость, проскочит по инерции положение равновесия и продолжит движение далее, но – после того, как она достигнет другого края конденсатора – уже с торможением (теперь емкость убывает, а энергия растет). При наличии потерь энергии (трение, переполяризация диэлектрика, излучение) возникнут медленно затухающие колебания пластины.

Решение задачи: После замыкания ключа К$_1$ конденсатор с емкостью C заряжается до напряжения, равного ЭДС источника, то есть $q=C\mathcal{E}$. После размыкания ключа К$_2$ баланс напряжений не нарушается – напряжение на конденсаторе с емкостью $2C$ (и его заряд) остается равным нулю. В результате заполнения первого конденсатора диэлектриком его емкость увеличивается до $C'=\varepsilon C$, и батарея конденсаторов дозаряжается. Обозначим Δq заряд, перемещенный источником в процессе дозарядки. Тогда новый заряд конденсатора с емкостью εC будет равен $q+\Delta q$, а заряд конденсатора с емкостью $2C$ станет Δq. Условие баланса напряжений: $\dfrac{q+\Delta q}{\varepsilon C}+\dfrac{\Delta q}{2C}=\dfrac{q}{C}\Rightarrow \Delta q=\dfrac{2(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2}q=4\,\text{мкКл}$.

ОТВЕТ: $\Delta q=\dfrac{2(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2}q=4\,\text{мкКл}$.

Задание 4.

Вопрос: Пучок параллельных световых лучей падает на линзу с оптической силой $D_1=+2$ дптр. На каком расстоянии за ней нужно поставить соосно линзу с оптической силой $D_2=-5$ дптр, чтобы из второй линзы лучи пучка вышли параллельно?

Задача: Две тонкие линзы, одна из которых собирающая, а другая – рассеивающая, расположены на общей оптической оси на расстоянии L друг от друга. На той же оси на расстоянии $3L$ от ближней из них расположен точечный источник света. Если ближе к источнику размещена собирающая линза, то изображение источника находится на расстоянии L за рассеивающей линзой. Если, не перемещая источник, переставить линзы, то изображение будет находиться на расстоянии $7L/3$ за собирающей линзой. Найти фокусные расстояния обеих линз.

Ответ на вопрос: После прохождения первой (собирающей) линзы пучок станет сходящимся – лучи будут направлены в точку, лежащей в фокальной плоскости первой линзы. Эта точка будет играть роль точечного источника для второй (рассеивающей) линзы. Пучок выходящей из второй линзы лучей будет параллельным, если эта точка будет находиться в фокальной плоскости и второй линзы тоже. С учетом того, что фокусное расстояние второй линзы по модулю меньше, чем у первой, то расстояние между линзами должно равняться разности величин фокусного расстояния линз: $L=F_1-|F_2|=\dfrac{1}{D_1}-\dfrac{1}{|D_2|}=30\,\text{см}$.

Решение задачи: В качестве первого шага получим общее соотношение, связывающее параметры системы из двух тонких линз, имеющих общую оптическую ось, с расстояниями до источника и изображения. Пусть F_1 и F_2 – фокусные расстояния линз, L – расстояние между ними, $a_{1,2}$ – расстояния до источников от каждой из линз, $b_{1,2}$ – расстояния до изображений. Расстояние от источника до системы есть расстояние до 1-ой линзы.

Изображение, создаваемое 1-ой линзой, находится от нее на расстоянии, определяемом формулой линзы: $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{b_1}=\dfrac{1}{F_1}\Rightarrow b_1=\dfrac{a_1F_1}{a_1-F_1}$. Это изображение является источником для второй линзы: $a_2=L-b_1=L-\dfrac{a_1F_1}{a_1-F_1}=\dfrac{La_1-F_1(L+a_1)}{a_1-F_1}$. Вторично применяя формулу линзы, получим:

$$b_2=\frac{a_2F_2}{a_2-F_2}=\frac{F_2\left[La_1-F_1(L+a_1)\right]}{La_1-F_1(L+a_1)-F_2a_1+F_1F_2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (L+a_1+b_2)F_1F_2-(L+a_1)b_2F_1-(L+b_2)a_1F_2+La_1b_2=0 .$$

Теперь запишем это соотношение для двух ситуаций, описанных в условии задачи, обозначив фокусное расстояние собирающей линзы F_1 (т.е. считаем $F_1>0$ и $F_2<0$):

$$\begin{cases} 5F_1F_2-4LF_1-6LF_2+3L^2=0 \\ \dfrac{19}{3}F_1F_2-10LF_1-\dfrac{28}{3}LF_2+7L^2=0 \end{cases}.$$

Получена система двух уравнений относительно двух неизвестных F_1 и F_2. Она имеет два решения: $F_1=L$, $F_2=-L$ и $F_1=21L/37$, $F_2=3L/13$. Поскольку условию задачи удовлетворяет только первое из них, оно и дает правильный ответ.

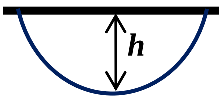
ОТВЕТ: $F_1=L$, $F_2=-L$.

БИЛЕТ № 07 (САРАТОВ)

Задание 1.

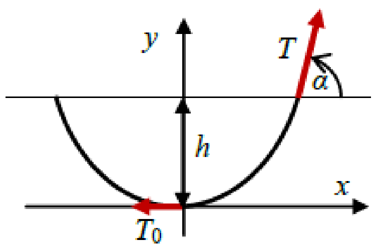
Вопрос: Массивная веревка висит неподвижно в поле тяжести. Рассмотрим силы натяжения веревки, приложенные к концам ее выделенного участка. Чему равна разность горизонтальных и вертикальных проекций этих сил?

Задача: Однородная гибкая веревка длины $L=1$ м и массой $m=320$ г подвешена к горизонтальному потолку таким образом, что глубина «провиса» веревки равна $h=25$ см. Найти минимальную и максимальную величины силы натяжения веревки. Ускорение свободного падения равно $g\approx 10$ м/с^2.



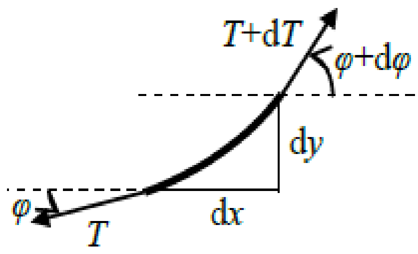
Ответ на вопрос: На выделенный участок веревки действуют только силы приложенные к его концам силы натяжения и сила тяжести, которая направлена вертикально. При этом сумма сил, приложенных к покоящемуся участку, равна нулю. Поэтому разность величин горизонтальных проекций этих сил равна нулю (горизонтальные проекции одинаковы и направлены в разные стороны), а разность величин вертикальных проекций равна весу этого участка.

Решение задачи: Пусть α - угол наклона веревки к горизонтали в точке подвеса. Вес веревки уравновешивается вертикальными составляющими сил натяжения в точках подвеса, то есть $2T\sin\alpha=mg$. Рассмотрев условие равновесия горизонтальных сил, приложенных к «правой» половине веревки, найдем, что $T\cos\alpha=T_0$. Исключая угол α, получим выражение $T=\sqrt{T_0^2+\dfrac{m^2g^2}{4}}$. Теперь рассмотрим равновесие



малого элемента веревки длиной dl,наклоненного под углом φ к горизонту, в проекциях на оси x и y:

$$\begin{cases} (T+dT)(\cos\varphi - \sin\varphi d\varphi) - T\cos\varphi = 0 \\ (T+dT)(\sin\varphi + \cos\varphi d\varphi) - T\sin\varphi - mg\dfrac{dl}{L} = 0 \end{cases}.$$



После сокращения подобных:

$$\left.\begin{cases} dT\cos\varphi - T\sin\varphi d\varphi = 0 \\ dT\sin\varphi + T\cos\varphi d\varphi = mg\dfrac{dl}{L} \end{cases}\right\} \Rightarrow dT = \frac{mg}{L}dl\sin\varphi = \frac{mg}{L}dy.$$

Суммируя малые приращения правой и левой части этого равенства, найдем, что $T - T_0 = \dfrac{h}{L}mg$. Подставив сюда соотношение для T, получаем уравнение для T_0:

$$T_0^2 + \frac{m^2g^2}{4} = \left(T_0 + \frac{h}{L}mg\right)^2 \Rightarrow T_0 = \frac{mg}{8}\left(\frac{L}{h} - 4\frac{h}{L}\right) = 1{,}2\,\text{Н}.$$

Ясно, что это минимальная величина силы натяжения. Максимальная величина – это $T = \dfrac{mg}{8}\left(\dfrac{L}{h} + 4\dfrac{h}{L}\right) = 2\,\text{Н}$.

ОТВЕТ: Минимальная величина силы натяжения у веревки – в нижней точке $T_0 = \dfrac{mg}{8}\left(\dfrac{L}{h} - 4\dfrac{h}{L}\right) = 1{,}2\,\text{Н}$, а максимальная – в точках подвеса $T = \dfrac{mg}{8}\left(\dfrac{L}{h} + 4\dfrac{h}{L}\right) = 2\,\text{Н}$.

Задание 2.

Вопрос: При сжатии одного моля одноатомного идеального газа зависимость его абсолютной температуры от произведенной над ним работы оказалась линейной: $T = T_0 + a\dfrac{A}{R}$ (здесь R – универсальная газовая постоянная). При каких значениях a теплоемкость газа в этом процессе отрицательна?

Задача: Вертикальный цилиндрический теплоизолирующий гладкий сосуд разделен на две части легким горизонтальным поршнем. В нижней части сосуда находится гелий с температурой $t_1 = 15°C$, а верхняя часть вакуумирована, и в ней находится невесомая вертикальная пружина в недеформированном состоянии. Поршень удерживается в этом положении. Затем его отпускают. После установления равновесия оказалось, что объем, занятый гелием, увеличился на 50%. Найти новую температуру гелия.

Ответ на вопрос: Согласно I Началу термодинамики, изменение внутренней энергии газа $\Delta U = Q + A = \dfrac{3}{2}R\Delta T$ (здесь Q – количество теплоты, подведенной к газу). По условию $A = \dfrac{R}{a}(T - T_0) = \dfrac{R}{a}\Delta T$. Следовательно, $Q = \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{a}\right)R\Delta T$. Из этого соотношения находим теплоемкость $c \equiv \dfrac{Q}{\Delta T} = \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{a}\right)R$. Таким образом, $c < 0$ при $0 < a < \dfrac{2}{3}$.

Решение задачи: Пусть количество молей гелия в сосуде равно ν, а его начальный объем равен V. Тогда конечный объем равен $\dfrac{3V}{2}$, и деформация пружины $x = \dfrac{\Delta V}{S} = \dfrac{V}{2S}$ (S –

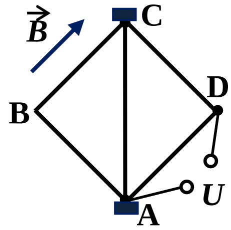
сечение сосуда). В конечном состоянии давление гелия уравновешивается силой упругости пружины $p_2S = kx \Rightarrow \frac{2\nu RT_2}{3V}S = k\frac{V}{2S} \Rightarrow k = \frac{4\nu RT_2}{3V^2}S^2$. В процессе сжатия газом пружины внутренняя энергия газа переходит в энергию деформации пружины: $-\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_2) = \frac{kx^2}{2}$. Подставив сюда полученные выражения для k и x, получим: $\frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_2) = \frac{2\nu RT_2}{3V^2}S^2\frac{V^2}{4S^2} \Rightarrow 9(T_1 - T_2) = T_2$. Следовательно, $T_2 = 0{,}9T_1 \Rightarrow t_2 \approx -14°C$.

ОТВЕТ: $T_2 = 0{,}9T_1 \Rightarrow t_2 \approx -14°C$.

Задание 3.

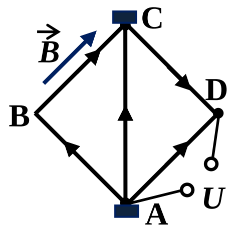
Вопрос: Прямолинейный длинный провод с током и небольшое кольцо с током расположены в одной плоскости. В каком случае они притягиваются за счет магнитного взаимодействия, а в каком – отталкиваются? Ответ обосновать.

Задача: Из медной проволоки изготовлен квадратный контур с перемычкой. Контур подключен к источнику постоянного напряжения $U = 1{,}5$ В между точками A и D и помещен в магнитное поле с индукцией $B = 4$ мТл, причем силовые линии лежат в плоскости контура и параллельны двум его сторонам. Найдите величину и направление силы, действующей на контур со стороны магнитного поля, а также величину и направление момента сил, поворачивающего контур вокруг оси AC. Удельное сопротивление проволоки $\rho = 0{,}018$ мкОм·м, площадь сечения проволоки $S = 3{,}6$ мм^2, длина стороны квадрата $a = 1$ м.



Ответ на вопрос: В соответствии с законом Ампера, сонаправленные токи притягиваются за счет магнитного взаимодействия, а противонаправленные – отталкиваются. Кроме того, сила магнитного взаимодействия токов убывает с увеличением расстояния. Поэтому результирующая сила, с которой прямолинейный ток действует на ток в кольце, будет силой притяжения, если в ближней проводу точке кольца ток сонаправлен с током в проводе, и будет силой отталкивания, если ток в этой точке противонаправлен току в проводе.

Решение задачи: Сопротивление стороны квадрата $R = \rho\frac{a}{S}$, тогда сопротивление участка AC равно $R\sqrt{2}$, а участка ABC – $2R$. Примем, что потенциал A выше потенциала D. Направления токов показаны на рисунке. Величины сил тока обозначим следующим образом: $I_{AD} \equiv I_1$, $I_{AC} \equiv I_2$, $I_{ABC} \equiv I_3$ и $I_{CD} \equiv I_4$. Ясно, что $I_1 = \frac{U}{R}$, $I_4 = I_2 + I_3 = \frac{U}{R + 2R/(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{3+\sqrt{2}}\frac{U}{R}$.



Далее находим, что $I_2 = \frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\frac{U}{R}$ и $I_3 = \frac{1}{3+\sqrt{2}}\frac{U}{R}$. Силы Ампера, действующие на участки BC и AD, равны нулю. Определим силы Ампера, действующие на остальные участки. Сила, действующая на участок AB равна $F_3 = aBI_3 = \frac{1}{3+\sqrt{2}}\frac{aBU}{R} = \frac{1}{3+\sqrt{2}}\frac{BUS}{\rho}$ и направлена «от наблюдателя» перпендикулярно плоскости контура. Для участка AC

$F_2 = a\sqrt{2}\,B I_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} \dfrac{BUS}{\rho}$ при том же направлении, а для CD $F_4 = a\,B\,I_4 = \dfrac{\sqrt{2}+1}{3+\sqrt{2}} \dfrac{BUS}{\rho}$ с направлением «на наблюдателя». Суммарная сила $F = F_3 + F_2 - F_4 = 0$!

Точками приложения сил F_4 и F_3 можно считать середины участков CD и AB, поэтому они имеют одинаковые плечи по отношению к оси AC, равные $l = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$, к тому же направления создаваемого вращения одинаковы. Плечо силы F_2 равно нулю. Таким образом, момент сил $M = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}(F_4 + F_3) = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2(3+\sqrt{2})} \dfrac{BUSa}{\rho} \approx 0{,}33$ Н·м. Этот момент создает направление вращения, при котором точка D движется «на наблюдателя». При изменении полярности напряжения сила остается равной нулю, величина момента остается прежней, а направление изменяется на противоположное.

ОТВЕТ: $F = 0$ Н, при $\varphi_A > \varphi_D$ величина момента сил $M = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2(3+\sqrt{2})} \dfrac{BUSa}{\rho} \approx 0{,}33$ Н·м, и он создает направление вращения, при котором точка D движется «на наблюдателя». При изменении полярности напряжения величина момента остается прежней, а направление изменяется на противоположное.

Задание 4.

Вопрос: В каких случаях тонкая линза формирует уменьшенные изображения предметов?

Задача: Небольшой светящийся объект равномерно движется вдоль оси тонкой линзы с фокусным расстоянием $|F| = 30$ см. В некоторый момент времени величина скорости движения объекта относительно его мнимого уменьшенного изображения оказывается на $n = 12{,}5\%$ больше, чем величина его скорости относительно линзы. Найдите расстояние между объектом и линзой в этот момент времени.

Ответ на вопрос: Увеличение изображения для тонкой линзы определяется соотношением расстояний от линзы до изображения и предмета: $\Gamma_\perp = \left|\dfrac{b}{a}\right|$. Согласно формуле тонкой линзы, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{F} \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{F}{a-F} \Rightarrow \Gamma_\perp = \dfrac{|F|}{|a-F|}$. Следовательно, изображение будет уменьшенным ($\Gamma_\perp < 1$), если $F > 0$ (собирающая линза) и $a > 2F$, а также при $F < 0$ (рассеивающая линза) и любом реальном источнике.

Решение задачи: Для «малого» предмета, находящегося на расстоянии a от линзы, изображение находится на расстоянии b, которое можно найти по формуле тонкой линзы: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{F} \Rightarrow b = \dfrac{aF}{a-F}$. Аналогично для расстояния $a - v\Delta t$ найдем $\dfrac{1}{a - v\Delta t} + \dfrac{1}{b + v'\Delta t} = \dfrac{1}{F} \Rightarrow b + v'\Delta t = \dfrac{(a = v\Delta t)F}{a - v\Delta t - F}$. Следовательно, $v' = \dfrac{F^2}{(a-F)^2} v$. Мнимые уменьшенные изображения создают рассеивающие линзы ($F = -|F|$), то есть $v' = \dfrac{|F|^2}{(a + |F|)^2} v$. При этом объект «догоняет» изображение, и скорость движения объекта относительно его мнимого уменьшенного изображения $u = v - v' = \dfrac{a(2|F|+a)}{(a+|F|)^2}v$. По условию $\dfrac{u}{v'} = \dfrac{a(2|F|+a)}{|F|^2} = 1+n$, поэтому $\left(\dfrac{a}{|F|}\right)^2 + 2\dfrac{a}{|F|} - 1 - n = 0 \Rightarrow a = |F|(-1+\sqrt{2+n})$ (выбран положительный корень). Итак, $a = |F|\left(\sqrt{\dfrac{17}{8}} - 1\right) \approx 13{,}7$ см.

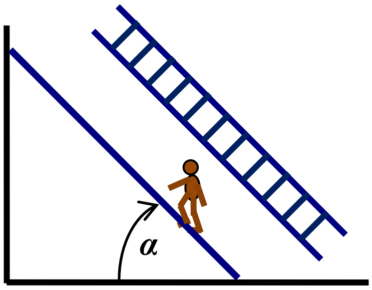
ОТВЕТ: $a = |F|(-1+\sqrt{2+n}) \approx 13{,}7$ см.

БИЛЕТ № 08 (КЕМЕРОВО)

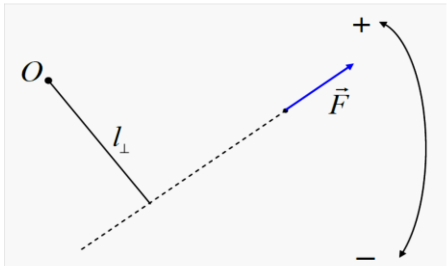
Задание 1.

Вопрос: Сформулируйте условия равновесия твердого тела. Что такое «момент силы»?

Задача: У лестницы 11 одинаковых ступеней, распределенных равномерно: расстояние от нижнего конца до нижней ступени, расстояния между соседними ступенями и расстояние от верхней ступени до верхнего конца одинаковы. Ее поставили в угол, образованный стеной и полом. Коэффициент трения между стеной и лестницей $\mu = 0{,}25$, а коэффициент трения между лестницей и полом $2\mu = 0{,}5$. Человек с массой, равной удвоенной массе лестницы, поднимается по ступеням. Когда он перенес весь свой вес на девятую ступень, лестница, немного постояв, начала скользить. Чему равнялся угол между лестницей и полом?



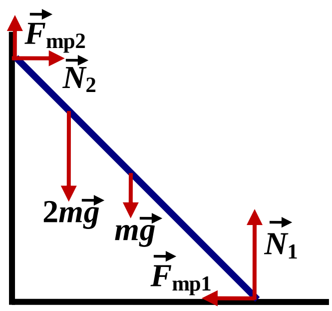
Ответ на вопрос: Необходимыми условиями нахождения твердого тела в равновесии являются: (1) равенство нулю векторной сумм внешних сил, приложенных к телу; (2) равенство нулю алгебраической суммы моментов внешних сил, приложенных к телу. Во втором условии используются определения:



Плечо силы $l_\perp$ – расстояние от оси вращения до линии действия силы.

Момент силы – произведение величины силы на ее плечо, взятое со знаком + (-), если сила вращает тело вокруг оси в положительном (отрицательном) направлении: $M = \pm|\vec{F}| \cdot l_\perp$

Решение задачи: Искомый угол α - в точности «критический» угол наклона, при котором силы трения, удерживающие лестницу от проскальзывания, еще обеспечивают равновесие (лестница «немного постояла»), но уже достигли своих максимальных значений. Пусть масса лестницы равна m, а масса человека – $2m$. Укажем на рисунке силы, действующие на лестницу в «критическом» положении (человек на 9-й ступени).



Запишем условие равновесия сил в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси и найдем $N_{1,2}$:

$$\begin{cases} N_1 + \mu N_2 = 3mg \\ N_2 - 2\mu N_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = \dfrac{3mg}{1+2\mu^2} \\ N_2 = \dfrac{6\mu mg}{1+2\mu^2} \end{cases}$$

Теперь запишем условие моментов относительно нижнего конца лестницы (учитывая, что точка приложения веса человека находится на расстоянии $\frac{3L}{4}$ от него, где L – длина лестницы): $mg\frac{L}{2}\cos(\alpha)+2mg\frac{3L}{4}\cos(\alpha)-N_2L[\sin(\alpha)+\mu\cos(\alpha)]=0$. Из этого уравнения находим, что $\mathrm{tg}(\alpha)+\mu=\frac{2mg}{N_2}\Rightarrow\mathrm{tg}(\alpha)=\frac{1-\mu^2}{3\mu}=\frac{5}{4}$. Итак, $\alpha=\mathrm{arctg}\left(\frac{1-\mu^2}{3\mu}\right)=\mathrm{arctg}\left(\frac{5}{4}\right)$.

ОТВЕТ: $\alpha=\mathrm{arctg}\left(\frac{1-\mu^2}{3\mu}\right)=\mathrm{arctg}\left(\frac{5}{4}\right)$.

Задание 2.

Вопрос: При расширении одного моля одноатомного идеального газа зависимость его абсолютной температуры от произведенной им работы оказалась линейной: $T=T_0-b\frac{A}{R}$ (здесь R – универсальная газовая постоянная). При каких значениях b теплоемкость газа в этом процессе отрицательна?

Задача: Вертикальный цилиндрический теплоизолирующий гладкий сосуд разделен на две части массивным горизонтальным поршнем. В нижней части сосуда находится гелий под давлением $p_1=100$ кПа, а верхняя часть вакуумирована. Поршень удерживается в этом положении. Затем его отпускают. После установления равновесия оказалось, что объем, занятый гелием, увеличился на 40%. Найти давление гелия в этом состоянии равновесия.

Ответ на вопрос: Согласно I Началу термодинамики, изменение внутренней энергии газа $\Delta U=Q-A=\frac{3}{2}R\Delta T$ (здесь Q – количество теплоты, подведенной к газу). По условию $A=-\frac{R}{b}(T-T_0)=-\frac{R}{b}\Delta T$. Следовательно, $Q=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{b}\right)R\Delta T$. Из этого соотношения находим теплоемкость $c\equiv\frac{Q}{\Delta T}=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{b}\right)R$. Таким образом, $c<0$ при $0<b<\frac{2}{3}$.

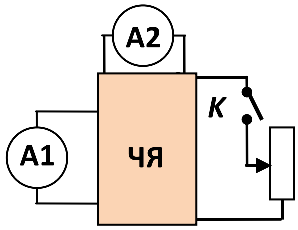
Решение задачи: Пусть количество молей гелия в сосуде равно ν, а его начальный объем равен V. Тогда конечный объем равен $\frac{7V}{5}$, и высота подъема поршня $x=\frac{\Delta V}{S}=\frac{2V}{5S}$ (S – сечение сосуда). В конечном состоянии давление гелия уравновешивается весом поршня $p_2S=mg\Rightarrow\frac{5\nu RT_2}{7V}S=mg$. В процессе сжатия газом пружины внутренняя энергия газа переходит в энергию поршня в поле тяжести: $-\Delta U=\frac{3}{2}\nu R(T_1-T_2)=mgx$. Подставив сюда полученные выражения для mg и x, получим: $\frac{3}{2}\nu R(T_1-T_2)=\frac{5\nu RT_2}{7V}S\frac{2V}{5S}\Rightarrow 21(T_1-T_2)=4T_2$. Следовательно, $T_2=\frac{21}{25}T_1$. Согласно объединенному газовому закону, отношение давлений $\frac{p_2}{p_1}=\frac{T_2}{T_1}\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{5}$, и $p_2=\frac{3}{5}p_1=60$ кПа.

ОТВЕТ: $p_2 = \frac{3}{5} p_1 = 60$ кПа.

Задание 3.

Вопрос: 50 аккумуляторов с одинаковыми ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренними сопротивлениями r соединены последовательно в замкнутую цепь. Вольтметр подключен к участку, содержащему 20 аккумуляторов. Каковы его показания? Ответ объяснить.

Задача: В «Черном Ящике» находится схема, составленная из резисторов и источников постоянного тока. У «ЧЯ» есть шесть выводов. К двум парам выводов подключены амперметры, а к двум оставшимся – ветвь, содержащая ключ и реостат. При разомкнутом ключе показания амперметра А1 равны 1А, а амперметра А2 – 5А. После замыкания ключа А1 стал показывать силу тока 2А, а А2 – силу тока 4А. Движок реостата передвинули. После этого показания А2 стали равны 2,4 А. Какой ток при этом течет через А1?



Ответ на вопрос: Ток в такой замкнутой цепи $I = \frac{50\mathcal{E}}{50r} = \frac{\mathcal{E}}{r}$. Поэтому напряжение на каждом из аккумуляторов $U_1 = \mathcal{E} - Ir = 0$. Значит, равно нулю и напряжение на любом участке цепи, и показания вольтметра также должны быть нулевыми.

Решение задачи: Поскольку схема в «Черном Ящике» содержит только линейные элементы (резисторы и источники), то токи в ветвях являются решениями линейной системы уравнений, и поэтому являются линейными функциями ЭДС и обратных сопротивлений элементов схемы. При изменении сопротивления одной из ветвей (при неизменных значениях остальных параметров) токи во всех ветвях оказываются линейным функциями обратного сопротивления этой ветви, и поэтому между самими токами тоже должно быть линейное соотношении. Значит, существуют такие постоянные коэффициенты (обозначим их A и B), что при любом изменении сопротивления ветви с реостатом показания амперметров связаны соотношением $I_1 = A + B \cdot I_2$. Используя известные значения токов, находим:

$$\left.\begin{cases} 1\text{А} = A + B \cdot 5\text{А} \\ 2\text{А} = A + B \cdot 4\text{А} \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} A = 6\text{А} \\ B = -1 \end{cases}\right\} \Rightarrow I_1 = 6\text{А} - I_2 .$$

Таким образом, при $I_2 = 2{,}4$ А через А1 течет ток $I_1 = 3{,}6$ А.

ОТВЕТ: $I_1 = 6\text{А} - I_2 = 3{,}6$ А.

Задание 4.

Вопрос: Пучок параллельных световых лучей падает на линзу с оптической силой $D_1 = -10$ дптр. На каком расстоянии за ней нужно поставить соосно линзу с оптической силой $D_2 = +2{,}5$ дптр, чтобы из второй линзы лучи пучка вышли параллельно?

Задача: Две тонкие линзы расположены на общей оптической оси на расстоянии L друг от друга. На той же оси на таком же расстоянии L от одной из них расположен точечный источник света. Если ближе к источнику размещена линза с большей оптической силой, то изображение источника находится на расстоянии $2L$ за дальней линзой. Если, не перемещая источник, переставить линзы, то изображение будет находиться на расстоянии $3L/2$ за дальней линзой. Найти фокусные расстояния обеих линз.

Ответ на вопрос: После прохождения первой (рассеивающей) линзы пучок станет расходящимся – продолжения лучей будут пересекаться в точке, лежащей в фокальной

плоскости первой линзы. Эта точка будет играть роль точечного источника для второй (собирающей) линзы. Пучок выходящей из второй линзы лучей будет параллельным, если эта точка будет находиться в фокальной плоскости и второй линзы тоже. Поэтому расстояние между линзами должно равняться разности величин фокусного расстояния линз:
$L = F_2 - |F_1| = \dfrac{1}{D_2} - \dfrac{1}{|D_1|} = 30$ см.

Решение задачи: В качестве первого шага получим общее соотношение, связывающее параметры системы из двух тонких линз, имеющих общую оптическую ось, с расстояниями до источника и изображения. Пусть F_1 и F_2 – фокусные расстояния линз, L – расстояние между ними, $a_{1,2}$ – расстояния до источников от каждой из линз, $b_{1,2}$ – расстояния до изображений. Расстояние от источника до системы есть расстояние до 1-ой линзы. Изображение, создаваемое 1-ой линзой, находится от нее на расстоянии, определяемом формулой линзы: $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{b_1} = \dfrac{1}{F_1} \Rightarrow b_1 = \dfrac{a_1 F_1}{a_1 - F_1}$. Это изображение является источником для второй линзы: $a_2 = L - b_1 = L - \dfrac{a_1 F_1}{a_1 - F_1} = \dfrac{La_1 - F_1(L + a_1)}{a_1 - F_1}$. Вторично применяя формулу линзы, получим:

$$b_2 = \frac{a_2 F_2}{a_2 - F_2} = \frac{F_2\left[L a_1 - F_1(L + a_1)\right]}{L a_1 - F_1(L + a_1) - F_2 a_1 + F_1 F_2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (L + a_1 + b_2) F_1 F_2 - (L + a_1) b_2 F_1 - (L + b_2) a_1 F_2 + L a_1 b_2 = 0.$$

Теперь запишем это соотношение для двух ситуаций, описанных в условии задачи, обозначив фокусное расстояние линзы с большей оптической силой F_1 (т.е. считаем $F_1 < F_2$):

$$\begin{cases} 4F_1 F_2 - 4L F_1 - 3L F_2 + 2L^2 = 0 \\ \dfrac{7}{2} F_1 F_2 - \dfrac{5}{2} L F_1 - 3L F_2 + \dfrac{3}{2} L^2 = 0 \end{cases}.$$

Получена система двух уравнений относительно двух неизвестных F_1 и F_2. Она имеет два решения: $F_1 = L$, $F_2 = 2L$ и $F_1 = 3L/8$, $F_2 = L/3$. Поскольку условию задачи удовлетворяет только первое из них, оно и дает правильный ответ.

ОТВЕТ: $F_1 = L$, $F_2 = 2L$.

7, 8 и 9 классы: возможные решения

БИЛЕТ № 14 (ЖЕЛЕЗНОВОДСК)

Задание 1.

Вопрос: Два шарика одинаковой массы, летевшие навстречу друг другу вдоль одной прямой со скоростями 1 м/с и 2м/с, столкнулись. Произошел абсолютно упругий удар. Какими стали скорости шаров?

Задача: Снаряд массы $m = 6$ кг, летевший вертикально, взорвался в верхней точке траектории. При этом образовались два осколка, полетевшие поступательно. Известно, что в результате взрыва суммарная кинетическая энергия осколков увеличилась на $W = 480$ кДж, а масса образовавшихся пороховых газов пренебрежимо мала. Относительная скорость разлета осколков сразу после взрыва оказалась на 25% больше минимально возможной. Найдите эту скорость. Каким было отношение масс осколков?

Ответ на вопрос: При абсолютно упругом ударе сохраняются импульс и энергия. Так как массы тел одинаковы, то это означает, что сумма проекций скоростей тел на линию движения и сумма их квадратов остаются неизменными. Поскольку при лобовом ударе шаров скорости не могут остаться прежними, то, как нетрудно догадаться, должен произойти «обмен скоростями»: в результате удара каждый шарик разворачивается, и после удара движется в точности со скоростью другого до удара. Итак, шарики поменяют направление движения, и при этом тот шарик, что двигался со скоростью 1 м/с, будет двигаться со скоростью 2 м/с, и наоборот.

Решение задачи: В верхней точке траектории снаряд, летевший вертикально, останавливается. Поэтому скорость снаряда перед взрывом равна нулю. Поэтому, по закону сохранения импульса, сумма импульсов осколков сразу после взрыва равна нулю. Это означает, что они полетели вдоль одной прямой. Обозначим отношение масс осколков $m_1 : m_2 \equiv z$, причем будем считать «первым» более тяжелый осколок (то есть $z \geq 1$). Из условия задачи следует, что $m_1 + m_2 = m$, и поэтому $m_1 = \frac{z}{z+1}m$ и $m_2 = \frac{1}{z+1}m$. Запишем законы сохранения импульса и энергии в процессе взрыва как уравнения для величин скоростей:

$$\begin{cases} \dfrac{z}{z+1}mv_1 = \dfrac{1}{z+1}mv_2 \\ W = \dfrac{z}{z+1}\dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{1}{z+1}\dfrac{mv_2^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{z}}\sqrt{\dfrac{2W}{m}} \\ v_2 = \sqrt{z}\sqrt{\dfrac{2W}{m}} \end{cases} \Rightarrow v_{отн} = v_1 + v_2 = \left(\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)\sqrt{\frac{2W}{m}}.$$

Как видно, величина относительной скорости осколков при заданных W и m зависит только от отношения масс осколков. Поэтому ясно, что «минимальное» значение этой величины нужно выбирать как минимум при всевозможных изменениях z. Минимальное возможное значение величины $\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}}$ достигается при $z = 1$ и равно 2. Поэтому, согласно условию, $v_{отн} = \frac{5}{4}v_{\min} = \frac{5}{4}2\sqrt{\frac{2W}{m}} = 5\sqrt{\frac{W}{2m}} = 1000$ м/с. Кроме того, ясно, что $\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{5}{2}$. Решая это уравнение относительно $\sqrt{z}$, находим: $\sqrt{z} = 2 \Rightarrow z = 4$.

ОТВЕТ: $v_{отн} = 5\sqrt{\frac{W}{2m}} = 1000$ м/с, $\frac{m_1}{m_2} = 4$.

Задание 2.

Вопрос: В сосуде под поршнем находится насыщенный водяной пар, который сжимают, поддерживая температуру неизменной. Что при этом происходит с давлением пара? Ответ обосновать.

Задача: В теплоизолирующем цилиндрическом сосуде под скользящем без трения поршнем находились в равновесии $m_1 = 200$ г льда и $m_2 = 800$ г воды при нормальном атмосферном давлении. В него закачивают насыщенный водяной пар под таким же давлением. Какую массу пара нужно закачать, чтобы температура содержимого увеличилась до $t = 50°C$? Удельная теплота плавления льда $\lambda \approx 340$ кДж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/кг·К, удельная теплота парообразования воды $r = 2480$ кДж/кг.

Ответ на вопрос: Насыщенный пар – это пар, находящийся в равновесии с жидкостью. Плотность и давление такого пара зависят только от температуры, поэтому при неизменной температуре и давление насыщенного пара остается неизменным, несмотря на сжатие. В ходе сжатия количество пара (его масса) уменьшается пропорционально объему – происходит конденсация пара с образованием жидкой воды.

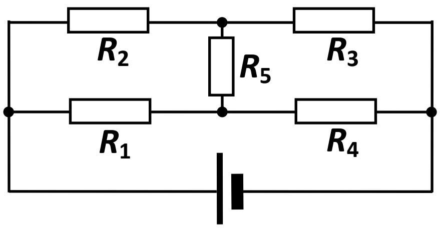
Решение задачи: Поскольку в начальном состоянии вода и лед находились в равновесии при нормальном атмосферном давлении, то начальная температура содержимого сосуда равнялась $t_0 = 0°C$. Температура насыщенного пара, давление которого равно нормальному атмосферному, равна температуре кипения воды при таком давлении, то есть $t_1 = 100°C$. При попадании в сосуд с боле низкой температурой пар сразу начинает конденсироваться, и за счет теплоты конденсации и теплоты остывания образовавшейся воды тает лед и нагревается холодная вода. Значит, необходимая масса пара должна обеспечить таяние всего льда и нагрев всей воды (и той, что была изначально, и образовавшейся в результате таяния льда) от $t_0 = 0°C$ до $t = 50°C$. Составим уравнение теплового баланса: $m \cdot r + m \cdot c(t_1 - t) = \lambda \cdot m_1 + (m_1 + m_2)c(t - t_0)$ и выразим из него массу пара: $m = \dfrac{\lambda \cdot m_1 + (m_1 + m_2)c(t - t_0)}{r + c(t_1 - t)} \approx 88$г.

ОТВЕТ: $m = \dfrac{\lambda \cdot m_1 + (m_1 + m_2)c(t - t_0)}{r + c(t_1 - t)} \approx 88$г.

Задание 3.

Вопрос: У двух последовательно соединенных резисторов $R_2 / R_1 = 4$. Во сколько раз отличаются мощности тепловых потерь в этих резисторах?

Задача: В схеме, показанной на рисунке, сопротивления двух резисторов одинаковы $R_2 = R_4 \equiv R$, а у остальных – отличаются: $R_1 = 7R$, $R_3 = 3R$, а $R_5 = 5R$. Во сколько раз мощность тепловых потерь в резисторе R_3 больше, чем в резисторе R_1?



Ответ на вопрос: Ток в последовательно соединенных резисторах одинаков. Согласно закону Джоуля-Ленца, мощность тепловых потерь в резисторе $P = I^2 R$. Поэтому отношение этих мощностей для двух последовательно соединенных резисторов равно отношению их сопротивлений, то есть $P_2 / P_1 = 4$.

Решение задачи: Занумеруем токи, текущие в каждом из резисторов, теми же номерами, что и резисторы: I_1, I_2 и т.д. Напряжение, создаваемое источником на концах участка с сопротивлениями, можно записать двумя способами: $U = RI_2 + 3RI_3 = 7RI_1 + RI_4$. Из этого соотношения находим, что $I_2 + 3I_3 = 7I_1 + I_4$. Также двумя способами можно вычислить и ток в ветви с источником: $I = I_1 + I_2 = I_3 + I_4$. Вычтем почленно это равенство из предыдущего, и получим уравнение связи I_3 и I_1: как видно, $3I_3 - I_1 = 7I_1 - I_3 \Rightarrow I_3 = 2I_1$.

Следовательно, $\dfrac{P_3}{P_1} = \dfrac{I_3^2 R_3}{I_1^2 R_1} = \dfrac{4 \cdot 3}{7} = \dfrac{12}{7}$. Итак, P_3 больше P_1 в $\dfrac{12}{7}$ раза.

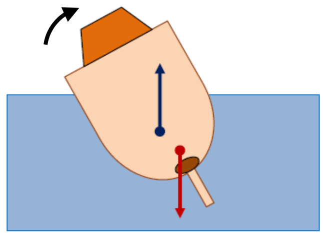
ОТВЕТ: P_3 больше P_1 в $\frac{12}{7}$ раза.

Задание 4.

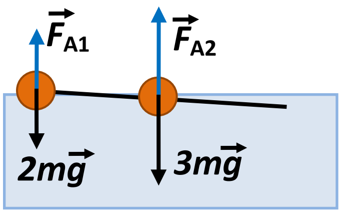
Вопрос: При каких условиях тело может устойчиво плавать на поверхности воды? Ответ объяснить.

Задача: На тонком металлическом стержне закреплены два деревянных шарика, масса каждого из которых в $k = 2$ раза больше массы стержня. Центр первого шара совпадает с серединой стержня, а центр второго – с одном из концов стержня. Эту конструкцию поместили в воду. Для обоих шаров найдите отношение объема погруженной части к объему шара (в процентах). Плотность дерева в $n = 2{,}5$ раза меньше плотности воды.

Ответ на вопрос: Для плавания необходимо, чтобы сила Архимеда уравновешивала силу тяжести даже при неполном погружении тела. Таким образом, первое требование состоит в том, что средняя плотность тела должна быть меньше плотности воды. Но не всегда плавание тела устойчиво – в некоторых положениях при малых отклонениях от положения равновесия возникающие некомпенсированные силы могут еще больше уводить тело от этого положения. Значит, для устойчивого плавания в одном положении необходимо также выполнение второго требования: момент пары сил (силы тяжести и силы Архимеда) при малом отклонении тела от положения равновесия должен возвращать тело обратно в это положение. Этому требованию можно придать и другую форму: как видно из рисунка, оно означает, что точка приложения силы тяжести для плавающего тела (то есть его центр масс) должен находиться ниже точки приложения силы Архимеда (эту точку часто называют центром плавучести).



Решение задачи: Обозначим искомые величины x (доля объема погруженной части для «крайнего» шара) и y (для «среднего» шара). Пусть масса стержня равна m (это значит, что массы шаров равны $km = \rho \cdot V$, где ρ – плотность дерева, а V – объем одного шара). Сумма сил Архимеда, действующих на шары, должна уравновешивать вес всех тел: $n\rho(xV + yV)g = (2k+1)mg = \frac{2k+1}{k}\rho V$. Из этого соотношения определяем, что $x + y = \frac{2k+1}{kn} = 1$. Кроме того, должна равняться нулю сумма моментов сил, приложенных к стержню. Как видно из рисунка, это возможно только в том случае, когда отношение сил Архимеда равно отношению сил тяжести, с которыми у них совпадает точка приложения: $\frac{n\rho \cdot xVg}{n\rho \cdot yVg} = \frac{kmg}{(k+1)mg}$, откуда $\frac{x}{y} = \frac{k}{k+1} = \frac{2}{3}$.



Решая полученную систему уравнений, находим: $x = \frac{1}{n} = 0{,}4 = 40\%$ и $y = \frac{k+1}{kn} = 0{,}6 = 60\%$.

ОТВЕТ: для крайнего шара $x = \frac{1}{n} = 40\%$, а для среднего $y = \frac{k+1}{kn} = 60\%$.

БИЛЕТ № 15 (МОСКВА)

Задание 1.

Вопрос: Два тела одинаковой массы летели во взаимно-перпендикулярных направлениях с одинаковой по модулю скоростью. Произошло абсолютно неупругое столкновение. Какая часть кинетической энергии перешла в тепло?

Задача: Снаряд, летевший со скоростью $V = 300$ м/с, разорвался на три осколка. Два осколка имели одинаковые массы $m = 2$ кг каждый, и они полетели с одинаковой по модулю скоростью. Масса третьего осколка была в два раза больше, и он полетел вдоль линии движения снаряда до взрыва. Известно, что в результате взрыва суммарная кинетическая энергия осколков увеличилась на $W = 810$ кДж. Движение всех осколков поступательное, а масса пороховых газов пренебрежимо мала. Найдите максимально возможную величину скорости третьего осколка при таких условиях.

Ответ на вопрос: При неупругом ударе сохраняется импульс – проекции импульса образовавшегося тела удвоенной массы ($2m$) на взаимно-перпендикулярные направления движения тел до удара равны импульсам тел (mv). Поэтому проекции скорости этого тела равны $\frac{v}{2}$, а модуль скорости $v' = \sqrt{\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}v$. Выделившееся тепло равно убыли кинетической энергии: $Q = E_0 - E' = 2\frac{mv^2}{2} - \frac{2m(v/\sqrt{2})^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = 0{,}5 \cdot E_0$. Таким образом, в тепло перешло 50% начальной кинетической энергии.

Решение задачи: Из условия задачи следует, что масса снаряда равнялась $4m$, и поэтому закон сохранения импульса для процесса взрыва можно записать как $4m\vec{V} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + 2m\vec{v}_3$ (здесь $\vec{v}_{1,2,3}$ – скорости осколков, причем $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| \equiv v$). Закон сохранения энергии дает: $\frac{4mV^2}{2} + W = 2\frac{mv^2}{2} + \frac{2mv_3^2}{2}$. Как видно, возможность передать третьему осколку как можно большую долю начальной энергии ограничивается требованиями закона сохранения импульса (например, с точки зрения одного закона сохранении энергии можно подумать – как сделали некоторые участники – что максимум v_3 достигается при $v = 0$; однако легко убедиться, что при таком значении v закон сохранения импульса не может быть выполнен). Поэтому для достижения максимума v_3 необходимо обеспечить передачу ему как можно большего импульса. Это достигается, если 3-й осколок полетит в направлении движения снаряда до взрыва, а 1-й и 2-й – в противоположном направлении. В этом случае из закона сохранения импульса в проекции на линию движения снаряда $4mV = -2mv + 2mv_3$ находим, что $v = v_3 - 2V$. Значит, с учетом уравнения закона сохранения энергии $V^2 + \frac{W}{2m} = \frac{(v_3 - 2V)^2}{2} + \frac{v_3^2}{2} = v_3^2 - 2Vv_3 + 2V^2 \Rightarrow (v_3 - V)^2 = \frac{W}{2m}$. Выбирая наибольший корень этого уравнения, получаем: $(v_3)_{\max} = V + \sqrt{\frac{W}{2m}} = 750$ м/с.

ОТВЕТ: $(v_3)_{\max} = V + \sqrt{\frac{W}{2m}} = 750$ м/с.

Возможный вариант решения: рассмотреть процесс взрыва в системе отсчета, связанной со снарядом перед взрывом.

Задание 2.

Вопрос: Каким образом можно добиться, чтобы вода оставалась жидкой при температуре – 5°C? Предложите один вариант, объяснив его.

Задача: В трехлитровую банку массой $m = 250$ г набросали доверху мокрого снега, не утрамбовывая его. Оказалось, что масса банки со снегом равна $M = 2550$ г. Если снег плотно утрамбовать, его объем станет равен $V = 2{,}5$ л. Какое количество теплоты нужно сообщить снегу, чтобы он полностью растаял? Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3; плотность ледяных кристаллов, из которых состоит сухой снег, $\rho = 0{,}9$ г/см^3, удельная теплота плавления льда $\lambda \approx 340$ Дж/г.

Ответ на вопрос: Таких вариантов достаточно много (допустим любой), но самый естественный – добавить в воду «антифриз» (например, поваренную соль). Молекулы соли, проникая между молекулами воды, изменяют их взаимодействие и препятствуют кристаллизации. Другой вариант – изолировать чистую воду от внешних воздействий, исключив образование «центров кристаллизации». В этом случае вода из-за невозможности «старта» кристаллизации может при соблюдении необходимых предосторожностей задерживаться на достаточно длительное время в жидком состоянии и при отрицательных температурах и нормальном атмосферном давлении (это состояние называют «переохлажденной» водой).

Решение задачи: В процессе утрамбовывания мокрого снега из него вытеснили воздух, и осталась смесь воды (массой m_0) и ледяных кристаллов (массой $M - m - m_0$). Поэтому $V = \dfrac{M - m - m_0}{\rho} + \dfrac{m_0}{\rho_0}$. Выражаем из этого соотношения массу воды: $m_0 = \dfrac{\rho_0}{\rho_0 - \rho}\left(M - m - \rho V\right) = 0{,}5$ кг и массу льда $M - m - m_0 = \dfrac{\rho}{\rho_0 - \rho}\left(\rho_0 V - M + m\right) = 1{,}8$ кг.

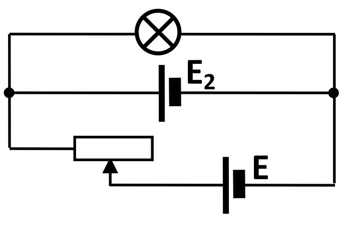
Для плавления льда потребуется количество теплоты $Q = \dfrac{\lambda\rho}{\rho_0 - \rho}\left(\rho_0 V - M + m\right) = 612$ кДж.

ОТВЕТ: $Q = \dfrac{\lambda\rho}{\rho_0 - \rho}\left(\rho_0 V - M + m\right) = 612$ кДж.

Задание 3.

Вопрос: Две лампы, имеющие одинаковую мощность $P = 4{,}5$ Вт, рассчитаны на разные напряжения: $U_1 = 3$ В и $U_2 = 6$ В. Чему равны их сопротивления в номинальном режиме?

Задача: Исследуя поведение лампы в цепи, изображенной на рисунке, школьник обнаружил, что яркость свечения лампы не зависит от положения движка реостата – лампа всегда работает в номинальном режиме, в котором ее мощность $P = 90$ Вт. Номинальное напряжение лампы $U = 36$ В. Внутренние сопротивления обоих источников одинаковы и равны $r = 2$ Ом.



Чему равны напряжения, которые каждый из источников создает на своих клеммах при разомкнутой цепи?

Ответ на вопрос: Поскольку мощность лампы $P = U \cdot I = \dfrac{U^2}{R}$, то $R = \dfrac{U^2}{P}$. Значит, $R_1 = \dfrac{U_1^2}{P} = 2\,\text{Ом}$, а $R_2 = \dfrac{U_2^2}{P} = 8\,\text{Ом}$.

Решение задачи: Обозначим полное сопротивление ветви с реостатом R. Сопротивление лампы в номинальном режиме $R_Л = \dfrac{U^2}{P} = 14{,}4\,\text{Ом}$. Ток в ветви реостатом $I_1 = \dfrac{E - U}{R}$ и ток в ветви со вторым источником $I_2 = \dfrac{E_2 - U}{r}$ в сумме дают ток через лампу $I = I_1 + I_2 = \dfrac{E - U}{R} + \dfrac{E_2 - U}{r}$, который не зависит от R только в том случае, когда $E = U = 36\,\text{В}$ (ток через реостат не течет). Но тогда $I = \dfrac{U}{R_Л} = \dfrac{E_2 - U}{r} \Rightarrow E_2 = U + U\dfrac{r}{R_Л} = U + \dfrac{rP}{U} = 41\,\text{В}$.

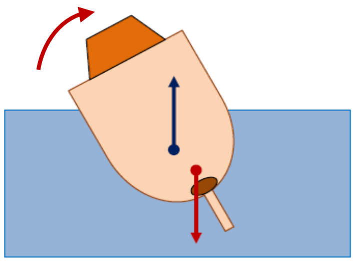
ОТВЕТ: $E = U = 36\,\text{В}$, $E_2 = U + U\dfrac{r}{R_Л} = U + \dfrac{rP}{U} = 41\,\text{В}$.

Задание 4.

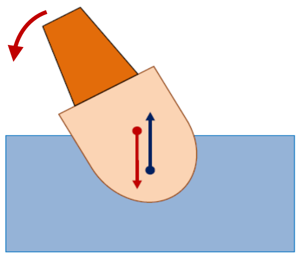
Вопрос: Существует «золотое правило кораблестроения», согласно которому центр плавучести (точка приложения силы Архимеда, действующей на корабль) в положении равновесия должен находиться выше центра масс корабля. Объясните смысл этого правила.

Задача: Стержень, имеющий форму тонкого цилиндра постоянного сечения, неоднороден. Его центр масс находится на расстоянии $x = \dfrac{1}{3}$ части его длины от одного из концов. Средняя плотность стержня равна ρ. Его опускают в большой сосуд с жидкостью с плотностью ρ_0. Глубина жидкости в сосуде заметно больше длины стержня. При каких значениях ρ_0 стержень после установления равновесия расположится вертикально?

Ответ на вопрос: Для объяснения рассмотрим два корабля: один (рисунок слева) удовлетворяет «золотому» правилу, а другой (рисунок справа) – нет. В положении равновесия

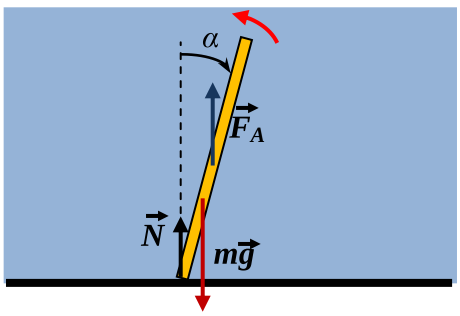


сила Архимеда равна по модулю и противоположна по направлению силе тяжести. Пусть корабль немного отклонился от вертикального положения. В первом случае, как видно из рисунка слева, момент этой пары сил возвращает корабль в вертикальное положение, а во

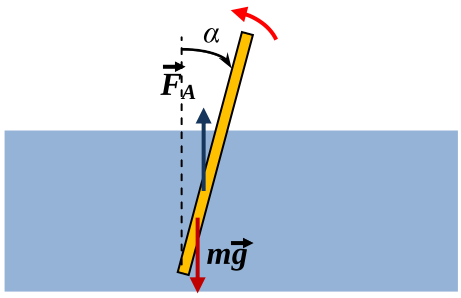


втором – увеличивает отклонение корабля от вертикали. Следовательно, выполнение «золотого» правила обеспечивает устойчивость равновесия корабля в вертикальном положении.

Решение задачи: Важно обратить внимание, что вертикальное положение стержень может занять в двух случаях: когда плотность жидкости <u>меньше</u> средней плотности стержня ($\rho_0 < \rho$), и стержень тонет и опирается на дно, и когда плотность жидкости больше средней плотности стержня ($\rho_0 > \rho$), и стержень плавает на поверхности. Рассмотрим сначала первый случай: вычислим сумму моментов сил, действующих на стержень, относительно точки опоры, при отклонении стержня от вертикали на небольшой угол α. Плечо силы нормальной реакции дна $\vec{N}$ равно нулю, плечо силы Архимеда (точка приложения – середина стержня длиной L) $l_A = \frac{L}{2}\sin(\alpha)$, плечо силы тяжести (точка приложения – центр масс) $l_g = \frac{L}{3}\sin(\alpha)$. Кроме того, $F_A = \rho_0 LSg$,



а $mg = \rho LSg$. Поэтому суммарный момент, возвращающий стержень к вертикальному положению, $M = +F_A l_A - mgl_g = \left(\frac{\rho_0}{2} - \frac{\rho}{3}\right)L^2 Sg\sin(\alpha)$. Поэтому $M > 0$ при $\rho_0 > \frac{2}{3}\rho$, и стержень будет устойчив в вертикальном положении при $\frac{2}{3}\rho < \rho_0 < \rho$. Рассмотрим теперь второй случай. В этом случае в вертикальном положении равновесия $F_A = \rho_0 L'Sg = mg = \rho LSg$, откуда следует, что длина погруженной части $L' = \rho L/\rho_0$. Теперь плечо силы Архимеда относительно нижнего конца стержня $l_A = \frac{L'}{2}\sin(\alpha)$, и суммарный момент



$M = \left(\frac{\rho}{2\rho_0} - \frac{1}{3}\right)\rho L^2 Sg\sin(\alpha) > 0$ при $\rho_0 < \frac{3}{2}\rho$. Значит, вертикальный стержень устойчив и при $\rho < \rho_0 < \frac{3}{2}\rho$. Нетрудно понять, что устойчивость сохранится и при $\rho_0 = \rho$ (стержень целиком погружен в воду, но не опирается на дно). Объединяя все случаи, находим: стержень займет вертикальное положение при $\frac{2}{3}\rho < \rho_0 < \frac{3}{2}\rho$.

ОТВЕТ: при $\frac{2}{3}\rho < \rho_0 < \frac{3}{2}\rho$.

БИЛЕТ № 18 (УФА)

Задание 1.

Вопрос: На покоящийся шарик массы 1 г налетает со скоростью 2 м/с куб массой 10 кг. Скорость куба перпендикулярна грани, которой он наносит удар по шарику. С какой примерно скоростью будет двигаться шарик после удара?

Задача: Снаряд массы $m = 8$ кг, летевший вертикально, взорвался в верхней точке траектории. При этом образовались два осколка, полетевшие поступательно. Известно, что в результате взрыва суммарная кинетическая энергия осколков увеличилась на $W = 360$ кДж, а масса образовавшихся пороховых газов пренебрежимо мала. Относительная скорость разлета осколков сразу после взрыва оказалась в 5/3 раза больше минимально возможной. Найдите эту скорость. Каким было отношение масс осколков?

Ответ на вопрос: Рассмотрим процесс в системе отсчета, связанной с кубом. В ней очень тяжелый куб покоится, а легкий шарик налетает на него со скоростью 2 м/с. Изменение импульсов тел при ударе одинаково по величине, но кинетическая энергия куба при этом будет значительно меньше кинетической энергии шарика. Если удар будет упругим, то следует считать, что кинетическая энергия шарика почти не изменяется, и шарик после отражения от куба будет двигаться в противоположную сторону примерно с той же скоростью – около 2 м/с относительно куба. Значит, относительно исходной системы отсчета он будет двигаться со скоростью около 4 м/с. При неупругом ударе часть энергии теряется, и скорость движения шарика после удара будет меньше, но не меньше скорости куба (около 2 м/с) – равенство скоростей тел после удара отвечает абсолютно неупругому удару.

Решение задачи: В верхней точке траектории снаряд, летевший вертикально, останавливается. Поэтому скорость снаряда перед взрывом равна нулю. Поэтому, по закону сохранения импульса, сумма импульсов осколков сразу после взрыва равна нулю. Это означает, что они полетели вдоль одной прямой. Обозначим отношение масс осколков $m_1 : m_2 \equiv z$, причем будем считать «первым» более тяжелый осколок (то есть $z \geq 1$). Из условия задачи следует, что $m_1 + m_2 = m$, и поэтому $m_1 = \frac{z}{z+1} m$ и $m_2 = \frac{1}{z+1} m$. Запишем законы сохранения импульса и энергии в процессе взрыва как уравнения для величин скоростей:

$$\begin{cases} \frac{z}{z+1} m v_1 = \frac{1}{z+1} m v_2 \\ W = \frac{z}{z+1} \frac{m v_1^2}{2} + \frac{1}{z+1} \frac{m v_2^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{1}{\sqrt{z}} \sqrt{\frac{2W}{m}} \\ v_2 = \sqrt{z} \sqrt{\frac{2W}{m}} \end{cases} \Rightarrow v_{отн} = v_1 + v_2 = \left(\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right) \sqrt{\frac{2W}{m}}.$$

Как видно, величина относительной скорости осколков при заданных W и m зависит только от отношения масс осколков. Поэтому ясно, что «минимальное» значение этой величины нужно выбирать как минимум при всевозможных изменениях z. Минимальное возможное значение величины $\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}}$ достигается при $z = 1$ и равно 2. Поэтому, согласно условию, $v_{отн} = \frac{5}{3} v_{\min} = \frac{5}{3} 2 \sqrt{\frac{2W}{m}} = \frac{10}{3} \sqrt{\frac{W}{2m}} = 500$ м/с. Кроме того, ясно, что $\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{10}{3}$. Решая это уравнение относительно $\sqrt{z}$, находим: $\sqrt{z} = 3 \Rightarrow z = 9$.

ОТВЕТ: $v_{отн} = \frac{10}{3} \sqrt{\frac{W}{2m}} = 500$ м/с, $\frac{m_1}{m_2} = 9$.

Задание 2.

Вопрос: В сосуде находились 2 л насыщенного водяного пара. Сосуд сжали при неизменной температуре 100°C так, что объем уменьшился вдвое. Какое количество тепла отвели при этом от содержимого сосуда? Используйте необходимые данные из задачи.

Задача: При соблюдении необходимых предосторожностей воду под давлением 1 атм можно нагреть до температуры $t_1 = 103°C$. В $V = 2$ л такой воды, находящейся в теплоизолирующем сосуде, «случайно» (например, под действием космического излучения) появившейся неоднородности образовался микроскопический пузырек водяного пара. Найти объем водяного пара после установления равновесия (давление на поверхность воды поддерживается неизменным). Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/кг·К, удельная теплота парообразования воды $r = 2480$ кДж/кг, плотность насыщенного водяного пара при $t_0 = 100°C$ равна $\rho_0 \approx 0{,}58$ кг/м^3, плотность воды считать равной $\rho \approx 1000$ кг/м^3.

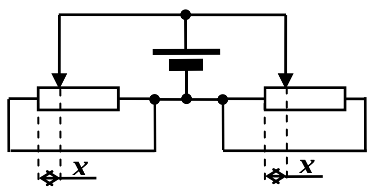
Ответ на вопрос: При сжатии насыщенного водяного пара без изменения температуры его плотность не изменяется (она зависит только от температуры). Поэтому при сжатии конденсировался 1 л насыщенного пара, то есть (согласно данным задачи) 0,58 г пара. При этом от сосуда необходимо отводить теплоту конденсации, то есть $Q = 2{,}48 \cdot 10^3 \cdot 0{,}58 \cdot 10^{-3} \approx 1{,}44$ кДж.

Решение задачи: Жидкость, описанную в условии, называют «перегретой» – в устойчивом состоянии при нормальном атмосферном давлении вода не может имеет температуру выше $t_0 = 100°C$. То есть это состояние неустойчивое и при любом возмущении вода будет остывать до температуры t_0, а за счет выделяющегося тепла будет происходить парообразование. Уравнение теплового баланса $c\rho V(t_1 - t_0) = r\Delta m$ позволяет найти массу образовавшегося пара: $\Delta m = \dfrac{c\rho V(t_1 - t_0)}{r} \approx 10$ г. С учетом известной плотности пара находим его объем: $V_n = \dfrac{\Delta m}{\rho_0} = \dfrac{c\rho V(t_1 - t_0)}{\rho_0 r} \approx 17{,}5$ л.

ОТВЕТ: $V_n = \dfrac{c\rho V(t_1 - t_0)}{\rho_0 r} \approx 17{,}5$ л.

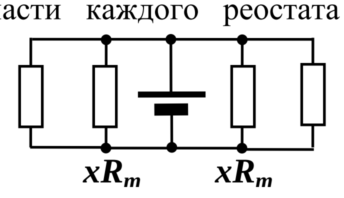
Задание 3.

Вопрос: Напряжение на клеммах аккумулятора при разомкнутой цепи равно 36В, а если через аккумулятор течет ток 2А, то оно уменьшается до 32В. Чему равно внутреннее сопротивление акуумулятора?



Задача: В схеме, показанной на рисунке, оба реостата одинаковы: их максимальное сопротивление $R_m = 36$ Ом, длина $L = 24$ см. Положение движков тоже одинаково: они поставлены в $x = 8$ см от крайних левых положений. Найти ток в ветви с источником, напряжение на которой $U = 20$ В.

Ответ на вопрос: Уменьшение напряжения на клеммах источника при протекании тока (36В – 32В = 4В) соответствует напряжению на внутреннем сопротивлении источника при токе 2А. Значит, это сопротивление равно 2 Ом.



Решение задачи: Нетрудно заметить, что в схеме обе части каждого реостата подключены к источнику параллельно друг другу. Значит, каждый реостат эквивалентен одному резистору с сопротивлением $R = \dfrac{xR_m \cdot (L-x)R_m}{L[xR_m + (L-x)]R_m} = \dfrac{x(L-x)}{L^2} R_m = 8$ Ом.

Суммарный ток через обе части одного реостата $I_1 = \frac{U}{R} = \frac{L^2}{x(L-x)}\frac{U}{R_m} = 2{,}5\,\text{А}$. Такой же ток течет и через обе части второго реостата, поэтому полный ток в ветви с источником $I = 2I_1 = \frac{2L^2}{x(L-x)}\frac{U}{R_m} = 5\,\text{А}$.

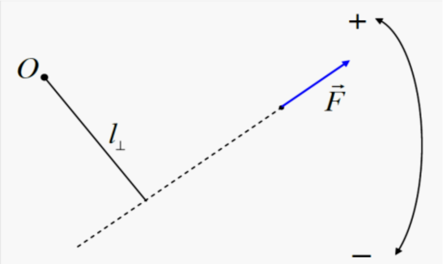
ОТВЕТ: $I = \frac{2L^2}{x(L-x)}\frac{U}{R_m} = 5\,\text{А}$.

Задание 4.

Вопрос: Сформулируйте условия равновесия твердого тела.

Задача: Стержень, имеющий форму тонкого цилиндра постоянного сечения, неоднороден. Его центр масс находится на расстоянии $x = \frac{1}{4}$ части его длины от одного из концов. Средняя плотность стержня равна ρ. Его опускают в большой сосуд с жидкостью с плотностью ρ_0. Глубина жидкости в сосуде заметно больше длины стержня. При каких значениях ρ_0 стержень после установления равновесия расположится вертикально?

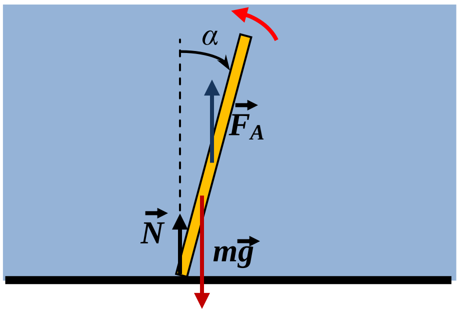
Ответ на вопрос: Необходимыми условиями нахождения твердого тела в равновесии являются: (1) равенство нулю векторной сумм внешних сил, приложенных к телу; (2) равенство нулю алгебраической суммы моментов внешних сил, приложенных к телу. Во втором условии используются определения:



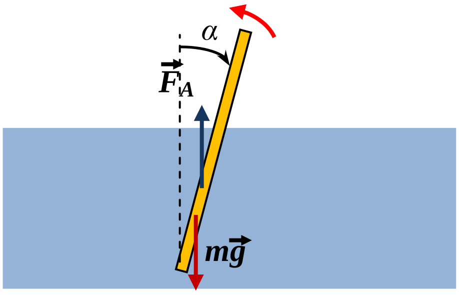
Плечо силы $l_\perp$ – расстояние от оси вращения до линии действия силы.

Момент силы – произведение величины силы на ее плечо, взятое со знаком + (-), если сила вращает тело вокруг оси в положительном (отрицательном) направлении: $M = \pm|\vec{F}|\cdot l_\perp$

Решение задачи: Важно обратить внимание, что вертикальное положение стержень может занять в двух случаях: когда плотность жидкости <u>меньше</u> средней плотности стержня ($\rho_0 < \rho$), и стержень тонет и опирается на дно, и когда плотность жидкости <u>больше</u> средней плотности стержня ($\rho_0 > \rho$), и стержень плавает на поверхности. Рассмотрим сначала первый случай: вычислим сумму моментов сил, действующих на стержень, относительно точки опоры, при отклонении стержня от вертикали на небольшой угол α. Плечо силы нормальной реакции дна $\vec{N}$ равно нулю, плечо силы Архимеда (точка приложения – середина стержня длиной L) $l_A = \frac{L}{2}\sin(\alpha)$, плечо силы тяжести (точка приложения – центр масс) $l_g = \frac{L}{4}\sin(\alpha)$. Кроме того,



$F_A = \rho_0 LSg$, а $mg = \rho LSg$. Поэтому суммарный момент, возвращающий стержень к вертикальному положению, $M = +F_A l_A - mgl_g = \left(\frac{\rho_0}{2} - \frac{\rho}{4}\right) L^2 Sg \sin(\alpha)$. Поэтому $M > 0$ при $\rho_0 > \frac{1}{2}\rho$, и стержень будет устойчив в вертикальном положении при $\frac{\rho}{2} < \rho_0 < \rho$. Рассмотрим теперь второй случай. В этом случае в вертикальном положении равновесия $F_A = \rho_0 L' Sg = mg = \rho LSg$, откуда следует, что длина погруженной части $L' = \rho L / \rho_0$. Теперь плечо силы Архимеда относительно нижнего конца стержня $l_A = \frac{L'}{2}\sin(\alpha)$, и суммарный момент $M = \left(\frac{\rho}{2\rho_0} - \frac{1}{4}\right)\rho L^2 Sg \sin(\alpha) > 0$ при $\rho_0 < 2\rho$.



Значит, вертикальный стержень устойчив и при $\rho < \rho_0 < 2\rho$. Нетрудно понять, что устойчивость сохранится и при $\rho_0 = \rho$ (стержень целиком погружен в воду, но не опирается на дно). Объединяя все случаи, находим: стержень займет вертикальное положение при $\frac{\rho}{2} < \rho_0 < 2\rho$.

ОТВЕТ: при $\frac{\rho}{2} < \rho_0 < 2\rho$.