

Олимпиада «Ломоносов. Космонавтика» 2018/2019

Заочный тур 1

Разминка (все классы)

1) Какой физический принцип помогает человеку достичь космоса?

- а) Принцип относительности (Эйнштейна).
- б) Принцип независимости движения.
- в) Принцип реактивного движения, основанный на законе сохранения импульса.
- г) Принцип Карно

Ответ в)

2) Какой самый крупный рукотворный объект существует или существовал в космосе?

- а) Автоматическая межпланетная станция «Джуно».
- б) Международная космическая станция.
- в) Космический корабль «Аполлон» для полетов на Луну.
- г) Космическая станция «Мир».

Ответ б)

3) Зачем космические корабли перед поворотом наклоняются на одно из крыльев?

- а) Для того, чтобы увеличить скорость движения за счёт использования гравитационных сил.
- б) Это сокращает время маневра.
- в) Это заблуждение. В космосе нет атмосферы, и вращательное движение никак не связано с поступательным движением космического корабля.
- г) Чтобы солнце равномерно освещало и нагревало космический корабль.

Ответ в)

4) Кто из людей первым ступил на другое небесное тело и когда?

- а) Харрисон Шмидт 14 декабря 1972.
- б) Жан Лу Кретьен 24 июня 1982.
- в) Нил Армстронг 20 июля 1969.
- г) Алексей Леонов 18 марта 1965.

Ответ в)

5) Может ли спутник, двигаясь вокруг Земли, быть наблюдаем постоянно с одного места на Земле?

- а) Да, если движется по геостационарной орбите на высоте 36 000 км.
- б) Нет, это невозможно.
- в) Любой спутник всегда виден с любого места на Земле.
- г) Да, если наблюдатель постоянно находится либо на Северном, либо на Южном полюсе.

Ответ а)

6) Почему на звездных картах не изображают планеты?

- а) Это историческая традиция — на звездных картах изображают только звезды, а планеты изображают на планетных картах.
- б) Это неверно. На звездных картах почти всегда изображают не только звезды, но и планеты.

- в) Потому, что планеты перемещаются из созвездия в созвездие.
- г) Потому, что планеты, в отличие от звезд, не видны невооруженным глазом.

Ответ в)

7) Какие метеорные потоки смогут наблюдать жители космической базы на Луне (когда она будет построена) долгими лунными ночами?

- а) Примерно те же, что и на Земле.
- б) Никаких метеоров они наблюдать не смогут.
- в) В основном, метеоры из потока Леониды.
- г) В основном, метеоры из потока Персеиды.

Ответ б)

8) Где на Земле лучше строить космодромы в целях уменьшения затрат на выведение на орбиту 1 кг полезной нагрузки (затраты на содержание космодрома не учитываем)?

- а) В горах на экваторе.
- б) Во льдах на полюсе.
- в) В лесах в Сибири.
- г) В степях в Казахстане.

Ответ а)

9) Для чего нужна астролябия?

- а) Для определения высоты звезды над горизонтом.
- б) Для измерения параллакса звезды.
- в) Для определения звездной величины.
- г) Для измерения расстояния от звезды до Земли.

Ответ а)

10) На данный момент открыты тысячи экзопланет. Каковы результаты наблюдений – что больше (по величине радиуса), звезды или планеты?

- а) Конечно, звезды!
- б) Планеты - современные технические средства позволяют обнаруживать только гигантские планеты.
- в) Бывает по-разному.
- г) Науке это пока неизвестно. Радиусы экзопланет с достоверной точностью еще не измерены.

Ответ в)

Вариант для 10-11 классов

Задача 1

– Это чья лаборатория? – спросил Коля.

– Школьная. А чья же еще?

– А дельфины тоже школьные?

– Тоже школьные. И обезьяны, и питон Архимед.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

В рамках лабораторной работы школьник наблюдает за звездами. Звезда взошла в 00 час 01 мин по местному времени. Сколько еще раз она пересечет горизонт в данном пункте в течение этих же солнечных (наших обычных) суток? Дайте развернутый ответ.

Варьируемых параметров нет.

Решение. Как известно, звёздные сутки длятся приблизительно 23 часа 56 минут 04 секунды. Следовательно, в следующий раз звезда взойдёт в 23:57 того же дня (секунды не учитываем), но перед тем, как звезда взойдёт, она должна опуститься за горизонт. Следовательно, в течение суток звезда появится на горизонте ещё, как минимум, дважды. Но звезда может проходить видимую (из данного места) часть своего пути очень низко над горизонтом, и тогда она может успеть сесть за оставшиеся до окончания солнечных суток три минуты. Поэтому полный ответ: звезда пересечет горизонт еще минимум 2 раза, но возможно и 3 раза. **1 балл.**

Задача 2

– Ну и как тебе это нравится? – спросил бородач у Коли.

– Вообще-то нравится, – сказал Коля, – хотя, простите, архитектура не очень подходящая.

– Почему же так?

– Я привык, что у домов должны быть углы и прямые стены, – сказал Коля. – Ну как в старинных зданиях.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Дом имеет форму пирамиды $SABCD$ с вершиной S и основанием – трапецией $ABCD$. Углы между прямыми SA, SB, SC, SD и плоскостью основания равны 45° . Один из углов трапеции равен 60° , а диагональ, выходящая из вершины этого угла равна $x\sqrt{3}$. Найдите высоту дома.

Варьируемый параметр x выбирается от 3 до 8 с шагом 1.

Решение. Проведем высоту SO . Треугольники SAO, SBO, SCO, SDO имеют прямой угол O и одинаковый катет SO . По условию, равны еще и углы SAO, SBO, SCO и SDO . Тогда треугольники равны, т.е. $SA=SB=SC=SD=SO$ (так как острый угол равен 45°). Итак, SO равно радиусу R окружности, описанной около трапеции $ABCD$. Пусть угол A этой трапеции равен 60° . Заметим, что окружность, описанная около трапеции, описана также около треугольника ABC . В треугольнике ABC угол B равен 120° , $AC = x\sqrt{3}$. По теореме синусов находим $2R = \frac{AC}{\sin 120} = 2x$.

Ответ. Высота равна x . **1 балл.**

Задача 3

Он вернулся к автобусу и прочитал надпись над дверью: «Вход. До Арбатской площади».

....

Тогда Коля подошел к соседнему автобусу. Над его задней дверью

была надпись: «Вход. До Новодевичьего монастыря».
Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Коля пытается добраться до Большого московского планетария. На информационном табло он нашел его географические координаты в градусах и их долях:

Широта: 55,76148861381986 N

Долгота: 37,58380457382202 E

Какой линейной точности на поверхности Земли соответствуют эти цифры?

Сколько последних цифр в указанных выше числах нужно убрать, чтобы угловая точность координат соответствовала линейной точности на местности в 30 м (примерный радиус московского планетария)?

Варьируемых параметров нет.

Решение. Один градус широты соответствует примерно 100 км (вдалеке от полярных областей это же справедливо и для градуса долготы). Формальная точность указанных координат составляет 10-14 градуса. Координата, указанная с такой угловой точностью, соответствует линейной точности около $100 \text{ км} \times 10^{-14} = 1 \text{ мкм}$. Второй вопрос задачи. Пусть мы оставим n цифр после запятой. Тогда точность равна $100 \text{ км} \times 10^{-n} = 10^5 - n \text{ м} = 30 \text{ м}$. Логарифмируем и получаем $n \approx 3,52$. Округляем в большую сторону. Получаем, что нам нужны 4 знака после запятой. Убрать надо 10 знаков.

Ответ. 1мкм и 10 знаков. **1 балл.**

Задача 4

– Вам куда надо?

– На Уран, – ответил Коля, хотя на Уран раньше не собирался.

– С какой целью туда направляетесь? – спросила справочная.

«Хорошо еще, что автомат, а не живой человек, – подумал Коля. – Сейчас присмотрелись бы ко мне...»

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

В терминал встроена функция защиты от детей. Чтобы проверить возраст пассажира, Коле предложена задача. Найти наименьшее значение a , при каждом из которых уравнение

$$\log_2^2\left(x + \frac{1}{x}\right) - p \cdot \log_2\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) - 3 = a$$

имеет решение.

Варьируемый параметр p выбирается от 2 до 8 с шагом 2.

Решение. Заметим, что аргумент второго логарифма – полный квадрат аргумента первого. Делаем замену $t = \log_2\left(x + \frac{1}{x}\right)$, получаем задачу на минимизацию значения квадратного трехчлена $g(t) = t^2 - 2pt - 3$ на множестве $t \geq 1$. Находим абсциссу вершины $t = p \geq 1$. Значит, минимальное значение равно $g(p) = -p^2 - 3$.

Ответ $-p^2 - 3$. **1 балл.**

Задача 5

– Разве не видишь? – удивился мальчик. – Работаем.
– Понятно, что работаете. А над чем?
– Над спутником. Разве не похоже?
– Похоже, – сказал Коля. – Модель?
– Что мы, маленькие, что ли? Обыкновенный спутник связи, по школьной программе. Разве у вас в школе не делают?
Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Спутник запущен на круговую орбиту, проходящую на высоте $h = 500$ км над поверхностью Земли. Через некоторое время спутник перевели на другую круговую орбиту, радиус которой меньше на Δh км. Найдите отношение η новой кинетической энергии спутника к ее первоначальному значению? Радиус Земли $R = 6400$ км. Ответ приведите в процентах, округлив до сотых.

Варьируемый параметр Δh брать с шагом 1 от 100 до 200

Решение. Уравнение движения спутника по круговой орбите под действием силы притяжения Земли имеет вид: $\frac{mv_1^2}{R+h} = G \frac{mM}{(R+h)^2}$, где m – масса спутника, v_1 – его скорость на первоначальной орбите, M – масса Земли, R – ее радиус, G – гравитационная постоянная. Отсюда $v_1^2 = \frac{GM}{R+h}$. Аналогично, $v_2^2 = \frac{GM}{R+h-\Delta h}$, где v_2 – скорость спутника на новой орбите. Учитывая, что искомая величина $\eta = \frac{E_2 - E_1}{E_1} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{v_1^2}$, получаем, что

$$\eta = \frac{\Delta h}{R+h-\Delta h}.$$

Ответ: $\eta = \frac{\Delta h}{R+h-\Delta h} \cdot 100\%$. **1 балл.**

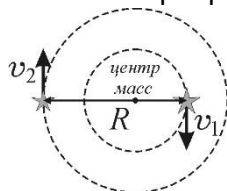
Задача 6

Весельчак У считал себя великим хитрецом. А если перехитрить было некого, то он садился сам с собой играть в карты и сам себя обыгрывал, при этом отчаянно жулил.

Совсем другим был его друг Крыс с мертвой планеты Крокрыс.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Планета Крокрыс вращается вокруг двойной звезды. Эта двойная звезда представляет собой систему из двух звезд разных масс, движущихся по круговым орбитам вокруг неподвижного центра масс с постоянными по модулю скоростями $v_1 = 10^5$ м/с и $v_2 = 5 \cdot 10^5$ м/с и одним и тем же периодом T с. Найдите расстояние R между звездами. Ответ приведите в метрах, разделив на 10^{10} и округлив до десятых.



Варьируемый параметр T выбирается от $4 \cdot 10^5$ до $5 \cdot 10^5$ с шагом $0,5 \cdot 10^5$.

Решение. Период обращения звезды, движущейся со скоростью v по окружности радиуса r равен $T = \frac{2\pi r}{v}$. Обозначив через r_1 и r_2 радиусы орбит звезд, по условию имеем $r_1 = \frac{T}{2\pi} v_1$,

$r_2 = \frac{T}{2\pi} v_2$. Поскольку центр масс двух материальных точек расположен между ними на прямой, соединяющей эти точки, расстояние между звездами $R = r_1 + r_2$. Следовательно,

$$R = \frac{T}{2\pi} (v_1 + v_2).$$

Ответ: $R = \frac{T}{2\pi} (v_1 + v_2)$. 1 балл.

Задача 7

Пираты сидели в сквере, намаявшись от ходьбы.

Весельчак У сказал: — Денег мало.

— Я тебе сколько хочешь сделаю, — сказал Крыс. — Будут как настоящие.

— Твои деньги опасные: на пять шагов отойдешь — они растают.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Утром в день прибытия в Москву у пиратов K рублей, но жадный Весельчак У в этот же день тратит N рублей. Каждый следующий день утром Крыс делает M рублей, а Весельчак У немедленно после этого тратит N рублей. Процесс повторяется, пока деньги у пиратов не кончатся. Если в какой-то день (возможно даже в первый день — день прибытия пиратов в Москву) к Весельчаку У попадает меньше либо равно N рублей, то он тратит их все без остатка, а без образца Крыс сделать деньги не может. Вечером какого дня деньги у пиратов закончатся (день прибытия нумеруется числом 1)? Напишите программу, которая отвечает на этот вопрос. 1 балл.

Входные данные: три целых числа K, M, N от 2 (включительно) до 109 (включительно), вводятся одной строкой через пробел.

Выходные данные: натуральное число — номер дня; если деньги у пиратов не закончатся никогда, то выходные данные: строка `NO`.

Пример 1: Входные данные `3 100 4`. Выходные данные `1`. Действительно, вечером, в день прибытия в Москву, у пиратов $3 - 3 = 0$ рублей (Весельчак У хотел бы потратить 4 рубля, но смог потратить только 3).

Пример 2: Входные данные `5 2 3`. Выходные данные `3`. Действительно, вечером, в день прибытия в Москву, у пиратов $5 - 3 = 2$ рубля. На следующий день вечером $2 + 2 - 3 = 1$ рубль, а на третий день вечером $1 + 2 - 3 = 0$ рублей.

Пример 3: Входные данные `10 6 6`. Выходные данные `NO`.

Задача 8

Миелофон ничего нового в технике не представляет. Просто электронный усилитель с приемником. Главное в нем — кристалл. А пока что эти кристаллы нашли только на астероиде Влоста; совсем маленький, этот астероид примчался откуда-то из другой галактики миллион лет назад, попал в орбиту Солнца, вот и крутится с тех пор.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Космический зонд движется по круговой орбите радиусом R км вокруг астероида. Определите ускорение свободного падения g у поверхности этого астероида, если период обращения зонда $T = 100$ с. Астероид считайте однородным шаром радиусом $r = 50$ км. Ответ приведите в м/с^2 , округлив до тысячных.

Варьируемый параметр R выбирается от 70 до 80 с шагом 1.

Решение. Пусть m – масса зонда, M – масса астероида, v – скорость движения зонда по орбите, G – гравитационная постоянная. Уравнение движения зонда имеет вид: $\frac{mv^2}{R} = G \frac{mM}{R^2}$. Учитывая, что $g = G \frac{M}{r^2}$ и $T = \frac{2\pi R}{v}$, получаем, что $g = \frac{4\pi^2 R^3}{r^2 T^2}$.

Ответ: $g = \frac{4\pi^2 R^3}{r^2 T^2}$. 1 балл.

Задача 9

перед Колей стояло еще два автобуса. И на ближайшем была надпись:

№ 8 «КОСМОЗО — ПРОСПЕКТ МИРА»

Коля, не колеблясь ни секунды, прыгнул в этот автобус, пробежал через салон, пронесся стрелой сквозь экран и оказался на остановке «Прспект Мира». Там он увидел автобус:

№ 3 «ПРОСПЕКТ МИРА — ГОГОЛЕВСКИЙ БУЛЬВАР»

Как назло, туда входило сразу несколько человек. Пришлось стоять в очереди.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

В очереди на вход в автобус изначально стоят N человек. За один такт времени человек, стоящий в очереди первым, может сесть в автобус (но может и не сесть). Кроме того, за один такт времени к очереди может присоединиться один новый человек (а может и не присоединиться). Любой обыкновенный пассажир, присоединяясь к очереди, встает в нее последним. Коля, пираты, Алиса и, возможно, другие торопливые пассажиры влезают в середину очереди. Если очередь состояла из четного числа человек (скажем, $2n$), то он встает на место $n + 1$, смещая половину очереди; если очередь состояла из нечетного числа человек (скажем $2n + 1$), то он влезает на место $n + 2$. Напишите программу, которая управляет такой очередью. 1 балл.

Команды пользователя:

В ответ на команду ``+ N'` программа помещает пассажира с данным номером N в конец очереди.

В ответ на команду ``* N'` программа помещает пассажира с данным номером N в середину очереди (см. условие выше).

В ответ на команду ``-'` программа удаляет первого пассажира из очереди (сажает его в автобус).

Входные данные:

В первой строке входных данных записано число N ($1 \leq N \leq 105$) – количество запросов к программе. Следующие N строк содержат описание запросов в формате:

`" + i "` – пассажир с номером i ($1 \leq i \leq N$) встает в конец очереди.

`" * i "` – торопливый пассажир с номером i ($1 \leq i \leq N$) встает в середину очереди.

`" - "` – первый пассажир из очереди уходит в автобус. Гарантируется, что на момент такого запроса очередь не пуста. Предполагается, что в начале работы программы очередь пуста.

Выходные данные

Для каждого запроса типа `" - "` программа должна вывести номер пассажира, который должен зайти в автобус.

Пример:

Входные данные

+ 1
+ 2
–
+ 3
* 4
–
–

Выходные данные

1
2
4

Задача 10

Коля Садовский бился у доски, исписав половину свободного пространства, и никак не мог выпутаться из уравнения.

....

И тогда Алиса с места, не вставая – никак не могла научиться, – сказала:

– Икс равен единице.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостя из будущего»).

Для проверки математических способностей Алисы учитель математики задала ей следующую задачу. Для некоторых восьми натуральных чисел, больших 1 и не превосходящих 250, вычислили произведение каждых семи из них. Нам известны семь произведений 240240, 258720, 280280, 305760, 480480, 672672 и 1681680. Известно, что восьмое произведение равно одному из этих семи. Найдите эти числа. В ответе укажите их сумму.

Варьируемый параметр – набор произведений.

Он может быть либо 240240, 258720, 280280, 305760, 480480, 672672 и 1681680, либо 120120, 141960, 223080, 312312, 390390, 520520, 780780.

Смешивать наборы нельзя!

Если система такого не позволяет, то надо загрузить два варианта текста задачи.

Решение. Рассмотрим первый набор. Разложим каждое из чисел на простые множители. Получим, что $240240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$; $258720 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$; $280280 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$; $305760 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$; $480480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$; $672672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$; $1681680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$.

Обозначим исходные числа через $x_1, x_2, \dots, x_8$, а недостающее восьмое произведение – через N . Перемножим все восемь произведений, получим, что

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_8)^7 = N \cdot 2^{31} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7^{12} \cdot 11^6 \cdot 13^6.$$

Это означает, что $N = 2^k \cdot 3^l \cdot 5^m \cdot 7^n \cdot 11^p \cdot 13^q$, где $k = 4 + 7k_1$, $l = 1 + 7l_1$, $m = 1 + 7m_1$, $n = 2 + 7n_1$, $p = 1 + 7p_1$, $q = 1 + 7q_1$.

Поскольку по условию N совпадает с одним из известных произведений, то оно не может содержать степени двойки выше пятой, тройки – выше первой, пятерки – выше первой, семерки – выше второй, одиннадцати – выше первой и тринадцати – выше первой. Значит, $N = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, а произведение всех восьми чисел равно $X = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$. Предположим, что числа занумерованы так, что первое из произведений не содержит x_1 и т.д. Тогда, например, $x_1 = X: 240240 = 14$. Аналогично получаем, что остальные числа равны соответственно 13, 12, 11, 7, 5, 2, 2, а сумма всех восьми чисел равна 66.

Ответ: 66. Во втором варианте 58. **1 балл.**

Вариант для 7-9 классов

Задача 1

Никогда не поздно будет выключить снова, подумал Коля и повернул переключатель. Возникло тихое жужжание, стрелки приборов на панели дрогнули, и некоторые из них передвинулись. Коля хотел было повернуть выключатель обратно, но тут услышал за спиной негромкий щелчок.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Коля Герасимов случайно выбрал на пульте машины времени такую программу, что отправиться он может и в будущее (целое число $x \geq 1984$) и в прошлое (целое число $y \in [0; 1984]$), но только при условии, что $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{n}$. В какой год может отправиться Коля? В ответ запишите через пробел все возможные значения переменной x .

Варьируемый параметр n выбирается одно число из 2187, 2268, 2312, 2205. Если система такого не позволяет, то надо загрузить четыре варианта текста задачи.

Решение. Вариант $n=2187$. Раскладываем 2187 в произведение 27^2 и 3. Тогда $x = a^2 \cdot 3$, $y = b^2 \cdot 3$. Получаем $a + b = 27$. Перебираем варианты $a = 27, b = 0; a = 26, b = 1$. Тогда $x = 2028, y = 3$. При $a \leq 25$ получаем $x \leq 1984$, что не подходит по условию. **1 балл.**

Задача 2

Коля повернул переключатель «Пуск», но ничего не произошло. Тогда он понял, что поспешил.

Надо сначала повернуть переключатель на «Вкл.». Так он и сделал. Дверь закрылась. Он снова повернул переключатель «Пуск», и снова ничего не произошло. Значит, рассудил Коля, он еще чего-то не сделал.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Коля Герасимов пытается разобраться в электрической схеме машины времени (см.

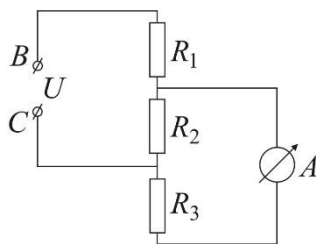


рисунок). Он выяснил, что сопротивления резисторов $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом. Напряжение между точками B и C постоянно и равно U В. Какой ток I показывает амперметр A в цепи? Сопротивление амперметра считайте пренебрежимо малым. Ответ приведите в амперах, округлив до десятых.

Варьируемый параметр U выбирается от 10 до 30 с шагом 2.

Решение. Поскольку сопротивление амперметра равно нулю, напряжения на резисторах R_2 и R_3 совпадают друг с другом и равны произведению общего тока I_0 , текущего в цепи источника, на сопротивление данного участка, т.е. $I_0 \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$. Ток I_0 найдем, используя

закон Ома для замкнутой цепи, а именно
$$I_0 = \frac{U}{R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)} = \frac{U(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Через амперметр и через резистор R_3 течет один и тот же ток $I = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_0$. Объединяя записанные выражения, находим, что ток через амперметр $I = \frac{UR_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$.

Ответ: $I = \frac{UR_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$. **1 балл.**

Задача 3

Но старик не обращал внимания на ответы Коли.

Ему самому нравилось говорить.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

В ходе разговора с Колей дедушка Павел вспоминал свою молодость. «У писателя Михаила Пришвина», - сказал он, - «есть такое наблюдение: «Не знаю, чем это объясняется, но Большую Медведицу начинаешь замечать почему-то с осени». Чем Вы это можете объяснить, мой юный друг?» Дайте развернутый ответ на этот вопрос.

Варьируемых параметров нет.

Решение. В наших северных широтах летом поздно темнеет, и даже в середине ночи северный сегмент неба, где располагается Ковш Большой Медведицы не темнеет окончательно, поскольку Солнце опускается неглубоко под горизонт. Это делает Ковш малозаметным. **1 балл.**

Задача 4

Коле неудобно было заглядывать сбоку, он только услышал, как мелодичный женский голос произнес:

«... Фестиваль на Луне обещает быть самым интересным зрелищем этого года...

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Фестиваль на Луне проходит в соответствии с расписанием: 12 апреля раз в три года. Кроме того, 12 апреля каждого високосного года проходит дополнительный фестиваль. Если плановый фестиваль совпадает по времени с дополнительным, то они объединяются в один общий фестиваль. Первый фестиваль состоялся в N году. Про какой по счету фестиваль слышит Коля, если он оказался в будущем, 11 апреля 2084 года? Напишите программу, которая отвечает на этот вопрос. **1 балл.**

Входные данные: число N, $1984 \leq N \leq 2084$

Выходные данные: целое число, равное номеру фестиваля.

Пример: Входные данные `2070`. Выходные данные `8`. Действительно, фестивали прошли в 2070, 2072 (дополнительный фестиваль), 2073, 2076 (объединенный фестиваль), 2079, 2080 (дополнительный), 2082 и 2084 (дополнительный) годах.

Задача 5

– Очень приятно, – сказал двухметровый аквариум на трех ногах. Внутри аквариума сидела небольшая синяя лошадь. Перед ее мордой висел в воде микрофон, а снаружи аквариума высовывался небольшой рупор. – И не смотрите на меня квадратными глазами, молодой человек. Я же не виноват в том, что на Земле никуда не годная атмосфера и приходится ходить в скафандре.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).



Для проживания семьи из трех инопланетян приготовили три сообщающихся сосуда с ртутью. В левый сосуд налили слой воды высотой $h_1 = 180$ мм, а в правый – высотой h_3 мм. На какую величину h_2 сместится уровень ртути в среднем сосуде, если известно, что ртуть из левого и правого сосудов не вытесняется водой полностью? Плотность ртути $\rho = 13,6$ г/см³, плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1$ г/см³. Ответ приведите в миллиметрах, округлив до десятых.

Варьируемый параметр h_3 выбирается от 200 до 300 с шагом 10.

Решение. Пусть h_0 – высота начального уровня ртути в сосудах. После того, как нальют воду, уровень ртути в левом сосуде опустится на Δh_1 , в правом – опустится на Δh_3 , а в среднем – повысится на $\Delta h_1 + \Delta h_3$. Жидкости будут находиться в равновесии при равенстве давлений ртути на уровне трубки, соединяющей сосуды: $\rho_{\text{в}} h_1 g + \rho(h_0 - \Delta h_1)g = \rho(h_0 + \Delta h_1 + \Delta h_3)g$, $\rho(h_0 + \Delta h_1 + \Delta h_3)g = \rho_{\text{в}} h_3 g + \rho(h_0 - \Delta h_3)g$. Из этих равенств, следует, что $\rho_{\text{в}} h_1 = \rho(2\Delta h_1 + \Delta h_3)$, $\rho_{\text{в}} h_3 = \rho(\Delta h_1 + 2\Delta h_3)$, или $\rho_{\text{в}}(h_1 + h_3) = 3\rho(\Delta h_1 + \Delta h_3)$. Учитывая, что $\Delta h_1 + \Delta h_3 = h_2$, получаем, что $h_2 = \frac{\rho_{\text{в}}}{3\rho}(h_1 + h_3)$.

Ответ: $h_2 = \frac{\rho_{\text{в}}}{3\rho}(h_1 + h_3)$. **1 балл.**

Задача 6

– Разве не видишь? – удивился мальчик. – Работаем.

– Понятно, что работаете. А над чем?

– Над спутником. Разве не похоже?

– Похоже, – сказал Коля. – Модель?

– Что мы, маленькие, что ли? Обыкновенный спутник связи, по школьной программе. Разве у вас в школе не делают?

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите высотой 400 км. Если центр управления передает спутнику команду *A*, то спутник увеличивает высоту орбиты на 100 км. Команда *B* велит спутнику увеличить высоту на 200 км. Пользуясь командами *A* и *B*, необходимо изменить орбиту с начальной (400 км) до высоты n км. Сколькими разными способами можно это сделать? Напишите программу, которая отвечает на этот вопрос. **1 балл.**

Входные данные: число n . Предполагается, что вводятся числа от 500 до 100000, кратные сто.

Выходные данные: целое число, равное числу способов.

Пример 1: Входные данные `600`. Выходные данные `2`. Действительно, команды для вывода на эту орбиту: либо `AA`, либо `B`.

Пример 2: Входные данные `900`. Выходные данные `8`. Действительно, команды для вывода на эту орбиту: либо `AAAAA`, либо `BAAA`, либо `ABAA`, либо `AABA`, либо `AAAB`, либо `BBA`, либо `BAB`, либо `ABB`. Всего 8 способов.

Задача 7

Вот! – прошипел Крыс. – Вот сюда мы и отправимся.

Может, даже какую-нибудь выгоду найдем.

Там нас никто не догадается искать.

Его тонкий синтетический палец, скрывавший коготь,
уперся в кнопку, под которой было написано: «КОСМОЗО»
Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостя из будущего»).

основаниями AD и BC и прямым углом A . Центральная часть Космозо имеет форму круга, вписанного в эту трапецию. В центре круга (точка O) находится Алиса Селезнева. От углов C и D ограды к Алисе бегут космические пираты. Коля бежит к Алисе от калитки, расположенной в точке касания круга со стороной AB . Какое наименьшее расстояние должен преодолеть Коля, чтобы добежать до Алисы, если $OC = a$, $OD = b$?

Варьируемые параметры $\{a, b\}$ выбираются из множества $\{6, 8\}, \{5, 12\}, \{7, 24\}, \{8, 15\}, \{9, 12\}$. Если система такого не позволяет, то надо загрузить четыре варианта текста задачи.

Решение. Пусть K – точка касания вписанной окружности со стороной AB . Требуется найти OK . Заметим, что угол COD прямой, поскольку CO и DO – биссектрисы соответствующих углов. Значит $CD=10$. Обозначим через R радиус вписанной окружности. Тогда $OK=R$, $AB=2R$. Проведем перпендикуляры OM и ON к сторонам BC и AD соответственно. Из теоремы Пифагора $MC = \sqrt{36 - R^2}$, $ND = \sqrt{64 - R^2}$. Воспользуемся свойством описанного четырехугольника $BC + AD = AB + CD$. Получаем уравнение $2R + \sqrt{36 - R^2} + \sqrt{64 - R^2} = 2R + 10$. Отсюда $R = 4,8$.

Ответ: 4,8. **1 балл.**

Задача 8

Алиса уже сидела верхом на динозавре, и тот, осторожно ступив в воду,
чтобы не забрызгать свою подругу, поплыл по пруду,
а утки-перевертыши, розовые гуси, птицы с иголками словно у ежей
и другие странные создания расплывались,
как лодки перед пассажирским теплоходом, уступая дорогу.
Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостя из будущего»).

Пираты решили поплыть по пруду за Алисой на прямоугольном плоту толщиной h см. Когда Крыс залез на плот, то плот погрузился в воду, но его верхняя грань все еще возвышалась над поверхностью воды на $h_1 = 8$ см. Когда на плот залез Весельчак У, то плот утонул. А если бы масса Весельчака У была равна массе Крыса, то плот опустился бы всего лишь на один сантиметр (т.е. высота верхней грани плота над поверхностью воды стала бы равной $h_2 = 7$ см). Найдите отношение n массы плота к массе Крыса. Ответ округлите до одного знака после запятой.

Варьируемый параметр h брать от 10 до 15 с шагом 0,5.

Решение. Обозначим через M массу пенопласта, через m массу солдатики, а через S – площадь листа пенопласта. Условия плавания пенопласта с одним и двумя солдатами имеют вид соответственно $(M + m)g = \rho_0 S(h - h_1)g$, $(M + 2m)g = \rho_0 S(h - h_2)g$. Здесь ρ_0 – плотность воды. Отсюда находим, что $m = \rho_0 S(h_1 - h_2)$, $M = \rho_0 S(h - 2h_1 + h_2)$.

Следовательно, $n = \frac{M}{m} = \frac{h - 2h_1 + h_2}{h_1 - h_2}$. **Ответ:** $n = \frac{h - 2h_1 + h_2}{h_1 - h_2}$. **1 балл.**

Задача 9

Весельчак У считал себя великим хитрецом. А если перехитрить было некого, то он садился сам с собой играть в карты и сам себя обыгрывал, при этом отчаянно жулил. Совсем другим был его друг Крыс с мертвой планеты Крокрыс. Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

На планете Крокрыс никогда не наступает ночь, потому что эта планета вращается вокруг двойной звезды, и к моменту захода первого солнца уже встает второе. А можно ли на Земле наблюдать нижнюю кульминацию Солнца? Если можно, то где и когда? Если нельзя, то почему? Дайте развернутый ответ.

Варьируемых параметров нет.

Решение. Нижнюю кульминацию Солнца можно наблюдать за полярным кругом летом, когда Солнце в течение нескольких суток не опускается под горизонт. **1 балл.**

Задача 10

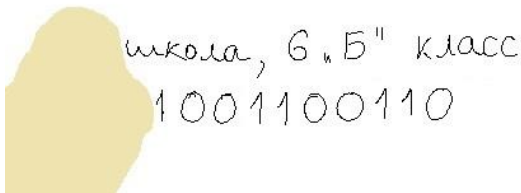
Коле никто не мешал. Раз мимо прошла какая-то семья, но Коля прикрыл ножик ладонью и сделал вид, что рассматривает кусты.

Коля вырезал на спинке большими печатными буквами:

КОЛЯ, 6-Й КЛАСС «Б», 26-Я ШКОЛА

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Пираты и Алиса Селезнева разыскивают Колю Герасимова. Весельчак У выкрал у Алисы записку, на которой она написала номер школы и номер класса Коли, но по дороге завернул в нее пончик, поэтому часть информации теперь безвозвратно утрачена.


х62,

Хитроумный Крыс догадался, что Алиса записала информацию обычным числом ху62 или хуз62 (на самом деле – это число

2662, но ведь номера школ бывают и однозначные, и двузначные, и трехзначные; последняя цифра 2 означает букву Б), а затем перевела это число в двоичную систему. Однако двоичное число теперь тоже неизвестно в точности и даже неясно, сколько в нем цифр. Какие школы будут посещать пираты в поисках Коли? В ответе перечислите все возможные номера школ через пробел. Не забудьте, что в 1984 году номера школ содержали не более трех цифр.

Варьируемых параметров нет.

Решение. Переводим написанное число из двоичной системы в десятичную – получаем 614. Нам неизвестно, сколько цифр двоичного разложения потеряно, но в любом случае, неизвестное число равно $1024k + 614$. Получить мы должны четырехзначное или пятизначное число с 62 на конце. Тогда $1024k + 552$ делится на 100. Тогда и $24k + 52$ делится на 100. Запишем уравнение $24k + 52 = 100n$, сократим на 4 и подберем решение $k = 2, n = 1$. Положим $p = k - 2, q = n - 1$. Уравнение примет вид $6p = 25q$. Тогда p делится на 25, т.е. $k = 2 + 25l$. Перебираем варианты. При $k = 2$ получаем школу номер 26. При $k = 27$ получаем школу номер 282, при $k=52$ получаем школу номер 538, при $k=77$ получаем школу номер 794, а при $k=102$ номер получаем 1050, а он четырехзначен.

Ответ. 26 282 538 794 **1 балл.**

Заочный тур 2

Разминка (все классы)

1) Спутник при выведении на ракете всегда находится под головным обтекателем и не виден. Почему?

- а) Внешний вид спутников – строго охраняемый секрет, так их прячут.
- б) На спутнике есть радиопередающее оборудование, и головной обтекатель – это экран, чтобы не было помех для оборудования на космодроме.
- в) Для нанесения рекламы спонсоров на головной обтекатель.
- г) Для защиты спутника при полете ракеты через атмосферу.

Ответ г)

2) У спутников много выступающих элементов: солнечных батарей, антенн и т.д. Почему они не ломаются, ведь скорость у спутника очень большая?

- а) Они изготавливаются из очень прочных материалов на основе специальных технологий.
- б) Они ориентированы относительно конструкции спутника таким образом, чтобы не испытывать воздействия.
- в) В космосе нет атмосферы, соответственно нет воздействия на выступающие элементы (или оно ничтожно мало).
- г) Они ломаются, но их регулярно ремонтируют космонавты.

Ответ в)

3) Почему на поверхности Луны много кратеров, а на поверхности Земли их нет или очень немного?

- а) На Луне нет атмосферы, которая могла бы защитить ее от падения метеоритов.
- б) На самом деле, на поверхности Луны нет кратеров, потому что люди там были и даже ездили по лунной поверхности на роверах (машинах).
- в) Потому что у Луны нет магнитного поля, а у Земли есть.
- г) Луна находится на такой орбите, где много метеоритов, а Земля движется по другой орбите.

Ответ а)

4) Где горы выше: на Марсе или на Земле?

- а) На Марсе нет гор, а есть только кратеры.
- б) На Земле, гора Джомолунгма.
- в) Это неизвестно, человек еще не был на Марсе.
- г) На Марсе, потухший вулкан Олимп.

Ответ г)

5) У Венеры есть атмосфера. А почему тогда в основном говорят про полеты человека на Марс?

- а) На Марсе есть полезные ископаемые, из которых можно получить топливо для обратного полета на Землю.
- б) Атмосфера Венеры не пропускает радиоволны, и нет возможности поддерживать связь с Землей.
- в) Полеты человека на Венеру тоже планируются.

г) Атмосфера на Венере очень ядовита, имеет очень высокое давление и ураганные скорости ветра. А на Марсе человек может находиться в «обычных» скафандрах типа лунных.

Ответ г)

6) Почему движение планет в солнечной системе происходит не в точном соответствии с законами Кеплера?

а) Законы Кеплера уже устарели, в настоящее время в них внесены поправки.

б) Потому, что на движение планет влияют другие объекты солнечной системы.

в) Потому, что воздействие солнечного ветра вносит коррективы.

г) Законы Кеплера описывают движение шаров идеальной формы, а планеты имеют неровности.

Ответ б)

7) С помощью каких инструментов астрономы производят наблюдения в радиодиапазоне?

а) С помощью коротковолновых раций.

б) С помощью универсальных радиопередатчиков.

в) С помощью астробай.

г) С помощью радиотелескопов.

Ответ г)

8) Где на Земле сумерки самые короткие?

а) На экваторе.

б) За полярным кругом.

в) В Австралии.

г) В средней полосе.

Ответ а)

9) Почему полярный день, длящийся с марта по сентябрь за полярным кругом в России всегда длиннее полярной ночи, длящейся с сентября по март?

а) Согласно указу президента России.

б) Потому, что орбита Земли не является идеальной окружностью.

в) Потому, что полярный день наступает раньше, чем солнце полностью поднимается над горизонтом, вследствие явления рефракции.

г) Потому, что полярный день наступает летом, а летом дни длиннее, чем ночи.

Ответ в)

10) Если бы Луна повернулась к Земле обратной стороной, она была бы ярче или тусклее в полнолуние?

а) Ярче.

б) Тусклее.

в) Точно такой же.

г) Мы бы ее вообще не увидели, поскольку обратная сторона Луны – темная.

Ответ а)

Вариант для 10-11 классов

Задача 1

- А тебе что, никогда на Марс не хотелось? — спросил Коля.
— Мне? Я тогда полечу на Марс, когда смогу принести там пользу,
— сказал курчавый. — Для этого и учусь.
— Не верь ты ему, — сказал другой парень, постарше.
— Он не только хотел на Марс попасть, но даже забрался
в грузовой корабль. Хорошо еще, вовремя вытащили,
а то бы замерз в космосе.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Может ли космонавт, находящийся на Деймосе (спутник Марса) наблюдать солнечные затмения? Дайте развернутый ответ.

Варьируемых параметров нет.

Решение. Видимый с Деймоса угловой размер Марса примерно в 50 раз больше видимого размера Солнца. Действительно, Деймос регулярно попадает в тень Марса, так что находясь на Деймосе можно наблюдать полные солнечные затмения, вызываемые Марсом.

Ответ. Да. 1 балл.

Задача 2

- Ну и как тебе это нравится? — спросил бородач у Коли.
— Вообще-то нравится, — сказал Коля, — хотя, простите, архитектура не очень подходящая.
— Почему же так?
— Я привык, что у домов должны быть углы и
прямые стены, — сказал Коля. — Ну как в старинных зданиях.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Дом имеет форму пирамиды $SABCD$ с вершиной S и основанием — ромбом $ABCD$. Высота пирамиды падает в точку пересечения диагоналей ромба. Угол между прямой BS и плоскостью ASC равен 30° , а площадь основания пирамиды равна $x\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника ASC .

Варьируемый параметр x выбирается от 20 до 30 с шагом 2.

Решение. Проведем высоту SO . Поскольку угол между прямой и плоскостью равен углу между прямой и ее проекцией на эту плоскость, то угол BSO равен 30° . Тогда $BS = 2BO$, $SO = \sqrt{3}BO$. Далее, поскольку диагонали ромба перпендикулярны, то его площадь равна половине произведения диагоналей. Значит, $AC \cdot BD = 2\sqrt{3}x$, откуда $AC = \frac{\sqrt{3}x}{BO}$. Следовательно, площадь треугольника ASC равна $\frac{1}{2}AC \cdot SO = \frac{3x}{2}$.

Ответ. $\frac{3}{2}x$. 1 балл.

Задача 3

- И только тут Коля разобрал, что мужчина одет
в темно-синий облегающий комбинезон, на груди у него
вышит золотом Сатурн с кольцом, а на рукаве — четыре звезды.
Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Может ли космонавт, находящийся на борту международной космической станции, наблюдать на поверхности Земли одновременно космодромы Плесецк и Восточный?

Расстояние между космодромами по поверхности Земли примите равным 4957 км. Высота орбиты МКС колеблется от 340 до 430 км. Дайте развернутый ответ.

Варьируемых параметров нет.

Решение. Примем Землю за шар радиуса R км. Пусть высота орбиты равна h км. Расстояние между точками на Земле – это длина дуги большого круга. Тогда центральный угол дуги равен $\alpha = 4957/R$ рад. Составим прямоугольный треугольник с вершинами в центре Земли, МКС и точкой касания с Землей прямой, проходящей через МКС. Получим $R = (R + h) \cos \alpha / 2$, откуда $h = \frac{R}{\cos \alpha / 2} - R$. Радиус Земли примем равным 6400 км. Получим $h = 511$ км. Если учесть влияние атмосферы и то, что радиус Земли меньше 6400 км, высоту орбиты придется еще увеличить.

Ответ. Нет. 1 балл.

Задача 4

– Вам куда надо?

– На Уран, – ответил Коля, хотя на Уран раньше не собирался.

– С какой целью туда направляетесь? – спросила справочная.

«Хорошо еще, что автомат, а не живой человек, – подумал Коля. – Сейчас присмотрелись бы ко мне...»

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

В терминал встроена функция защиты от детей. Чтобы проверить возраст пассажира, Коле предложена задача. Найти наибольшее значение a , при каждом из которых уравнение

$$a \cdot 3^{\sqrt[3]{1-x}} + 3^{\sqrt[3]{x-1}} - q = 4$$

имеет решение.

Варьируемый параметр q выбирается от 2 до 8 с шагом 2.

Решение. Делаем замену $t = 3^{\sqrt[3]{x-1}} > 0$, тогда $3^{\sqrt[3]{1-x}} = \frac{1}{t}$. Домножим обе части уравнения на t , получим задачу на максимизацию значения квадратного трехчлена $f(t) = -t^2 + (q + 4)t$ на множестве $t > 0$. Находим абсциссу вершины $t_B = \frac{q+4}{2} > 0$. Значит, максимальное значение равно $f(t_B) = \frac{(q+4)^2}{4}$.

Ответ $\frac{(q+4)^2}{4}$. 1 балл.

Задача 5

– Разве не видишь? – удивился мальчик. – Работаем.

– Понятно, что работаете. А над чем?

– Над спутником. Разве не похоже?

– Похоже, – сказал Коля. – Модель?

– Что мы, маленькие, что ли? Обыкновенный спутник связи, по школьной программе. Разве у вас в школе не делают?

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Спутник запущен на круговую орбиту, проходящую на высоте $h = 500$ км над поверхностью Земли и движется по ней с постоянной скоростью V_1 . Через некоторое время спутник перевели на другую круговую орбиту, радиус которой меньше на Δh км, в следствии чего скорость спутника стала равна V_2 . Найдите отношение V_2/V_1 . Радиус Земли $R = 6400$ км. Ответ приведите в процентах, округлив до сотых.

Варьируемый параметр Δh брать с шагом 1 от 100 до 200

Решение. Уравнение движения спутника по круговой орбите под действием силы притяжения Земли имеет вид: $\frac{mv_1^2}{R+h} = G \frac{mM}{(R+h)^2}$, где m – масса спутника, v_1 – его скорость на первоначальной орбите, M – масса Земли, R – ее радиус, G – гравитационная постоянная. Отсюда $v_1^2 = \frac{GM}{R+h}$. Аналогично, $v_2^2 = \frac{GM}{R+h-\Delta h}$, где v_2 – скорость спутника на новой орбите. Тогда $v_1/v_2 = \sqrt{\frac{R+h-\Delta h}{R+h}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{R+h}{R+h-\Delta h}} \cdot 100\%$. **1 балл.**

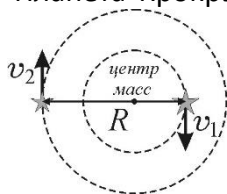
Задача 6

Весельчак У считал себя великим хитрецом. А если перехитрить было некого, то он садился сам с собой играть в карты и сам себя обыгрывал, при этом отчаянно жулил.

Совсем другим был его друг Крыс с мертвой планеты Кроккрис.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостя из будущего»).

Планета Кроккрис вращается вокруг двойной звезды. Эта двойная звезда общей массой $M = x \cdot 10^{30}$ кг представляет собой систему из двух звезд, движущихся по круговым орбитам вокруг неподвижного центра масс с постоянными по модулю скоростями $v_1 = 10^5$ м/с и $v_2 = 5 \cdot 10^5$ м/с и одним и тем же периодом T . Найдите массу первой и второй звезды. Ответ приведите в килограммах, разделив на 10^{30} и округлив до десятых.



Варьируемый параметр x выбирается от 3 до 12 с шагом 3.

Решение. Период обращения звезды, движущейся со скоростью v по окружности радиуса r равен $T = \frac{2\pi r}{v}$. Обозначив через r_1 и r_2 радиусы орбит звезд, по условию имеем $r_1 = \frac{T}{2\pi} v_1$, $r_2 = \frac{T}{2\pi} v_2$. Тогда $r_1/r_2 = v_1/v_2$. Уравнение движение первой звезды имеет вид $\frac{M_1 v_1^2}{r_1} = G \frac{M_1 M_2}{R^2}$, где R – расстояние между звездами. Аналогично для второй звезды. Тогда $\frac{M_1}{M_2} = \frac{r_1 v_2^2}{r_2 v_1^2}$, откуда $\frac{M_1}{M_2} = \frac{v_2}{v_1} = 5$. Тогда $M_1 = \frac{5x}{6} \cdot 10^{30}$, $M_1 = \frac{x}{6} \cdot 10^{30}$.

Ответ: $M_1 = \frac{5x}{6} \cdot 10^{30}$, $M_1 = \frac{x}{6} \cdot 10^{30}$. **1 балл.**

Задача 7

Коля подошел к одному из входов в здание. Над ним была надпись:

«МОСКОВСКИЙ КОСМОДРОМ-1»

«ПЛАНЕТАРНЫЕ СООБЩЕНИЯ»

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостя из будущего»).

В период времени $t \in [1; T]$ с космодрома выводятся на орбиту N спутников. Время выхода на орбиту спутника обозначим l . Пробыв некоторое время на орбите, каждый спутник в

какой-то момент $r \in [1; T]$ покидает ее. Напишите программу, которая умеет определять число спутников на орбите в заданные M моментов времени. **1 балл.**

Входные данные: Во входном файле даны сначала T, N, M ($1 \leq T \leq 10000, 1 \leq N \leq 10000, 1 \leq M \leq 10000$).

Далее идут N пар чисел $l \leq r$ от 1 до T каждое – момент выхода на орбиту данного спутника и момент схода с нее.

Затем идут M чисел от 1 до T - интересующие нас моменты времени, в которые надо замерить число спутников на орбите.

Все числа целые. Разделены пробелом.

Выходные данные: M чисел – число спутников на орбите в каждый из моментов времени.

Пример 1:

Ввод: `100 5 3 1 20 5 40 10 100 50 60 2 80 5 50 100`.

Первые три числа показывают, что работа идет на отрезке времени $[1; 100]$, запускают $N = 5$ спутников, надо $M = 3$ раза замерить число спутников. Далее идут 5 пар чисел, которые говорят, что первый спутник находился на орбите в отрезок времени $[1; 20]$, второй – в отрезок $[5; 40]$ и так далее. Последние 3 числа означают, что надо дать ответ на 3 вопроса: сколько спутников находилось на орбите в моменты времени 5, 50 и 100.

Вывод: `3 3 1`.

Действительно, в момент времени $t = 5$ на орбите находились первый, второй и пятый спутники; в момент времени $t = 50$ – третий и четвертый спутники; в момент времени $t = 100$ – только третий спутник.

Задача 8

Миелофон ничего нового в технике не представляет. Просто электронный усилитель с приемником. Главное в нем – кристалл. А пока что эти кристаллы нашли только на астероиде Влоста; совсем маленький, этот астероид примчался откуда-то из другой галактики миллион лет назад, попал в орбиту Солнца, вот и крутится с тех пор.
Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Космический зонд движется по круговой орбите радиусом R км вокруг астероида. Считая астероид однородным шаром радиусом $r = 20$ км, найдите его плотность, если период обращения зонда $T = 24\,000$ с. Астероид считайте однородным шаром радиусом, гравитационную постоянную примите равной $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{м}^3$. Ответ приведите в $\text{кг}/\text{м}^3$, округлив до тысячных.

Варьируемый параметр R выбирается от 70 до 80 с шагом 1.

Решение. Пусть m – масса зонда, M – масса астероида, ρ – плотность, v – скорость движения зонда по орбите, G – гравитационная постоянная. Уравнение движения зонда

имеет вид: $\frac{mv^2}{R} = G \frac{mM}{R^2}$. Учитывая, что объем шара равен $\frac{4}{3}\pi r^3$, находим плотность

$$\rho = \frac{3M}{4\pi r^3}.$$

Период обращения $T = \frac{2\pi R}{v}$. Выражаем M через v , получаем ответ.

Ответ: $\rho = \frac{3\pi R^3}{r^3 T^2 G}$. **1 балл.**

Задача 9

Когда почти всех пиратов переловили, эти два бандита объединили усилия, хотя прежде враждовали. С тех пор вот уже пять лет они вместе шастают по Галактике. Им приходится таиться. Еще недавно у них был свой корабль и несколько подручных, но, когда экспедиция на «Пегасе» с помощью трех капитанов победила их, пираты совсем оскудели. Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Космические пираты Крыс и Вечельчак У откопали клад, содержащий N слитков криптонита. Масса каждого слитка – целое число кг. Клад надо разделить, но пилить слитки сложно – пила изношена и сможет распилить только один слиток. Требуется распилить не более одного из них на две части (не обязательно равные, но с целой массой), после чего разделить слитки на две кучи равной массы. **1 балл.**

Входные данные

В первой строке вводится одно натуральное число N , не превосходящее 100.

Во второй строке через пробел вводятся N натуральных чисел, не превосходящих 100 – массы имеющихся слитков.

Выходные данные

Выведите массы слитков, которые вошли в первую кучку (включая массу части распиленного слитка).

Если решений несколько, выведите любое из них.

Если решений нет, выведите фразу NO SOLUTION (заглавными буквами).

Выводить массы можно в произвольном порядке, но масса части распиленного слитка (если таковой имеется) должна быть последней.

Пример 1:

Ввод: `2 3 6`

Найдены два слитка массой 3 и 6 кг.

Вывод: `NO SOLUTION`

Пример 2:

Ввод: `3 9 3 6`

Найдены три слитка массой 9, 3 и 6 кг.

Вывод: `9`

Первый пират забрал себе первый слиток. Остальные забрал второй пират.

Возможно и другое решение: `3 6`. Первый пират взял себе второй слиток, а также отпил 6 кг от первого. Второй пират взял третий слиток и 3 кг от первого.

Пример 3:

Ввод: `4 6 2 5 5`

Найдены четыре слитка массой 6, 2, 5 и 5 кг.

Вывод: `2 5 2`

Первый пират забрал себе второй и третий слиток, а также отпил 2 кг от первого слитка.

Второму пирату достался четвертый слиток, а также 4 кг от первого слитка.

Задача 10

Коля Садовский бился у доски, исписав половину свободного пространства, и никак не мог выпутаться из уравнения.

....

И тогда Алиса с места, не вставая – никак не могла научиться, – сказала:

– Икс равен единице.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостя из будущего»).

На уроке математики класс тренируется вычислять процент от числа. Сначала Алиса написала на доске некоторое натуральное число. Остальные ребята разделились на 4 группы. Каждый ученик из первой группы подходит к доске, увеличивает написанное число на 35%, после чего стирает исходное число и заменяет результатом своих вычислений. Каждый ученик из второй группы действует аналогично, но увеличивает написанное число на 25%. Каждый ученик из третьей группы увеличивает написанное число на треть, а каждый ученик из четвертой группы – уменьшает на треть. После того, как каждый из учеников класса (не считая Алисы) побывал у доски ровно один раз, исходное число увеличилось на 8%. Сколько ребят было в каждой группе, если всего в классе (не считая Алисы) ровно 20 учеников? Запишите в ответе четыре числа через пробел.

Варьируемых параметров нет.

Решение. Пусть в первой группе k учеников, во второй l , в третьей m , в четвертой n . Увеличить число на 35% - это умножить его на $\frac{27}{20}$. Увеличить число на 25% - это умножить

его на $\frac{5}{4}$. И так далее. Тогда $\left(\frac{27}{20}\right)^k \left(\frac{5}{4}\right)^l \left(\frac{4}{3}\right)^m \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1,08 = \frac{27}{25}$. Приравниваем степени у чисел

2, 3 и 5, получаем систему
$$\begin{cases} -2k - 2l + 2m + n = 0, \\ 3k - m - n = 2, \\ -k + l = -2. \end{cases}$$
 Добавляем уравнение $k + l + m + n =$

20 и решаем систему.

Ответ: $k = 5, l = 3, m = 4, n = 8$. **1 балл.**

Вариант для 7-9 классов

Задача 1

Никогда не поздно будет выключить снова, подумал Коля и повернул переключатель. Возникло тихое жужжание, стрелки приборов на панели дрогнули, и некоторые из них передвинулись. Коля хотел было повернуть выключатель обратно, но тут услышал за спиной негромкий щелчок.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Коля Герасимов случайно выбрал на пульте машины времени такую программу, что отправиться он может и в будущее (целое число $x \geq 1984$) и в прошлое (целое число $y \in [0; 1984]$), но только при условии, что $x^{2/3} + y^{2/3} = n^{2/3}$. В какой год может отправиться Коля? В ответ запишите через пробел все возможные значения переменной x .

Варьируемый параметр n выбирается одно число из 4394, 4625, 9826, 7000. Если система такого не позволяет, то надо загрузить четыре варианта текста задачи.

Решение. Вариант $n=4625$. Раскладываем 4625 в произведение 5^3 и 37. Тогда $x = a^3 \cdot 37$, $y = b^3 \cdot 37$. Получаем $a^2 + b^2 = 25$. Перебираем варианты $a = 5, b = 0; a = 4, b = 3$. Тогда $x = 2368, y = 999$. При $a \leq 4$ получаем $x \leq 1984$, что не подходит по условию.

Ответ. $n = 4394, x = 3456, x = 4394$

$n = 4625, x = 2368, x = 4625$

$n = 9826, x = 9826, x = 6750$

$n = 7000, x = 7000, x = 3584$

1 балл.

Задача 2

Коля повернул переключатель «Пуск», но ничего не произошло. Тогда он понял, что поспешил.

Надо сначала повернуть переключатель на «Вкл.». Так он и сделал. Дверь закрылась. Он снова повернул переключатель «Пуск», и снова ничего не произошло. Значит, рассудил Коля, он еще чего-то не сделал.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Коля Герасимов пытается разобраться в электрической схеме машины времени (см.

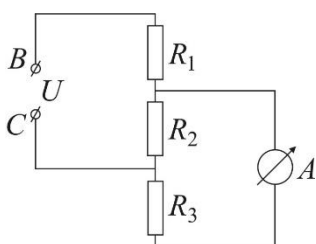


рисунок). Он выяснил, что сопротивления резисторов $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом. Напряжение между точками B и C постоянно и равно U В. Для того, чтобы машина заработала, необходимо, чтобы сила тока, проходящего через амперметр A , была равна $I = 10$ ампер. Резистор с каким сопротивлением R_3 надо взять? Сопротивление амперметра считайте пренебрежимо малым. Ответ приведите в

омах, округлив до десятых.

Варьируемый параметр U выбирается от 13 до 40 с шагом 3.

Решение. Поскольку сопротивление амперметра равно нулю, напряжения на резисторах R_2 и R_3 совпадают друг с другом и равны произведению общего тока I_0 , текущего в цепи

источника, на сопротивление данного участка, т.е. $I_0 \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$. Ток I_0 найдем, используя

закон Ома для замкнутой цепи, а именно $I_0 = \frac{U}{R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)} = \frac{U(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$.

Через амперметр и через резистор R_3 течет один и тот же ток $I = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_0$. Объединяя

записанные выражения, находим, что $R_3 = \frac{UR_2 - IR_1 R_2}{IR_1 + IR_2}$.

Ответ: $R_3 = \frac{UR_2 - IR_1 R_2}{IR_1 + IR_2}$. **1 балл.**

Задача 3

Но старик не обращал внимания на ответы Коли.

Ему самому нравилось говорить.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

В ходе разговора с Колей дедушка Павел сказал:

- Знаете ли Вы, мой юный друг, что великий Гомер в своей «Одиссее» называл Большую Медведицу созвездием, которое «себя никогда не купает в водах океана»? Вы давно были в Греции? Я был на прошлой неделе. И, представьте себе, видел, как Большая Медведица погружается в волны Эгейского моря. Что Вы на это скажете?

- Гомер, наверное, ошибся, - сказал Коля.

А что думаете Вы? Дайте подробный ответ.

Варьируемых параметров нет.

Решение. За три тысячи лет, прошедшие со времен Гомера, северный полюс мира (с точки зрения земного наблюдателя) сместился из-за прецессии земной оси. Сейчас земная ось направлена на Полярную звезду, а пять тысяч лет назад, например, была направлена на альфу Дракона. Соответственно, во времена Гомера созвездие Большой Медведицы находилось ближе к северному полюсу мира и действительно никогда не погружалось в море (для наблюдателя, находящегося в Греции). **1 балл.**

Задача 4

Перед говоруном стояли толпой зрители и разговаривали с ним.

— Нет, он сегодня не в настроении, — сказала бабуся. —

Пойдем, Ванечка, покатаемся на склиссе.

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Склисс меняет цвет каждый день. В понедельник склисс красный, во вторник –оранжевый, в среду – желтый, в четверг – зеленый, в пятницу голубой, в субботу синий, а в воскресенье фиолетовый.

Какого цвета склисс будет в день N, если 12 апреля 2083 года он был оранжевым? **1 балл.**

Входные данные

В первой строке вводится три натуральных числа – день, месяц и год. Например, 23 1 2090

Выходные данные

Выведите число, соответствующее цвету склисса: 1 – красный, 2 – оранжевый, 3 – желтый, 4 – зеленый, 5 – голубой, 6 – синий, 7 – фиолетовый.

Пример:

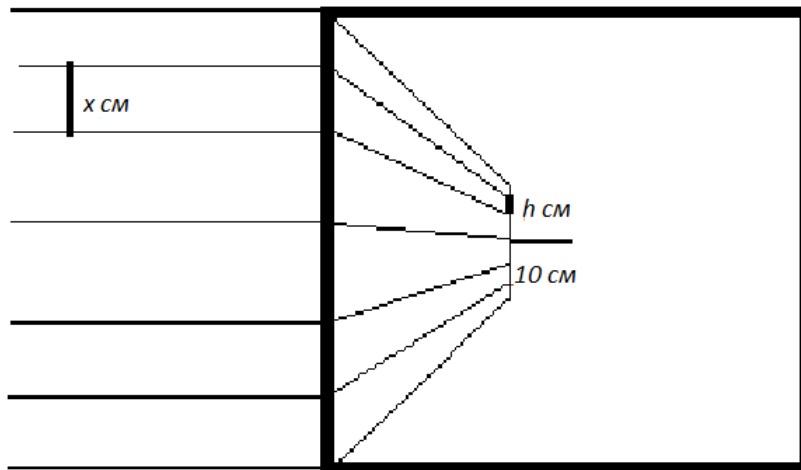
Ввод: 12 4 2084

Вывод: 4

В самом деле, 2084 год – високосный, между датами прошло 366 дней, т.е. 52 полных недели и 2 дня.

Задача 5

– Очень приятно, – сказал двухметровый аквариум на трех ногах. Внутри аквариума сидела небольшая синяя лошадь. Перед ее мордой висел в воде микрофон, а снаружи аквариума высовывался небольшой рупор. – И не смотрите на меня квадратными глазами, молодой человек. Я же не виноват в том, что на Земле никуда не годная атмосфера и приходится ходить в скафандре. Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостя из будущего»).



Аквариум имеет форму куба со стороной 1 м. Передняя стенка аквариума сделана в форме линзы, фокусирующей параллельный поток лучей в центре аквариума. На расстоянии 10 см перед фокусом установлен экран. Какова будет высота h изображения на экране, если предмет имеет высоту x см? Ответ приведите в сантиметрах, округлив до десятых.

Варьируемый параметр x выбирается от 20 до 30 с шагом 1.

Решение. Из подобия треугольников имеем $x:0,5 = h:0,1$.

Ответ: $h = \frac{x}{5}$. 1 балл.

Задача 6

Когда почти всех пиратов переловили, эти два бандита объединили усилия, хотя прежде враждовали. С тех пор вот уже пять лет они вместе шастают по Галактике. Им приходится таиться. Еще недавно у них был свой корабль и несколько подручных, но, когда экспедиция на «Пегасе» с помощью трех капитанов победила их, пираты совсем оскудели. Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостя из будущего»).

Космические пираты Крыс и Вечельчак У откопали клад, содержащий N слитков криптонита. Масса каждого слитка – целое число кг. Клад надо разделить, но пилить слитки сложно – пила изношена и сможет распилить только один слиток. Требуется распилить не более одного из них на две части (не обязательно равные, но с целой массой), после чего разделить слитки на две кучи равной массы. **1 балл.**

Входные данные

В первой строке вводится одно натуральное число N , не превосходящее 100.

Во второй строке через пробел вводятся N натуральных чисел, не превосходящих 100 – массы имеющихся слитков.

Выходные данные

Выведите массы слитков, которые вошли в первую кучку (включая массу части распиленного слитка).

Если решений несколько, выведите любое из них.

Если решений нет, выведите фразу NO SOLUTION (заглавными буквами).

Выводить массы можно в произвольном порядке, но масса части распиленного слитка (если таковой имеется) должна быть последней.

Пример 1:

Ввод: `2 3 6`

Найдены два слитка массой 3 и 6 кг.

Вывод: `NO SOLUTION`

Пример 2:

Ввод: `3 9 3 6`

Найдены три слитка массой 9, 3 и 6 кг.

Вывод: `9`

Первый пират забрал себе первый слиток. Остальные забрал второй пират.

Пример 3:

Ввод: `4 6 2 5 5`

Найдены четыре слитка массой 6, 2, 5 и 5 кг.

Вывод: `2 5 2`

Первый пират забрал себе второй и третий слиток, а также отпилил 2 кг от первого слитка.

Второму пирату достался четвертый слиток, а также 4 кг от первого слитка.

Задача 7

Вот! – прошипел Крыс. – Вот сюда мы и отправимся.

Может, даже какую-нибудь выгоду найдем.

Там нас никто не догадается искать.

Его тонкий синтетический палец, скрывавший коготь, уперся в кнопку, под которой было написано: «КОСМОЗО»

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостя из будущего»).

Территория Космозо имеет форму четырехугольника $ABCD$, у которого стороны AB и BC равны, угол A прямой, а угол D равен 60 градусам. Центральная часть Космозо имеет форму круга, вписанного в этот четырехугольник. В центре круга (точка O) находится Алиса Селезнева. От угла C ограды к Алисе бегут космические пираты. Коля бежит к Алисе от

калитки, расположенной в точке B . Какое наименьшее расстояние должен преодолеть Коля, чтобы добежать до Алисы, если $OC = a\sqrt{6}$?

Варьируемый параметр a выбирается от 5 до 9 с шагом 1.

Решение. Поскольку четырехугольник $ABCD$ является описанным, то у него равны суммы противоположных сторон. Значит, $AD = DC$. Следовательно, треугольники ABD и CBD равны, и точка O лежит на отрезке BD (поскольку центр вписанной окружности должен принадлежать биссектрисам углов B и D). Получаем, что угол ADB равен 30 градусов, а угол ABD равен 60 градусов. Проведем высоты OH и OK в треугольниках AOB и AOD соответственно. $OH = OK$ (как радиусы вписанной окружности), значит, $AHOK$ – квадрат с диагональю $AO = OC = a\sqrt{6}$, откуда $OH = a\sqrt{3}$. В треугольнике BOH угол H прямой, угол BOH равен 30 градусов, значит, $BO = 2BH$. Из теоремы Пифагора получаем, что $BO = 2a$.

Ответ: $BO = 2a$. 1 балл.

Задача 8

Алиса уже сидела верхом на динозавре, и тот, осторожно ступив в воду, чтобы не забрызгать свою подругу, поплыл по пруду, а утки-перевертыши, розовые гуси, птицы с иголками словно у ежей и другие странные создания расплывались, как лодки перед пассажирским теплоходом, уступая дорогу. Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Пираты решили поплыть по пруду за Алисой на прямоугольном плоту толщиной h см. Когда Крыс залез на плот, то плот погрузился в воду, но его верхняя грань все еще возвышалась над поверхностью воды на $h_1 = 5$ см. Весельчак У был в три раза тяжелее Крыса и когда он залез на плот вместе с Крысом, то плот утонул. Крыс вернулся на берег и тогда плот с Весельчаком снова поднялся над водой на высоту 1 сантиметр (т.е. высота верхней грани плота над поверхностью воды стала бы равной $h_2 = 1$ см). Найдите отношение n массы плота к массе Крыса. Ответ округлите до одного знака после запятой.

Варьируемый параметр h брать от 10 до 15 с шагом 0,5.

Решение. Обозначим через M массу плота, через m массу Крыса, а через S – площадь плота. Условия плавания плота с одним Крысом $(M + m)g = \rho_0 S(h - h_1)g$. Условие плавания плота с одним Весельчаком У $(M + 3m)g = \rho_0 S(h - h_2)g$. Здесь ρ_0 – плотность воды. Отсюда находим, что $2m = \rho_0 S(h_1 - h_2)$, $M = \rho_0 S(h - 1,5h_1 + 0,5h_2)$. Следовательно,

$$n = \frac{M}{m} = \frac{2h - 3h_1 + h_2}{h_1 - h_2} = \frac{h - 7}{2}.$$

Ответ: $n = \frac{h - 7}{2}$. 1 балл.

Задача 9

Весельчак У считал себя великим хитрецом. А если перехитрить было некого, то он садился сам с собой играть в карты и сам себя обыгрывал, при этом отчаянно жулил. Совсем другим был его друг Крыс с мертвой планеты Крокрыс. Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

На планете Крокрус никогда не наступает ночь, потому что эта планета вращается вокруг двойной звезды, и к моменту захода первого солнца уже встает второе. А можно ли на Земле хоть один день в году наблюдать восход Солнца строго на северо-востоке (азимут 45 градусов)? Если можно, то где? Если нельзя, то почему? Дайте развернутый ответ.

Варьируемых параметров нет.

Решение. Можно в любой точке с северной широтой, большей $\approx 55,5^\circ$, или с южной широтой, большей $\approx 55,5^\circ$. **1 балл.**

Задача 10

Коле никто не мешал. Раз мимо прошла какая-то семья, но Коля прикрыл ножик ладонью и сделал вид, что рассматривает кусты.

Коля вырезал на спинке большими печатными буквами:

КОЛЯ, 6-Й КЛАСС «Б», 26-Я ШКОЛА

Кир Булычев. Сто лет тому назад (кинофильм «Гостья из будущего»).

Пираты и Алиса Селезнева разыскивают Колю Герасимова. Весельчак У выкрал у Алисы записку, на которой она зашифровала номер школы и номер класса Коли. В записке написано число 221212. Хитроумный Крыс догадался, что Алиса сначала запомнила информацию как обычные число: номер школы, номер класса, буква класса, переведенная в цифру по правилу: А – 1, Б – 2, В – 3, Г – 4, Д – 5, Е – 6, Ж – 7, И – 8, К – 9, другие буквы в обозначениях классов не используются (например, школа 17, 7 «В» класс дадут число 1773). Затем Алиса перевела полученное число из десятичной системы счисления в систему по какому-то другому основанию. Пираты знают, что Коля учится либо в шестом, либо в седьмом классе. Какие школы они будут посещать в поисках Коли? В ответе перечислите все возможные номера школ через пробел. Не забудьте, что в 1984 году номера школ содержали не более трех цифр.

Варьируемых параметров нет.

Решение. Поскольку в записи числа используются цифры 1 и 2, то это должна быть система по основанию $n \geq 3$. Заметим, что если основание системы $n \geq 9$, то число 221212 в системе по этому основанию в десятичной системе будет больше или равно 132122, то есть получаем уже четырехзначный номер школы. Значит, основание системы счисления может меняться от 3 до 8 включительно. Переведем число 221212 из каждой из этих систем в десятичную. Получим:

$$221212_3 = 698_{10}, \text{ то есть 6 школа, 9 «И» класс;}$$

$$221212_4 = 2662_{10}, \text{ то есть 26 школа, 6 «Б» класс;}$$

$$221212_5 = 7682_{10}, \text{ то есть 16 школа, 8 «Б» класс;}$$

$$221212_6 = 18440_{10}, \text{ что невозможно;}$$

$$221212_7 = 38866_{10}, \text{ то есть 388 школа, 6 «Е» класс;}$$

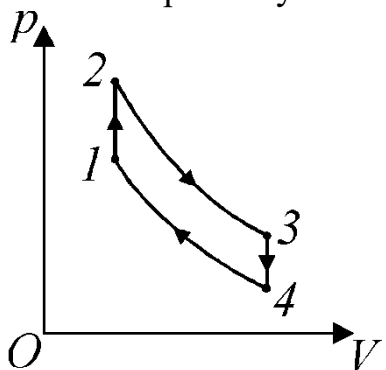
$$221212_8 = 74378_{10}, \text{ то есть 743 школа, 7 «И» класс. Поскольку пиратам подходят только шестые или седьмые классы, то они должны посетить школы с номерами 26, 388, 743.}$$

Ответ. 26 388 743 **1 балл.**

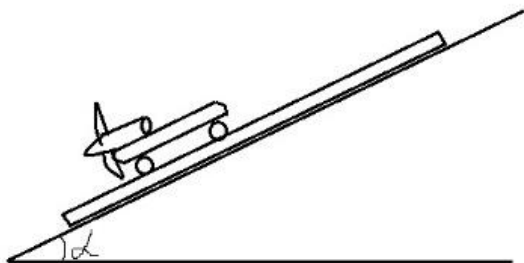
Финальный тур.

КЛАССЫ 10-11

1. Мальчик решил установить на свой беспилотник бензиновый двигатель внутреннего сгорания. В качестве аппроксимации рабочего процесса в двигателе внутреннего сгорания он использует так называемый термодинамический цикл Отто, названный в честь немецкого инженера Николауса Отто. На рисунке изображена pV -диаграмма цикла Отто, проводимого над идеальным газом. Этот цикл состоит из двух изохор $1-2$, $3-4$ и двух адиабат $2-3$, $4-1$. Известно, что работа, совершаемая газом за цикл, в $\alpha = 1,5$ раза больше, чем количество теплоты, отдаваемое газом за цикл холодильнику. Найдите коэффициент полезного действия цикла η .



2. Бензиновый двигатель оказался слишком тяжелым для беспилотника, и мальчик решил попробовать электрический винтовой двигатель на современных аккумуляторах. Для того,

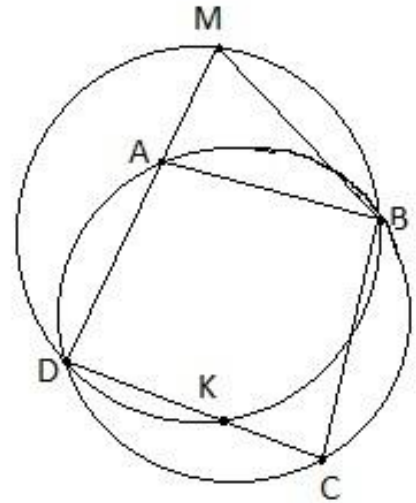


- чтобы протестировать двигатель, мальчик установил его на тележку, которую спускает вниз по доске (двигатель тянет тележку вниз), лежащей на покрытой льдом поверхности горки. При этом винт двигателя создает такое ускорение, что доска остается неподвижной (трение между льдом и доской считайте пренебрежимо малым). Масса электрического двигателя (с аккумуляторами, винтом и т.д.) $m_0 = 1$ кг, масса тележки $m_1 = 2$ кг, масса доски $M = 4$ кг, поверхность горки образует с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Найдите силу тяги винта (в ньютонах с точностью до десятых).

3. Продолжив свои занятия в кружке, мальчик в команде с другими ребятами запустил на аэростате передатчик телеметрии. При первичном измерении была допущена ошибка — датчик определил свою скорость как $10 + x$ вместо 10. В следующий раз скорость была вычислена на основании предыдущей, так что ошибка стала накапливаться. Зная суммарную относительную ошибку, найдите исходную ошибку x , решив уравнение

$$\frac{10}{(x+10)} + \frac{10 \cdot 9}{(x+10)(x+9)} + \dots + \frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1}{(x+10)(x+9) \dots (x+1)} = 11$$

4. В результате ошибок позиционирования аппарат после спуска на землю был утерян. Для его поиска вначале была определена круговая область и четырехугольник $ABCD$ с точками на окружности. Затем, однако, информация о месте посадки была уточнена, в результате чего была определена другая область для поиска (также имеющая форму круга). При этом точка A была смещена в точку M вдоль прямой AD , точка C – в точку K вдоль прямой CD , а точки B и D не менялись, так что получился четырехугольник $MBKD$ с точками на новой окружности (см. рисунок). Найдите AM , если $AB = 6$, $BC = 7$, $CK = 2$.



5. Ребята пытаются провести анализ снимков леса, полученных при последнем запуске. На темно-зеленом фоне леса хорошо видны светло-зеленые прямоугольники – результаты вырубок. Рассмотрим прямоугольный участок леса размера $M \times N$ метров с нижней левой вершиной в начале координат локальной карты и сторонами, параллельными осям координат. Нам известны снимки K прямоугольных вырубок размера 300×300 метров с координатами левой нижней точки (x, y) для каждой вырубki. Найдите площадь сохранившегося леса. Для решения задачи напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая принимает на вход следующие данные:

Первая строка - два натуральных числа M и N – размер лесной области

Вторая строка - натуральное число K – количество снимков с вырубками

K последующих строк – пары натуральных чисел x y – координаты левого нижнего угла снимка

Программа должна вывести натуральное число S – площадь сохранившегося лесного участка в квадратных метрах

Пример. Ввод:

500 500

2

0 0

100 100

Вывод:

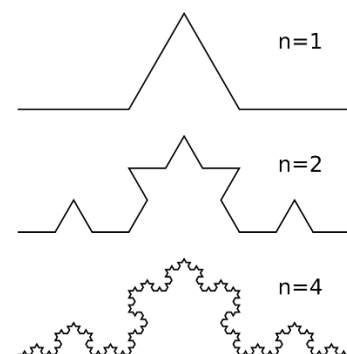
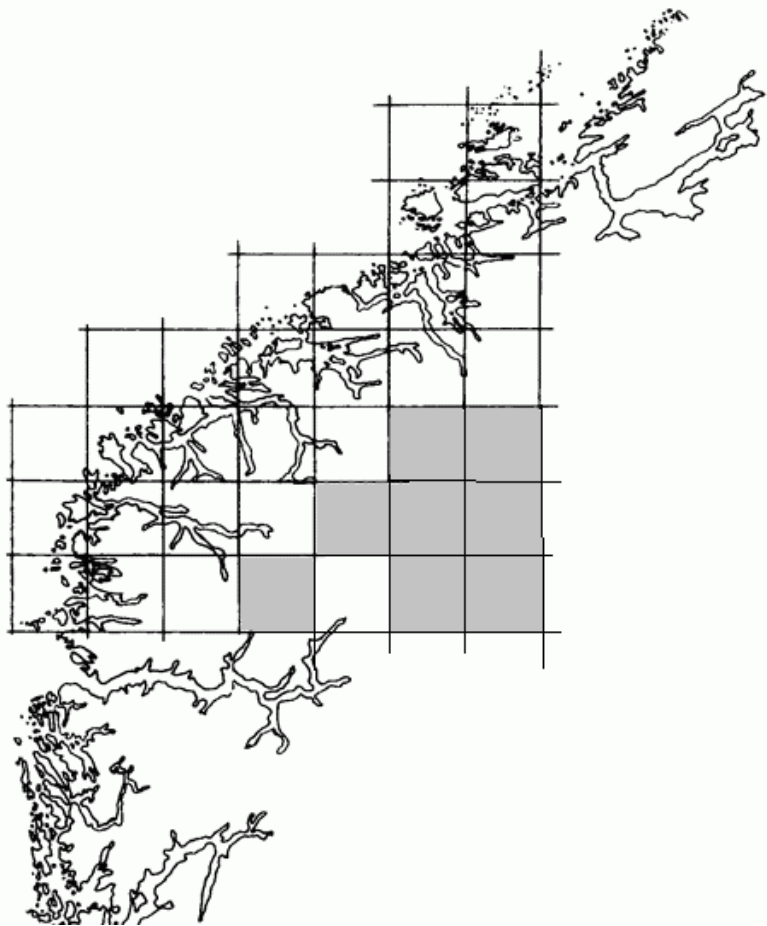
110000

6. При анализе космических снимков часто приходится делить точки снимка на два класса: нетронутый лес/вырубка, море/суша и так далее. При этом часто необходимо оценить площадь и периметр области (вырубки, острова, ледника) и т.д.

а) Предположим, Вам доступны снимки с произвольным (каким угодно большим) разрешением. Как бы Вы измерили площадь большого объекта по набору его снимков?

б) Как бы Вы стали измерять “величину границы” объекта? В Вашем ответе постарайтесь учесть следующее. Мы знаем, что при гомотетии с коэффициентом k площадь треугольников и четырехугольников меняется в k^2 раз. Также происходит и со сложными фигурами, получаемыми при картографировании. Мы знаем, что при такой гомотетии периметры простых фигур (треугольников, четырехугольников и т.п.) меняются в k раз. Оказывается, что границы фигур, получаемых при картографировании ведут себя не так. При изменении масштаба снимка в k раз они меняют свою длину в k^D раз, где D (оно называется фрактальной размерностью границы) отлично от 1 (например, при картографировании побережья Норвегии, это число экспериментально определено равным 1,52, а для побережья Великобритании 1,3).

в) Рассмотрим модельную ситуацию – “береговую линию”, построенную по следующему алгоритму. Вначале взяли отрезок на плоскости с концами $(0,0)$ и $(1,0)$. На первом шаге разбили этот отрезок на три равные части, построили на центральной части, как на основании равносторонний треугольник, основание стерли. На втором шаге с каждым из четырех звеньев полученной ломаной поступили так же. И так далее. Найдите фрактальную размерность этой кривой.



Решения. Классы 10-11.

Задача 1.

Газ получает теплоту от нагревателя на участке $1 - 2$ и отдает теплоту холодильнику на участке $3 - 4$. КПД цикла $\eta = \frac{A}{Q_{12}}$, где A – работа, совершаемая газом за цикл. По условию

$$A = \alpha |Q_{34}|. \text{ Кроме того, } Q_{12} = A + |Q_{34}| = (\alpha + 1) |Q_{34}|.$$

Ответ: $\eta = \frac{\alpha}{\alpha + 1} = 0,6$, или 60%.

Задача 2.

Вдоль поверхности наклонной плоскости на доску действуют сила трения F , направленная вверх, и составляющая веса доски $Mg \sin \alpha$, направленная вниз. По условию, эти две силы равны по величине, т.е. $F = Mg \sin \alpha$. Отсюда получим $F = 25$ Н. По третьему закону Ньютона, сила F создает такую же по величине силу P , действующую на тележку. Эта сила P есть часть той силы тяги, о которой идет речь в задаче. Остальная часть силы тяги, связанная с реактивным движением, не влияет на положение доски на наклонной плоскости. Таким образом, полная сила тяги будет больше или равна 25 Н.

Ответ: $F_{\text{тяги}} \geq 25$ Н.

Задача 3.

Необходимо решить уравнение $\frac{10}{(x+10)} + \frac{10 \cdot 9}{(x+10)(x+9)} + \dots + \frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1}{(x+10)(x+9) \dots (x+1)} = 11$. Сложим две последние дроби

$$\begin{aligned} & \frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 2}{(x+10)(x+9) \dots (x+2)} + \frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(x+10)(x+9) \dots (x+2)(x+1)} \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 2(x+1+1)}{(x+10)(x+9) \dots (x+2)(x+1)} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 2}{(x+10)(x+9) \dots (x+3)(x+1)}. \end{aligned}$$

Теперь к этой дроби добавим третье (с конца) слагаемое

$$\begin{aligned} & \frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 2}{(x+10)(x+9) \dots (x+3)(x+1)} + \frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3}{(x+10)(x+9) \dots (x+3)} \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3(2+x+1)}{(x+10)(x+9) \dots (x+3)(x+1)} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3}{(x+10)(x+9) \dots (x+4)(x+1)}. \end{aligned}$$

Проделав эту операцию еще семь раз, получим уравнение $\frac{10}{x+1} = 11$, откуда $x = -\frac{1}{11}$.

Ответ: $-\frac{1}{11}$.

Задача 4.

Обозначим $\angle DAB = \alpha$. Тогда $\angle MAB = \angle BCK = 180 - \alpha$ (свойство вписанного четырехугольника $ABCD$). Обозначим $\angle ABC = \beta$. Тогда $\angle ABC = 180 - \beta$ (свойство вписанного четырехугольника $ABCD$), $\angle MBK = \beta$ (свойство вписанного четырехугольника $MBKD$). Итак, $\angle MBA + \angle ABK = \beta = \angle ABK + \angle KBC$, то есть $\angle MBA = \angle KBC$. Тогда треугольники ABM и CBK подобны, откуда $\frac{AB}{CB} = \frac{6}{7} = \frac{AM}{CK} = \frac{AM}{2}$.

Ответ: $AM = \frac{12}{7}$.

Задача 5.

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;

int main() {
    int fX, fY, k;
    int x_min, y_min, x_max, y_max;
    cin >> fX >> fY >> k;
    vector< vector<bool> > Field( fX);
    // Переменная Field это двумерный массив с элементами типа boolean
    for (int i = 0; i < fX; i++) {
        Field[i].resize(fY);
    }
    // При определении переменной типа bool C++14 присваивает ей значение "false"

    for (int i = 0; i < k; i++) {
        cin >> x_min >> y_min >> x_max >> y_max;
        x_min = max (x_min, 0); // вырубка может выйти за границы леса
        y_min = max (y_min, 0);
        x_max = min (x_max, fX);
        y_max = min (y_max, fY);

        for (int x = x_min; x < x_max; x++)
            // присваиваем значение "true", если ячейка попала хотя в одну вырубку
            for (int y = y_min; y < y_max; y++) {
                Field[x][y] = true;
            }
    }

    int Area = 0;
    for (int x = x_min; x < x_max; x++) // считаем число нетронутых ячеек
        for (int y = y_min; y < y_max; y++) {
            if (Field[x][y] != true) {
                Area++;
            }
        }
    cout << Area << endl;
```



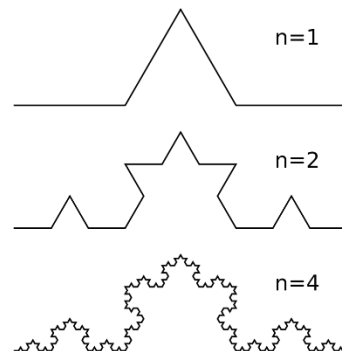
```
    return 0;  
}
```

Задача 6.

А) Пусть нам необходимо измерить площадь некоторого объекта с точностью ε . Разобьем снимок сеткой из квадратов с длиной стороны h . Будем считать, что для каждого квадрата сетки мы умеем определять (вручную или автоматически) принадлежность этого квадрата к одной из трех категорий: «квадрат целиком входит в измеряемый объект», «квадрат целиком входит в дополнение к измеряемому объекту» и «квадрат содержит и точки объекта, и точки его дополнения». Обозначим общее число квадратов N , число квадратов первого вида N_1 , второго вида N_2 и третьего вида N_3 . Составим две дроби $k_1 = \frac{N_1}{N}$ и $k_2 = \frac{N - N_2}{N}$. Умножая эти величины на общую площадь снимка S , получим значение *внутренней* и *внешней меры* объекта $S_1 = k_1 S$ и $S_2 = k_2 S$. Понятно, что истинное значение площади находится на промежутке $[S_1, S_2]$. Теперь начнем увеличивать число квадратов, уменьшая тем самым длину стороны h . В какой-то момент точность определения, к какой категории относится данный квадрат, станет неудовлетворительной. Тогда мы перейдем к снимку с большим разрешением и продолжим процесс. В тот момент, когда величина $S_2 - S_1$ станет меньше заданной нам точности ε , процесс можно остановить, взяв в качестве ответа величину $\frac{S_1 + S_2}{2}$.

Б) Пусть нам необходимо измерить «величину границы» некоторого объекта. Разобьем снимок сеткой из квадратов с длиной стороны h . Будем считать, что для каждого квадрата сетки мы умеем определять (вручную или автоматически) принадлежность этого квадрата к одной из трех категорий: «квадрат целиком входит в измеряемый объект», «квадрат целиком входит в дополнение к измеряемому объекту» и «квадрат содержит и точки объекта, и точки его дополнения». Обозначим общее число квадратов N , число квадратов первого вида N_1 , второго вида N_2 и третьего вида N_3 . Будем считать, что центры квадратов третьего вида лежат на нашей кривой, а длина кривой приблизительно равна длине ломаной, соединяющей эти точки. Тогда эту длину можно приблизительно оценить выражением $l(h) = N_3 h$ (мы считаем, что кривая непрерывным образом соединяет центры соседних квадратов). Теперь начнем увеличивать число квадратов, уменьшая тем самым длину стороны h . В какой-то момент точность определения, к какой категории относится данный квадрат, станет неудовлетворительной. Тогда мы перейдем к снимку с большим разрешением и продолжим процесс. Каков бы ни был измеряемый объект, существует максимальная разумная точность детализации его границы. Например, на береговых линиях отсутствуют детали меньше 1 см, при измерении периметра вырубки нет смысла выбирать детализацию больше, чем среднее расстояние между деревьями в лесу и т.д. Таким образом, возможны два случая. Если нам доступны снимки с требуемой детализацией, то мы просто находим величину $l(h_0)$ для данного h_0 и берем ее в качестве длины границы объекта. Если снимки с требуемой детализацией не доступны, то необходимо определить характер функции $l(h)$ и затем продолжить ее за область определения (экстраполировать) и определить ее предполагаемое значение в точке h_0 .

Для гладких кривых функция $l(h)$ имеет предел при $h \rightarrow 0$. Для реальных кривых величина $l(h)$ при уменьшении h возрастает к бесконечности как $C \cdot h^{-D}$. Таким образом, вначале необходимо экспериментально или с помощью уже имеющихся таблиц определить величину D . Для эмпирического определения величины D найдем натуральный логарифм функции $l(h)$ и заметим, что он должен вести себя как $\ln C - D \cdot \ln h$. Тогда дробь $\frac{\ln l(h)}{\ln h}$ стремится при $h \rightarrow 0$ к $-D$. Найдя величину D , можно определить и число C как предел функции $l(h) \cdot h^D$. Параметр D интересен и тогда, когда величина $l(h_0)$ может быть найдена непосредственно. Он показывает «изрезанность», «изгибистость» границы объекта.



В) Заметим, что кривая обладает свойством самоподобия. А именно, та ее часть, которая заключена между точками $(0,0)$ и $(1/3,0)$ есть уменьшенная в три раза копия всей кривой. Часть кривой между точками $(1/3,0)$ и $(1/2, \sqrt{3}/2)$ также есть копия всей кривой, уменьшенной в три раза и повернутой на 60 градусов. И так далее. Воспользуемся условием пункта Б): при гомотетии с коэффициентом k «длина кривой» должна измениться в k^D раз. В нашем случае кривая есть объединение четырех своих копий, каждая из которых получена уменьшением в три раза. Пусть $l(h)$ – функция, определенная в пункте Б). Получаем

$$l\left(\frac{h}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^D l(h) = \left(\frac{1}{3}\right)^D \cdot 4l\left(\frac{h}{3}\right) \Rightarrow \frac{4}{3^D} = 1, \text{ то есть } D = \log_3 4$$

Ответ: $\log_3 4$.

Критерии

Задачи 6а) и 6б) оценивались совместно, задача 6в) независимо от них.

За каждую из задач выставлялись оценки “+” – решена верно, “+.” – есть несущественные ошибки (приравнивается к “+”), “+/-” – решение, в целом, верное, “-/+” – есть верная идея решения.

Критерии общей оценки:

Нет чистых плюсов, нет плюс/минусов=0.

Нет чистых плюсов, есть ровно один плюс/минус и больше ничего=0.

Нет чистых плюсов, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=30.

Ровно один чистый плюс, нет плюс/минусов=40.

Ровно один чистый плюс, ровно один плюс/минус и больше ничего=45.

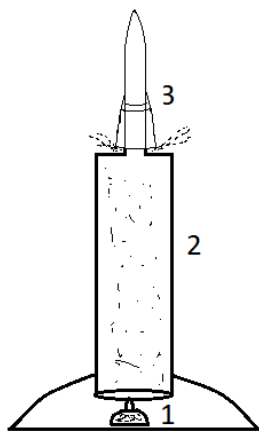
Ровно один чистый плюс, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=50.

Ровно два чистых плюса, нет плюс/минусов=50.

Ровно два чистых плюса, ровно один плюс/минус и больше ничего=55.
Ровно два чистых плюса, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=60.
Ровно три чистых плюса, нет плюс/минусов=60.
Ровно три чистых плюса, ровно один плюс/минус и больше ничего =65.
Ровно три чистых плюса, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=70.
Ровно четыре чистых плюса, нет плюс/минусов=70.
Ровно четыре чистых плюса, ровно один плюс/минус и больше ничего =75.
Ровно четыре чистых плюса, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=80.
Ровно пять чистых плюсов, нет плюс/минусов=80.
Ровно пять чистых плюсов, ровно один плюс/минус и больше ничего =85.
Ровно пять чистых плюсов, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=90.
Ровно шесть чистых плюсов, нет плюс/минусов=90.
Ровно шесть чистых плюсов и есть один плюс/минус=95.
Ровно семь чистых плюсов =100.

КЛАССЫ 7-9

- 1) Мальчик спроектировал установку по запуску ракеты. По замыслу мальчика спиртовка (1) нагревает воздух в цилиндре (2), вследствие чего создается давление и в какой-то момент нагретый воздух выталкивает ракету (3) вверх. На практике выяснилось, однако, что ракету чрезвычайно сложно установить на цилиндр так, чтобы нагретый воздух не выходил из цилиндра. На рисунке показана одна из неудавшихся попыток запуска. Из-за негерметичной установки ракеты, давление в цилиндре не изменилось. При этом воздух в цилиндре в процессе нагревания изменил



свою температуру с 15 до 35 градусов Цельсия. Считая, что коэффициент полезного действия горелки равен 8% (остальная энергия уходит на нагревание атмосферы и т.п.), вычислите массу сожженного спирта. Объем цилиндра равен 15000 см^3 , плотность воздуха равна $1,2 \text{ кг/м}^3$, его удельная теплоёмкость $1,01 \text{ кДж/(кг} \cdot ^\circ\text{С)}$, удельная теплота сгорания спирта 27 МДж/кг . Ответ приведите в граммах, округлив до одной сотой.

- 2) На свои опыты с ракетой мальчик истратил 15% спирта из бутылки, стоявшей в кладовой. Кроме того, он забыл закрыть бутылку, а когда вспомнил, то выяснилось, что еще 16% оставшегося спирта испарилось. Чтобы отец не заметил убыли, мальчик долил бутылку водой, так что в результате объем жидкости в бутылке даже увеличился на 5% по сравнению с исходным. Какова теперь концентрация спирта в бутылке? Ответ приведите в процентах, округлив до сотых долей.

- 3) После неудачи с запуском «воздушной» ракеты, мальчик стал посещать кружок по моделированию, где изготовил пороховую ракету. Пороховой двигатель этой ракеты работает ровно 4 секунды и обеспечивает ей все это время постоянное ускорение, равное $1,3g$ (при отсутствии внешних сил). Какой максимальной высоты достигнет ракета при вертикальном пуске? Сопротивление воздуха не учитывайте и считайте, что $g=9,8 \text{ м/с}^2$. Ответ приведите в метрах, округлив до целого.

- 4) Продолжив свои занятия в кружке, мальчик в команде с другими ребятами запустил на аэростате передатчик телеметрии. Передача идет по открытому радиоканалу и для того, чтобы данные не были похищены конкурирующей командой, ребята придумали систему авторизации приемника. Процедура авторизации такова: передатчик отправляет случайно выбранное число N в диапазоне от 5 до 99 и ждет правильного ответа – номера первой (считая справа налево) цифры числа $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot N$, отличной от нуля и делящейся на 3 без остатка. Напишите программу на вашем любимом языке программирования, вычисляющую эту цифру. Программа принимает на вход целое число N и выводит номер искомой цифры. Если такой цифры в записи числа нет, программа выводит "0".

Пример:

Ввод: 9

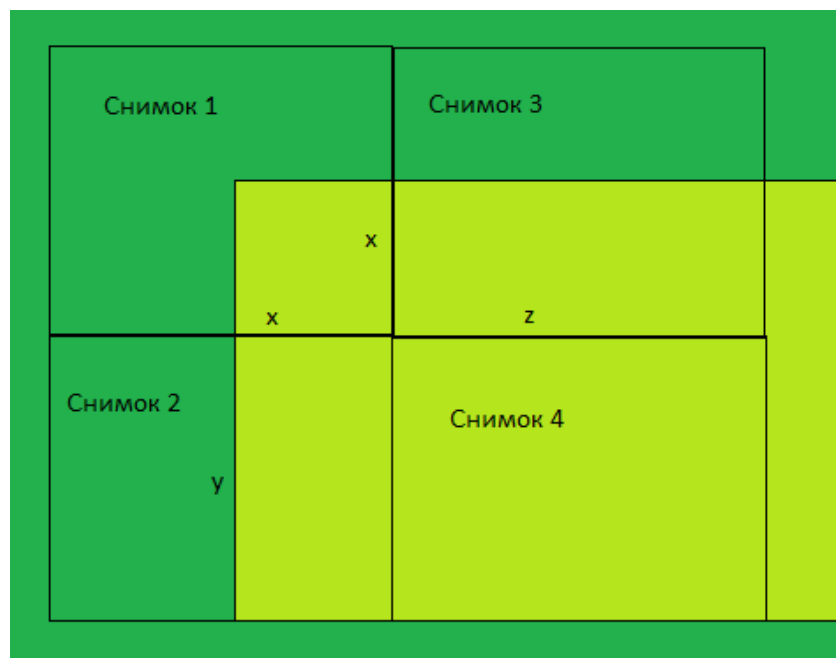
Вывод: 5

Действительно, $9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9 = 362880$. Первая, считая справа, цифра этого числа, отличная от нуля и делящаяся на 3, – это цифра 6, стоящая в пятом разряде.

Ввод: 5

Вывод: 0

- 5) Ребята пытаются провести анализ снимков леса, полученных при последнем запуске. На темно-зеленом фоне леса хорошо видны светло-зеленые прямоугольники – результаты вырубок. Программа автоматически вычисляет для каждого снимка площадь вырубки, ее периметр и отношение $\rho = \frac{\text{Периметр}}{\sqrt{\text{Площадь}}}$. Одна из



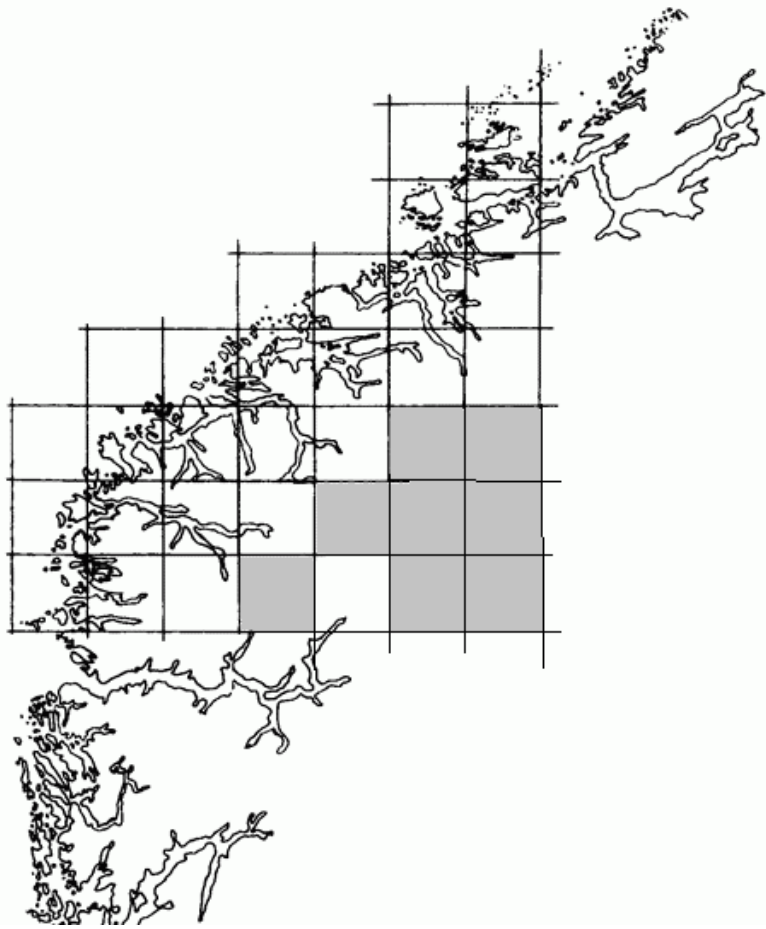
таких вырубок оказалась разделенной на четыре снимка, причем на первый снимок попал квадрат со стороной x , на второй – прямоугольник со сторонами x и $y > x$, а на третий – прямоугольник со сторонами x и

$z > x$. Можно ли найти коэффициент ρ для первого снимка? Найдите коэффициент для четвертого снимка, зная, что для второго и третьего этот коэффициент равен 4,45 и 5 соответственно.

- 6) При анализе космических снимков часто приходится делить точки снимка на два класса: нетронутый лес/вырубка, море/суша и так далее. При этом часто необходимо оценить площадь и периметр области (вырубки, острова, ледника) и т.д.

а) Предположим, Вам доступны снимки с произвольным (каким угодно большим) разрешением. Как бы Вы измерили площадь большого объекта по набору его снимков?

б) Как бы Вы стали измерять “величину границы” объекта? В вашем ответе постарайтесь учесть следующее. Мы знаем, что при гомотетии с коэффициентом k площадь треугольников и четырехугольников меняется в k^2 раз. Также происходит и со сложными фигурами, получаемыми при картографировании. Мы знаем, что при такой гомотетии периметры простых фигур (треугольников, четырехугольников и т.п.) меняются в k раз. Оказывается, что границы фигур, получаемых при картографировании, ведут себя не так. При изменении масштаба снимка в k раз они меняют свою длину в k^D раз, где D (оно называется фрактальной размерностью границы) отлично от 1 (например, при картографировании побережья Норвегии, это число экспериментально определено равным 1,52, а для побережья Великобритании 1,3).



Решения. Классы 7-9.

Задача 1.

Чтобы увеличить температуру воздуха на Δt , ему нужно передать количество теплоты, равное: $Q = cm\Delta t$, где $m = \rho V$ – масса воздуха в цилиндре. По определению КПД горелки

$$Q = \eta q M. \text{ Следовательно, } M = \frac{c\rho V\Delta t}{\eta q} = \frac{1,01 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 1500 \cdot 10^{-6} \cdot 20}{0,08 \cdot 27 \cdot 10^6} \approx 16833 \cdot 10^{-9} \text{ кг} = 0,17 \text{ г}$$

Ответ: 0,17г.

Задача 2.

Пусть начальный объем спирта равен V . Тогда его итоговый объем равен $0,84 \cdot 0,85 \cdot V = 0,714V$. Итоговый объем смеси равен $1,05V$, так что концентрация спирта равна $\frac{0,714V}{1,05V} = 0,68$.

Ответ: 68%.

Задача 3.

Введем систему координат, направив ось вертикально вверх и выбрав в качестве точки отсчета место старта ракеты. По условию, двигатель работает $t_0 = 4$ секунды и обеспечивает ускорение $a = 1,3g$. Во время работы двигателя ракета движется с ускорением $a - g = 0,3g$ при нулевой начальной скорости, то есть в момент остановки двигателя она имеет скорость $v_0 = 0,3gt_0$ и координату $s_0 = \frac{0,3g(t_0)^2}{2} = 23,52$. Затем ракета начинает двигаться с ускорением $(-g)$ и достигает наивысшей точки в тот момент, когда ее скорость становится нулевой: $v_0 - t_1g = 0 \Leftrightarrow t_1 = v_0/g = 0,3t_0$. За это время ракета пройдет расстояние

$$s_1 = v_0 t_1 - \frac{g(t_1)^2}{2} = (0,3t_0)^2 g - \frac{(0,3t_0)^2 g}{2} = \frac{(0,3t_0)^2 g}{2} = 7,056$$

Итого, $s_0 + s_1 = 30,576 \approx 31\text{м}$.

Ответ: 31м.

Задача 4.

Ниже приведена программа на языке Python

```
N=int(input())
```

```
M=1
```

```
# Находим N!
```

```
for i in range(1,N+1):
```

```
    M*=i
```

```
# Ищем номер цифры, которая не равна 0 и делится на 3. Начинаем с крайней правой
```

```
# цифры – ее номер 1
```

```
res=1
```

```

flag=0
while M>=1:
    a=M%10
    # Теперь а равно последней цифре. Если эта цифра не ноль и делится на 3, выходим
    # из цикла
    if (a==3) or (a==6) or (a==9):
        flag=1
        break
    # В противном случае отбрасываем последнюю цифру и повторяем цикл
    M=M//10
    res+=1
    # Теперь res хранит либо номер искомой цифры (если цикл был прерван),
    # либо число цифр числа N!, увеличенное на 1.
    # В этом случае надо поменять его значение на 0
    if (flag==0):
        res=0
print(res)

```

Задача 5.

Первый снимок – квадрат со стороной x . Тогда $\rho_1 = \frac{4x}{\sqrt{x^2}} = 4$.

Второй снимок – прямоугольник со сторонами x и y . Тогда $\rho_2 = \frac{2(x+y)}{\sqrt{xy}} = 4,45$. Третий снимок – прямоугольник со сторонами x и z . Тогда $\rho_3 = \frac{2(x+z)}{\sqrt{xz}} = 5$. Аналогично, для четвертого снимка получаем $\rho_4 = \frac{2(y+z)}{\sqrt{yz}}$. Остается решить систему уравнений. Для первого уравнения имеем $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 2,225$. Обозначим дробь $\sqrt{\frac{x}{y}} = t$ и получим квадратное уравнение $t^2 - 2,225t + 1 = 0$, откуда $t = 1,6$ или $t = 0,625$. По условию, $y > x$, так что выбираем второй корень. Аналогично, из второго уравнения получаем $t^2 - 2,5t + 1 = 0$, откуда $t = 0,5$. Итак, $y = 2,56x$, $z = 4x$. Подставляем эти равенства и получаем $\rho_4 = \frac{2(2,56x+4x)}{\sqrt{2,56x \cdot 4x}} = 4,1$.

Ответ: 4 и 4,1.

Задача 6.

А) Пусть нам необходимо измерить площадь некоторого объекта с точностью ε . Разобьем снимок сеткой из квадратов с длиной стороны h . Будем считать, что для каждого квадрата сетки мы умеем определять (вручную или автоматически) принадлежность этого квадрата к одной из трех категорий: «квадрат целиком входит в измеряемый объект», «квадрат целиком входит в дополнение к измеряемому объекту» и «квадрат содержит и точки объекта, и точки его дополнения». Обозначим общее число квадратов N , число квадратов

первого вида N_1 , второго вида N_2 и третьего вида N_3 . Составим две дроби $k_1 = \frac{N_1}{N}$ и $k_2 = \frac{N-N_2}{N}$. Умножая эти величины на общую площадь снимка S , получим значение *внутренней* и *внешней меры* объекта $S_1 = k_1 S$ и $S_2 = k_2 S$. Понятно, что истинное значение площади находится на промежутке $[S_1, S_2]$. Теперь начнем увеличивать число квадратов, уменьшая тем самым длину стороны h . В какой-то момент точность определения, к какой категории относится данный квадрат, станет неудовлетворительной. Тогда мы перейдем к снимку с большим разрешением и продолжим процесс. В тот момент, когда величина $S_2 - S_1$ станет меньше заданной нам точности ε , процесс можно остановить, взяв в качестве ответа величину $\frac{S_1 + S_2}{2}$.

Б) Пусть нам необходимо измерить «величину границы» некоторого объекта. Разобьем снимок сеткой из квадратов с длиной стороны h . Будем считать, что для каждого квадрата сетки мы умеем определять (вручную или автоматически) принадлежность этого квадрата к одной из трех категорий: «квадрат целиком входит в измеряемый объект», «квадрат целиком входит в дополнение к измеряемому объекту» и «квадрат содержит и точки объекта, и точки его дополнения». Обозначим общее число квадратов N , число квадратов первого вида N_1 , второго вида N_2 и третьего вида N_3 . Будем считать, что центры квадратов третьего вида лежат на нашей кривой, а длина кривой приблизительно равна длине ломаной, соединяющей эти точки. Тогда эту длину можно приблизительно оценить выражением $l(h) = N_3 h$ (мы считаем, что кривая непрерывным образом соединяет центры соседних квадратов). Теперь начнем увеличивать число квадратов, уменьшая тем самым длину стороны h . В какой-то момент точность определения, к какой категории относится данный квадрат, станет неудовлетворительной. Тогда мы перейдем к снимку с большим разрешением и продолжим процесс. Каков бы ни был измеряемый объект, существует максимальная разумная точность детализации его границы. Например, на береговых линиях отсутствуют детали меньше 1 см, при измерении периметра вырубки нет смысла выбирать детализацию больше, чем среднее расстояние между деревьями в лесу и т.д. Таким образом, возможны два случая. Если нам доступны снимки с требуемой детализацией, то мы просто находим величину $l(h_0)$ для данного h_0 и берем ее в качестве длины границы объекта. Если снимки с требуемой детализацией не доступны, то необходимо определить характер функции $l(h)$ и затем продолжить ее за область определения (экстраполировать) и определить ее предполагаемое значение в точке h_0 . Для гладких кривых функция $l(h)$ имеет предел при $h \rightarrow 0$. Для реальных кривых величина $l(h)$ при уменьшении h возрастает к бесконечности как $C \cdot h^{-D}$. Таким образом, вначале необходимо экспериментально или с помощью уже имеющихся таблиц определить величину D , а затем и величину C как предел функции $l(h) \cdot h^D$. Параметр D интересен и тогда, когда величина $l(h_0)$ может быть найдена непосредственно. Он показывает «изрезанность», «изгибистость» границы объекта.

Критерии

Задачи 6.а) и 6.б) оценивались независимо.

За каждую из задач выставлялись оценки “+” – решена верно, “+.” – есть несущественные ошибки (приравнивается к “+”), “+/-” – решение, в целом, верное, “-/+” – есть верная идея решения.

Критерии общей оценки:

Нет чистых плюсов, нет плюс/минусов=0.

Нет чистых плюсов, есть ровно один плюс/минус и больше ничего=0.

Нет чистых плюсов, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=30.

Ровно один чистый плюс, нет плюс/минусов=40.

Ровно один чистый плюс, ровно один плюс/минус и больше ничего=45.

Ровно один чистый плюс, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=50.

Ровно два чистых плюса, нет плюс/минусов=50.

Ровно два чистых плюса, ровно один плюс/минус и больше ничего=55.

Ровно два чистых плюса, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=60.

Ровно три чистых плюса, нет плюс/минусов=60.

Ровно три чистых плюса, ровно один плюс/минус и больше ничего =65.

Ровно три чистых плюса, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=70.

Ровно четыре чистых плюса, нет плюс/минусов=70.

Ровно четыре чистых плюса, ровно один плюс/минус и больше ничего =75.

Ровно четыре чистых плюса, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=80.

Ровно пять чистых плюсов, нет плюс/минусов=80.

Ровно пять чистых плюсов, ровно один плюс/минус и больше ничего =85.

Ровно пять чистых плюсов, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=90.

Ровно шесть чистых плюсов, нет плюс/минусов=90.

Ровно шесть чистых плюсов и есть один плюс/минус=95.

Ровно семь чистых плюсов =100.