Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2018/2019 учебный год
Задания отборочного этапа для 10–11 классов с ответами и решениями (1-й тур)

1.1. Решите уравнение $\sqrt{2-x}=-x$. В ответ запишите целый корень, если он один, и сумму целых корней, если их несколько.

Ответ. -2.

1.2. Решите уравнение $\sqrt{6-x}=-x$. В ответ запишите целый корень, если он один, и сумму целых корней, если их несколько.

Ответ. -3.

2.1. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямой $y=9-3x$ и осями координат.

Ответ. 13.5.

2.2. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямой $y=15-5x$ и осями координат.

Ответ. 22.5.

3.1. Среди всех целочисленных решений уравнения $20x+19y=2019$ найдите такое, для которого величина $|x-y|$ минимальна. В ответ запишите произведение xy.

Ответ. 2623.

Решение. Одним из решений уравнения является пара $x=100$, $y=1$. Поэтому множество всех целочисленных решений есть $x=100-19n$, $y=1+20n$, $n\in\mathbb{Z}$. Модуль разности $|x-y|=|100-19n-1-20n|=|99-39n|$ минимален при $n=3$, а соответствующее решение есть $(x,y)=(43,61)$. В ответ записываем $xy=43\cdot 61=2623$.

3.2. Среди всех целочисленных решений уравнения $20x-19y=2019$ найдите такое, для которого величина $|x+y|$ минимальна. В ответ запишите произведение xy.

Ответ. -2623.

3.3. Среди всех целочисленных решений уравнения $20x+18y=2018$ найдите такое, для которого величина $|x-y|$ минимальна. В ответ запишите произведение xy.

Ответ. 2805.

3.4. Среди всех целочисленных решений уравнения $20x-18y=2018$ найдите такое, для которого величина $|x+y|$ минимальна. В ответ запишите произведение xy.

Ответ. -2805.

3.5. Среди всех целочисленных решений уравнения $20x+17y=2017$ найдите такое, для которого величина $|x-y|$ минимальна. В ответ запишите произведение xy.

Ответ. 2989.

3.6. Среди всех целочисленных решений уравнения $20x-17y=2017$ найдите такое, для которого величина $|x+y|$ минимальна. В ответ запишите произведение xy.

Ответ. -2989.

4.1. Преподаватель летнего математического лагеря взял с собой на всё лето несколько рубашек, несколько пар брюк, несколько пар обуви и два пиджака. На каждом уроке он был в брюках, в рубашке и в обуви, а пиджак надевал на некоторых уроках. На любых двух уроках хотя бы один из элементов его одежды или обуви отличался. Известно, что если бы он взял на одну рубашку больше, то смог бы провести на 18 уроков больше; если бы взял на одну пару брюк больше, то смог бы провести на 63 урока больше; если бы взял на одну пару обуви больше, то смог бы провести на 42 урока больше. Какое наибольшее число уроков он смог бы провести при этих условиях?

Ответ. 126.

Решение. Пусть преподаватель привёз с собой x рубашек, y пар брюк, z пар обуви и 2 пиджака. Тогда он может провести $3xyz$ уроков (число 3 означает: 2 урока в каждом из пиджаков и 1 урок без пиджака). Если у него будет на одну рубашку больше, то количество уроков вырастет на $3yz$. Если у него будет на одну пару брюк больше, то количество уроков вырастет на $3xz$. Если у него будет на одну пару обуви больше, то количество уроков вырастет на $3yz$. Таким образом, получаем систему из трёх уравнений: $3yz = 18$, $3xz = 63$, $3xy = 42$. Отсюда $yz = 6$, $xz = 21$, $xy = 14$, и поэтому $(xyz)^2 = 6 \cdot 21 \cdot 14$, $xyz = 42$ (хотя это и не обязательно, но можно посчитать, что $x = 7$, $y = 2$, $z = 3$). Искомая величина: $3xyz = 126$.

Замечание. Возможен вариант понимания условия задачи, в котором требуется найти наибольшее число уроков при условии, что преподаватель возьмёт с собой и рубашек, и брюк, и пар обуви на 1 больше. Соответствующий ответ $3(x+1)(y+1)(z+1) = 288$ также засчитывается как верный.

4.2. Преподаватель летнего математического лагеря взял с собой на всё лето несколько рубашек, несколько пар брюк, несколько пар обуви и два пиджака. На каждом уроке он был в брюках, в рубашке и в обуви, а пиджак надевал на некоторых уроках. На любых двух уроках хотя бы один из элементов его одежды или обуви отличался. Известно, что если бы он взял на одну рубашку больше, то смог бы провести на 18 уроков больше; если бы взял на одну пару брюк больше, то смог бы провести на 54 урока больше; если бы взял на одну пару обуви больше, то смог бы провести на 36 уроков больше. Какое наибольшее число уроков он смог бы провести при этих условиях?

Ответ. 108.

4.3. Преподаватель летнего математического лагеря взял с собой на всё лето несколько рубашек, несколько пар брюк, несколько пар обуви и два пиджака. На каждом уроке он был в брюках, в рубашке и в обуви, а пиджак надевал на некоторых уроках. На любых двух уроках хотя бы один из элементов его одежды или обуви отличался. Известно, что если бы он взял на одну рубашку больше, то смог бы провести на 36 уроков больше; если бы взял на одну пару брюк больше, то смог бы провести на 45 уроков больше; если бы взял на одну пару обуви больше, то смог бы провести на 60 уроков больше. Какое наибольшее число уроков он смог бы провести при этих условиях?

Ответ. 180.

4.4. Преподаватель летнего математического лагеря взял с собой на всё лето несколько рубашек, несколько пар брюк, несколько пар обуви и два пиджака. На каждом уроке он был в брюках, в рубашке и в обуви, а пиджак надевал на некоторых уроках. На любых двух уроках хотя бы один из элементов его одежды или обуви отличался. Известно, что если бы он взял на одну рубашку больше, то смог бы провести на 36 уроков больше; если бы взял на одну пару брюк больше, то смог бы провести на 72 урока больше; если бы взял на одну пару обуви больше, то смог бы провести на 54 урока больше. Какое наибольшее число уроков он смог бы провести при этих условиях?

Ответ. 216.

Замечание. В вариантах 4.2, 4.3, 4.4 ответы 252, 360, 420 соответственно также засчитываются как верные.

5.1. Найдите $\dfrac{S_1}{S_2}$, где

$$S_1 = \frac{1}{2^{2019}} + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{1}{2^{2017}} + \ldots + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}, \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2017}} + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{1}{2^{2019}}$$

(в обеих суммах знаки слагаемых чередуются так: $+, +, -, +, +, -, +, +, -, \ldots$).

Ответ. -0.2.

Решение. Для суммы S_1 имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}S_1-\frac{1}{2^{2020}}\Big)-\frac{1}{2^{2020}}\right)+\frac{1}{2^{2020}}=S_1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}.$$

Решая это уравнение относительно S_1, получим

$$S_1=\frac{1-2^{2019}}{7\cdot 2^{2019}}$$

(этот же результат можно получить, применяя формулу для суммы первых n членов геометрической прогрессии). Аналогично для суммы S_2 находим

$$2(2(2S_2-1)-1)+1=S_2-\frac{1}{2^{2017}}-\frac{1}{2^{2018}}+\frac{1}{2^{2019}} \quad\Longrightarrow\quad S_2=\frac{5\cdot(2^{2019}-1)}{7\cdot 2^{2019}}.$$

Поэтому $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{-1}{5}=-0.2.$

5.2. Найдите $\dfrac{S_2}{S_1}$, где

$$S_1=\frac{1}{2^{2004}}+\frac{1}{2^{2003}}-\frac{1}{2^{2002}}+\ldots+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2},\qquad S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2002}}+\frac{1}{2^{2003}}-\frac{1}{2^{2004}}$$

(в обеих суммах знаки слагаемых чередуются так: $+,+,-,+,+,-,+,+,-,\ldots$).

Ответ. -5.

5.3. Найдите $\dfrac{S_1}{S_2}$, где

$$S_1=\frac{1}{3^{2019}}+\frac{1}{3^{2018}}-\frac{1}{3^{2017}}+\ldots+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3},\qquad S_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{2017}}+\frac{1}{3^{2018}}-\frac{1}{3^{2019}}$$

(в обеих суммах знаки слагаемых чередуются так: $+,+,-,+,+,-,+,+,-,\ldots$).

Ответ. $-\frac{5}{11}\approx -0.45$.

5.4. Найдите $\dfrac{S_2}{S_1}$, где

$$S_1=\frac{1}{3^{2004}}+\frac{1}{3^{2003}}-\frac{1}{3^{2002}}+\ldots+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3},\qquad S_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{2002}}+\frac{1}{3^{2003}}-\frac{1}{3^{2004}}$$

(в обеих суммах знаки слагаемых чередуются так: $+,+,-,+,+,-,+,+,-,\ldots$).

Ответ. -2.2.

6.1. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E. Отрезки AE и BD пересекаются в точке F. Найдите площадь треугольника CDE, если площади треугольников ABF, ADF и BEF соответственно равны 1, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$.

Ответ. $\frac{15}{56}\approx 0.27$.

Решение. Пусть $S_1=S_{AFD}=\frac{1}{2}$, $S_2=S_{ABF}=1$, $S_3=S_{BEF}=\frac{1}{4}$, $S_4=S_{DEF}$, $S_5=S_{CDE}$. Так как отношение площадей треугольников с равными высотами равно отношению длин оснований, то

$$\frac{S_4}{S_3}=\frac{FD}{FB}=\frac{S_1}{S_2},\qquad \frac{S}{S_3+S_4}=\frac{CE}{BE}=\frac{S+S_1+S_4}{S_2+S_3}.$$

Отсюда находим

$$S_4=\frac{S_1S_3}{S_2},\qquad S=\frac{S_1S_3(S_2+S_3)(S_1+S_2)}{S_2(S_2^2-S_1S_3)}=\frac{15}{56}.$$

6.2. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки E и F. Отрезки BF и CE пересекаются в точке D. Найдите площадь треугольника AEF, если площади треугольников BCD, BDE и CDF соответственно равны 1, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{6}$.

Ответ. $\frac{7}{44} \approx 0.16$.

6.3. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E. Отрезки AE и BD пересекаются в точке F. Найдите площадь треугольника CDE, если площади треугольников ABF, ADF и BEF соответственно равны 1, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$.

Ответ. $\frac{5}{33} \approx 0.15$.

6.4. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки E и F. Отрезки BF и CE пересекаются в точке D. Найдите площадь треугольника AEF, если площади треугольников BCD, BDE и CDF соответственно равны 1, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$.

Ответ. $\frac{4}{35} \approx 0.11$.

6.5. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E. Отрезки AE и BD пересекаются в точке F. Найдите площадь треугольника CDE, если площади треугольников ABF, ADF и BEF соответственно равны 1, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$.

Ответ. $\frac{3}{38} \approx 0.08$.

6.6. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки E и F. Отрезки BF и CE пересекаются в точке D. Найдите площадь треугольника AEF, если площади треугольников BCD, BDE и CDF соответственно равны 1, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$.

Ответ. $\frac{14}{153} \approx 0.09$.

7.1. Решите уравнение

$$3\cos\frac{4\pi x}{5} + \cos\frac{12\pi x}{5} = 2\cos\frac{4\pi x}{5}\left(3 + \operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{5} - 2\operatorname{tg}\frac{\pi x}{5}\right).$$

В ответ запишите сумму его корней на отрезке $[-11; 19]$.

Ответ. 112.5.

Решение. Обозначим $\dfrac{\pi x}{5} = z$. Тогда, воспользовавшись формулой косинуса тройного угла, получим

$$3\cos 4z + 4\cos^3 4z - 3\cos 4z = 2\cos 4z \cdot (3 + \operatorname{tg}^2 z - 2\operatorname{tg} z),$$

$$(2\cos^2 4z - 3 - \operatorname{tg}^2 z + 2\operatorname{tg} z)\cos 4z = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 4z = 0, \\ 2\cos^2 4z = \operatorname{tg}^2 z - 2\operatorname{tg} z + 3, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 4z = 0, \\ 2(\cos^2 4z - 1) = (\operatorname{tg} z - 1)^2. \end{array}\right.$$

Так как во втором уравнении системы левая часть неположительна, а правая неотрицательна, то получаем из первого уравнения $4z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ (то есть $z = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$), а из второго $z = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$. Поэтому $x = \frac{5}{8} + \frac{5k}{4}$ или $x = \frac{5}{4} + 5n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Из первой серии на отрезок $[-11; 19]$ попадут 24 числа при $k \in [-9; 14]$, их сумма равна

$$\frac{5}{8}\cdot 24 + \frac{5}{4}\cdot(-9 - 8 - \ldots - 1 + 0 + 1 + \ldots + 14) = 15 + \frac{5}{4}\cdot(10 + 11 + \ldots + 14) = 15 + 75 = 90.$$

Из второй серии на отрезок $[-11; 19]$ попадут 6 чисел при $k \in [-2; 3]$, их сумма равна

$$\frac{5}{4}\cdot 6 + 5\cdot(-2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3) = \frac{15}{2} + 15 = \frac{45}{2}.$$

Общая сумма: $90 + \frac{45}{2} = 112.5$.

7.2. Решите уравнение

$$3\cos\frac{2\pi x}{3}+\cos 2\pi x=2\cos\frac{2\pi x}{3}\left(3+\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{6}-2\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}\right).$$

В ответ запишите сумму его корней на отрезке $[-12;19]$.

Ответ. 86.25.

7.3. Решите уравнение

$$3\cos\frac{4\pi x}{5}+\cos\frac{12\pi x}{5}=2\cos\frac{4\pi x}{5}\left(3+\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{5}+2\operatorname{tg}\frac{\pi x}{5}\right).$$

В ответ запишите сумму его корней на отрезке $[-13;17]$.

Ответ. 67.5.

7.4. Решите уравнение

$$3\cos\frac{2\pi x}{3}+\cos 2\pi x=2\cos\frac{2\pi x}{3}\left(3+\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{6}+2\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}\right).$$

В ответ запишите сумму его корней на отрезке $[-12;18]$.

Ответ. 82.5.

8.1. Известно, что $P(x)$ — многочлен 9-й степени и $P(k)=2^k$ при всех $k=1,2,3,\ldots,10$. Найдите $P(12)$.

Ответ. 4072.

Решение. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n и $P(k)=2^k$ при всех $k=1,2,3,...,n+1$. Найдём $P(n+m+2)$, $m=0,1,\ldots$. По формуле бинома Ньютона при любом $k\in\mathbb{N}$ имеем

$$2^k=2\cdot(1+1)^{k-1}=2\sum_{i=0}^{k-1}C_{k-1}^i=2\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-i)}{i!}.$$

Заметим, что сумма в правой части этого равенства есть многочлен от k степени $k-1$, причём если добавить к этой сумме слагаемые, соответствующие $i=k,k+1,\ldots,n$, то она не изменится, так как $(k-1)(k-2)\ldots(k-i)=0$ при $i\geqslant k$ (каждое такое произведение содержит множитель $(k-k)=0$). Значит,

$$2^k=2\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-i)}{i!}=2\sum_{i=0}^{n}\frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-i)}{i!}\qquad\text{при } k\in\mathbb{N},\quad n\geqslant k-1.$$

Рассмотрим многочлен

$$Q(x)=2\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-i)}{i!}.$$

Это многочлен степени n, причём по доказанному $Q(k)=2^k$, $k=1,2,3,...,n+1$. Следовательно, $P(x)=Q(x)$ как многочлены степени n, совпадающие в $n+1$ точке.

Подставляя $x=n+m+2$ $(m\geqslant 0)$, находим

$$P(n+m+2)=2\sum_{i=0}^{n}C_{n+m+1}^i=2\sum_{i=0}^{n+m+1}C_{n+m+1}^i-2\sum_{i=n+1}^{n+m+1}C_{n+m+1}^i=2^{n+m+2}-2\sum_{i=0}^{m}C_{n+m+1}^i$$

(в последнем равенстве мы снова использовали формулу бинома Ньютона и равенства для биномиальных коэффициентов $C_{n+m+1}^i=C_{n+m+1}^{n+m+1-i}$). При $m=1$ получаем

$$P(n+3)=2^{n+3}-2-2(n+2)=2^{n+3}-2n-6.$$

В частности, для многочлена из условия задачи $n = 9$, $P(12) = 2^{12} - 2 \cdot 9 - 6 = 4072$.

Другой способ решения. Многочлен степени n однозначно определяется своими значениями в $n+1$ точках $k = 1, 2, 3, \ldots, n+1$. Непосредственной подстановкой этих точек убеждаемся, что условию задачи удовлетворяет многочлен (интерполяционный многочлен Лагранжа)

$$\begin{aligned} P(x) = \ & 2\frac{(x-2)(x-3)(x-4)\ldots(x-(n+1))}{(1-2)(1-3)(1-4)\ldots(1-(n+1))} + 2^2\frac{(x-1)(x-3)(x-4)\ldots(x-(n+1))}{(2-1)(2-3)(2-4)\ldots(2-(n+1))} + \\ & + 2^3\frac{(x-1)(x-2)(x-4)\ldots(x-(n+1))}{(3-1)(3-2)(3-4)\ldots(3-(n+1))} + \ldots + \\ & + 2^{n+1}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{(n+1-1)(n+1-2)(n+1-3)\ldots(n+1-n)} = \\ = \ & 2(-1)^n\Bigg(\frac{(x-2)\ldots(x-(n+1))}{n!} - 2^1\frac{(x-1)(x-3)\ldots(x-(n+1))}{1!(n-1)!} + \\ & + 2^2\frac{(x-1)(x-2)(x-4)\ldots(x-(n+1))}{2!(n-2)!} - \ldots + (-1)^n 2^n\frac{(x-1)\ldots(x-n)}{n!}\Bigg). \end{aligned}$$

Его значение в точке $x = n+3$ равно

$$\begin{aligned} P(n+3) = \ & 2(-1)^n\Bigg(\frac{(n+1)n(n-1)\ldots 3\cdot 2}{n!} - 2^1\frac{(n+2)n(n-1)\ldots\cdot 3\cdot 2}{1!(n-1)!} + \\ & + 2^2\frac{(n+2)(n+1)(n-1)\ldots\cdot 3\cdot 2}{2!(n-2)!} - \ldots + (-1)^n 2^n\frac{(n+2)(n+1)\ldots\cdot 4\cdot 3}{n!}\Bigg) = \\ = \ & 2(-1)^n(n+2)(n+1)\left(\frac{1}{n+2} - 2^1C_n^1\cdot\frac{1}{n+1} + 2^2C_n^2\cdot\frac{1}{n} + \ldots + (-1)^n 2^n C_n^n\cdot\frac{1}{2}\right) = \\ = \ & 2(-1)^n(n+2)(n+1)\sum_{k=0}^{n}(-2)^k\frac{C_n^k}{n-k+2} = 2(-1)^n(n+2)(n+1)S(1), \end{aligned}$$

где

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\frac{(-2)^k x^{n-k+2}}{n-k+2}.$$

Поскольку

$$S'(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k\frac{(-2)^k x^{n-k+2}}{n-k+2}\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-2)^k x^{n-k+1} = x(x-2)^n = (x-2)^{n+1} + 2(x-2)^n,$$

с учётом условия $S(0) = 0$ находим $S(x) = \dfrac{(x-2)^{n+2} - (-2)^{n+2}}{n+2} + 2\dfrac{(x-2)^{n+1} - (-2)^{n+1}}{n+1}$. Значит,

$$\begin{aligned} P(n+3) = \ & 2(-1)^n(n+2)(n+1)\left(\frac{(-1)^{n+2} - (-2)^{n+2}}{n+2} + 2\frac{(-1)^{n+1} - (-2)^{n+1}}{n+1}\right) = \\ = \ & -2(n+1)(n+2)\left(\frac{2^{n+2}-1}{n+2} - \frac{2^{n+2}-2}{n+1}\right) = 2(2^{n+2}-1) - 2(n+2) = 2^{n+3} - 2n - 6. \end{aligned}$$

8.2. Известно, что $P(x)$ — многочлен 10-й степени и $P(k) = 2^k$ при всех $k = 1, 2, 3, \ldots, 11$. Найдите $P(13)$.

Ответ. 8166.

8.3. Известно, что $P(x)$ — многочлен 11-й степени и $P(k) = 2^k$ при всех $k = 1, 2, 3, \ldots, 12$. Найдите $P(14)$.

Ответ. 16356.

8.4. Известно, что $P(x)$ — многочлен 12-й степени и $P(k) = 2^k$ при всех $k = 1, 2, 3, \ldots, 13$. Найдите $P(15)$.

Ответ. 32738.

9.1. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках A и B и расположены по разные стороны от этой плоскости. Сумма радиусов данных шаров равна 7, а расстояние между их центрами равно 13. Центр третьего шара радиуса 5 находится в точке C, и он касается внешним образом каждого из двух первых шаров. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Ответ. $\sqrt{30} \approx 5.48$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры, а r_1 и r_2 — радиусы шаров, касающихся плоскости ABC в точках B и A соответственно, $r_3 = 5$ — радиус третьего шара. По условию $r_1 + r_2 = r = 7$, $O_1O_2 = d = 13$. Пусть также $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Из треугольников O_1BC и O_2AC по теореме Пифагора получаем

$$(r_3 + r_1)^2 = r_1^2 + a^2, \qquad (r_3 + r_2)^2 = r_2^2 + b^2,$$

откуда $a^2 + b^2 = 2r_3^2 + 2(r_1 + r_2)r_3$. Используя расположение точек O_1, B, A и O_2, находим

$$(r_1 + r_2)^2 + c^2 = d^2.$$

Следовательно,

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2r_3^2 + 2(r_1 + r_2)r_3 + (r_1 + r_2)^2 - d^2 = 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 7 \cdot 5 + 7^2 - 13^2 = 0.$$

Значит, треугольник ABC прямоугольный, а радиус описанной вокруг него окружности равен половине гипотенузы, т. е.

$$R = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{d^2 - r^2}}{2} = \sqrt{30} \approx 5.48.$$

9.2. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках B и C и расположены по разные стороны от этой плоскости. Сумма радиусов данных шаров равна 7, а расстояние между их центрами равно 17. Центр третьего шара радиуса 8 находится в точке A, и он касается внешним образом каждого из двух первых шаров. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Ответ. $2\sqrt{15} \approx 7.75$.

9.3. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках A и B и расположены по разные стороны от этой плоскости. Сумма радиусов данных шаров равна 9, а расстояние между их центрами равно $\sqrt{305}$. Центр третьего шара радиуса 7 находится в точке C, и он касается внешним образом каждого из двух первых шаров. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Ответ. $2\sqrt{14} \approx 7.48$.

9.4. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках B и C и расположены по разные стороны от этой плоскости. Сумма радиусов данных шаров равна 11, а расстояние между их центрами равно $5\sqrt{17}$. Центр третьего шара радиуса 8 находится в точке A, и он касается внешним образом каждого из двух первых шаров. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Ответ. $2\sqrt{19} \approx 8.72$.

9.5. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках A и B и расположены по разные стороны от этой плоскости. Сумма радиусов данных шаров равна 11, а расстояние между их центрами равно $\sqrt{481}$. Центр третьего шара радиуса 9 находится в точке C, и он касается внешним образом каждого из двух первых шаров. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Ответ. $3\sqrt{10} \approx 9.49$.

9.6. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках B и C и расположены по разные стороны от этой плоскости. Сумма радиусов данных шаров равна 12, а расстояние между их центрами равно $4\sqrt{29}$. Центр третьего шара радиуса 8 находится в точке A, и он касается внешним образом каждого из двух первых шаров. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Ответ. $4\sqrt{5} \approx 8.94$.

9.7. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках A и B и расположены по разные стороны от этой плоскости. Сумма радиусов данных шаров равна 13, а расстояние между их центрами равно $\sqrt{505}$. Центр третьего шара радиуса 8 находится в точке C, и она касается двух первых сфер. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Ответ. $2\sqrt{21} \approx 9.17$.

10.1. Последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ заданы условиями $x_1 = 11$, $y_1 = 7$, $x_{n+1} = 3x_n + 2y_n$, $y_{n+1} = 4x_n + 3y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите остаток от деления числа $y_{1855}^{2018} - 2x_{1855}^{2018}$ на 2018.

Ответ. 1825.

Решение. При всех $n \in \mathbb{N}$ числа x_n и y_n нечётны. Заметим, что

$$2x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 = 2(3x_n + 2y_n)^2 - (4x_n + 3y_n)^2 = 2x_n^2 - y_n^2.$$

Следовательно, $2x_n^2 - y_n^2 = \ldots = 2x_1^2 - y_1^2 = 242 - 49 = 193$.

Пусть $p = 1009$. Это число нечётное и простое, поэтому число $(y_n^2 - 2x_n^2)^p = (-193)^p$ даёт тот же остаток при делении на $2p$, что и $y_n^{2p} - 2^p x_n^{2p}$, так как все биномиальные коэффициенты $C_p^1, \ldots, C_p^{p-1}$ делятся на p. Кроме того, по малой теореме Ферма, 2^p при делении на $2p = 2018$ даёт остаток 2 (и, следовательно, остатки от деления чисел $y_n^{2p} - 2^p x_n^{2p}$ и $y_n^{2p} - 2x_n^{2p}$ одинаковы), а $(-193)^p$ при делении на $2p = 2018$ даёт остаток $2018 - 193 = 1825$.

10.2. Последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ заданы условиями $x_1 = 13$, $y_1 = 9$, $x_{n+1} = 3x_n + 2y_n$, $y_{n+1} = 4x_n + 3y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите остаток от деления числа $y_{1711}^{2018} - 2x_{1711}^{2018}$ на 2018.

Ответ. 1761.

10.3. Последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ заданы условиями $x_1 = 9$, $y_1 = 5$, $x_{n+1} = 3x_n + 2y_n$, $y_{n+1} = 4x_n + 3y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите остаток от деления числа $y_{1818}^{2018} - 2x_{1818}^{2018}$ на 2018.

Ответ. 1881.

10.4. Последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ заданы условиями $x_1 = 5$, $y_1 = 11$, $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$, $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите остаток от деления числа $x_{1777}^{2018} - 2y_{1777}^{2018}$ на 2018.

Ответ. 1801.

10.5. Последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ заданы условиями $x_1 = 7$, $y_1 = 13$, $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$, $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите остаток от деления числа $x_{1762}^{2018} - 2y_{1762}^{2018}$ на 2018.

Ответ. 1729.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2018/2019 учебный год
Задания отборочного этапа для 5–6 классов с ответами и решениями (1-й тур)

1.1. (2 балла) В многодетной семье у кого-то из детей 3 брата и 6 сестёр, а у кого-то — 4 брата и 5 сестёр. Сколько мальчиков в этой семье?

Ответ: 4.

Решение. У мальчиков в семье меньше братьев, чем у девочек, а у девочек меньше сестёр, чем у мальчиков. Поэтому в семье 4 мальчика и 6 девочек.

1.2. В многодетной семье у кого-то из детей 3 брата и 6 сестёр, а у кого-то — 4 брата и 5 сестёр. Сколько девочек в этой семье?

Ответ: 6.

2.1. (14 баллов) Поднимаясь с первого на третий этаж, Петя проходит 36 ступенек. Поднимаясь с первого на свой этаж в этом же подъезде, Вася проходит 72 ступеньки. На каком этаже живёт Вася?

Ответ: 5.

Решение. С первого по третий этажи 36 ступенек — столько же, сколько с третьего по пятый.

2.2. Поднимаясь с первого на четвёртый этаж, Игорь проходит 54 ступеньки. Поднимаясь с первого на свой этаж в этом же подъезде, Никита проходит 108 ступенек. На каком этаже живёт Никита?

Ответ: 7.

3.1. (14 баллов) Света, Катя, Оля, Маша и Таня ходят на математический кружок, в котором более 60% учащихся — мальчики. Какое наименьшее число школьников может быть в этом кружке?

Ответ: 13.

Решение. Пусть M — число мальчиков, D — число девочек в кружке. Тогда $\frac{M}{M+D} > \frac{3}{5}$, следовательно, $M > \frac{3}{2}D \geqslant \frac{15}{2}$. Минимальное возможное значение M равно 8, а минимальное возможное значение D равно 5, всего 13 детей.

3.2. Вася, Ваня, Никита, Олег и Игорь ходят на математический кружок, в котором более 70% учащихся — девочки. Какое наименьшее число школьников может быть в этом кружке?

Ответ: 17.

4.1. (14 баллов) Найдите все целые значения, которые может принимать дробь $\dfrac{8n+157}{4n+7}$ при натуральных n. В ответ запишите сумму найденных значений.

Ответ: 18.

Решение. Имеем $\frac{8n+157}{4n+7} = 2 + \frac{143}{4n+7}$. Поскольку делителями числа 143 являются только числа 1, 11, 13 и 143, целые значения дроби получаются только при $n = 1$ и $n = 34$, они равны соответственно 15 и 3, а их сумма равна 18.

4.2. Найдите все целые значения, которые может принимать дробь $\dfrac{12n+109}{3n+8}$ при натуральных n. В ответ запишите сумму найденных значений.

Ответ: 16.

5.1. (14 баллов) Сторож задержал постороннего и хочет прогнать его. Но попавшийся сказал, что заключил спор с друзьями на 100 монет, что сторож не выгонит его отсюда (если выгонит, то он платит друзьям 100 монет, иначе платят они), и, решив откупиться от сторожа, предложил ему назвать сумму. Какое наибольшее число монет может запросить сторож, чтобы посторонний, руководствуясь лишь выгодой для себя, гарантированно заплатил сторожу?

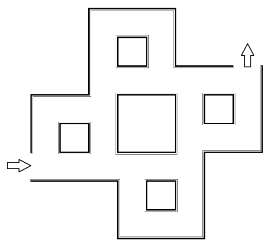
Ответ: 199.

Решение. Если сторож попросит 199 монет, то посторонний, согласившись отдать ему эту сумму, выиграет спор и получит 100 монет. Итого потеряет 99 монет. Если посторонний откажется, то проиграет спор и потеряет 100 монет, то есть для попавшегося это менее выгодно (на 1 монету). Если сторож потребует 200, то посторонний может и отказать, так как разницы в выгоде нет. Если сторож потребует больше, то постороннему выгоднее отказать ему. Сторож может потребовать меньше, но по условию требуется найти наибольшую сумму. Таким образом, ответ — 199 монет.

5.2. Сторож задержал постороннего и хочет прогнать его. Но попавшийся сказал, что заключил спор с друзьями на 150 монет, что сторож не выгонит его отсюда (если выгонит, то он платит друзьям 150 монет, иначе платят они), и, решив откупиться от сторожа, предложил ему назвать сумму. Какое наибольшее число монет может запросить сторож, чтобы посторонний, руководствуясь лишь выгодой для себя, гарантированно заплатил сторожу?

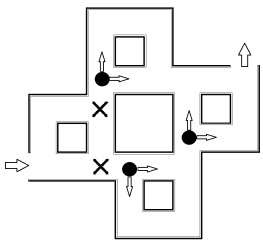
Ответ: 299.

6.1. (14 баллов) На картинке стрелочками отмечены вход и выход из лабиринта. Двигаться по нему можно так, чтобы на этой картинке перемещаться только вправо, вниз или вверх (разворачиваться нельзя). Сколькими различными путями можно пройти этот лабиринт?

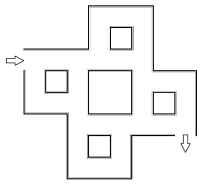


Ответ: 16.

Решение. Назовём место в лабиринте *развилкой*, если далее из него можно двигаться в двух возможных направлениях. Двигаясь после входа вверх или вправо, приходим к одной из развилок, отмеченных на рисунке знаком $\times$. От каждой из них до выхода из лабиринта мы встретим три развилки, отмеченные на рисунке знаком $\bullet$, поэтому всего путей $2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

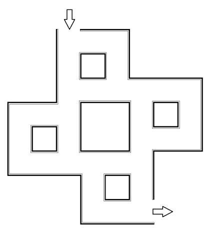


6.2. На картинке стрелочками отмечены вход и выход из лабиринта. Двигаться по нему можно так, чтобы на этой картинке перемещаться только вправо, вверх или вниз (разворачиваться нельзя). Сколькими различными путями можно пройти этот лабиринт?



Ответ: 16.

6.3. На картинке стрелочками отмечены вход и выход из лабиринта. Двигаться по нему можно так, чтобы на этой картинке перемещаться только вниз, влево или вправо (разворачиваться нельзя). Сколькими различными путями можно пройти этот лабиринт?



Ответ: 16.

7.1. (14 баллов) Назовем натуральное число *улиткой*, если его запись состоит из записей трёх последовательных натуральных чисел, приписанных друг к другу в некотором порядке: например, 312 или 121413. Числа-улитки иногда бывают квадратами натуральных чисел: например, $324 = 18^2$ или $576 = 24^2$. Найдите четырёхзначное число-улитку, которое является квадратом некоторого натурального числа.

Ответ: 1089.

Решение. Заметим, что число-улитка может быть четырехзначным только в случае, если три числа, из которых получается его запись, это $8, 9, 10$ (числа $7, 8, 9$ и меньшие ещё будут образовывать трёхзначное число, а $9, 10, 11$ и бо́льшие — уже не менее чем пятизначное). Осталось разобраться с порядком выбранных чисел. Квадрат натурального числа не может оканчиваться на 10 (нулей должно быть чётное число или не должно быть вовсе). Также квадрат не может заканчиваться на цифру 8. Значит, последней должна быть цифра 9. Остаются варианты 8109 и 1089. Поскольку $8109 = 90^2 + 9$ и $1089 = 33^2$, единственное четырёхзначное число-улитка, являющееся квадратом, равно 1089.

7.2. Назовем натуральное число *улиткой*, если его запись состоит из записей трёх последовательных натуральных чисел, приписанных друг к другу в некотором порядке: например, 312 или 121413. Числа-улитки иногда бывают квадратами натуральных чисел, а иногда нет: например, $324 = 18^2$, но $567 = 24^2 - 9$). Найдите нечётное четырёхзначное число-улитку, которое **не** является квадратом никакого натурального числа.

Ответ: 8109.

8.1. (14 баллов) Таблица 1×12 заполнена числами так, что сумма чисел в любых её соседних четырёх клетках равна 11. Некоторые числа в ней стёрли, и остались только три числа:

2						1			0		$*$

Какое число стояло в таблице на месте $*$?

Ответ: 8.

Решение. Если числа x, y, z, t, w расположены в 5 соседних ячейках, то $x+y+z+t = y+z+t+w$. Отсюда $x = w$, то есть каждое число повторяется через 4 клетки. Например, число 2 будет в 1-й, 5-й и 9-й ячейках. Аналогично с другими числами. Значит, в таблица заполнена числами так:

2	0	1	$*$	2	0	1	$*$	2	0	1	$*$

По условию $2 + 0 + 1 + * = 0 + 1 + * + 2 = 1 + * + 2 + 0 = * + 2 + 0 + 1 = 11$. Значит, $* = 8$.

8.2. Таблица 1×12 заполнена числами так, что сумма чисел в любых её соседних четырёх клетках равна 12. Некоторые числа в ней стёрли, и остались только три числа:

2					0					1	$*$

Какое число стояло в таблице на месте $*$?

Ответ: 9.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2018/2019 учебный год
Задания отборочного этапа для 7–8 классов с ответами и решениями (1-й тур)

1.1. (4 балла) Поднимаясь с первого на третий этаж, Петя проходит 36 ступенек. Поднимаясь с первого на свой этаж в этом же доме, Вася проходит 72 ступеньки. На каком этаже живёт Вася?

Ответ: 5.

Решение. С первого по третий этажи 36 ступенек — столько же, сколько с третьего по пятый.

1.2. Поднимаясь с первого на четвёртый этаж, Игорь проходит 54 ступеньки. Поднимаясь с первого на свой этаж в этом же доме, Никита проходит 108 ступенек. На каком этаже живёт Никита?

Ответ: 7.

2.1. (5 баллов) Отношение сторон прямоугольника равно $3:4$, а его диагональ равна 9. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

Ответ: 5.4.

Решение. Если $5x = 9$ — диагональ прямоугольника, то меньшая сторона равна $3x = \frac{27}{5} = 5.4$.

2.2. Отношение сторон прямоугольника равно $3:4$, а его диагональ равна 11. Найдите бóльшую сторону прямоугольника.

Ответ: 8.8.

3.1. (13 баллов) У Ани есть краски синего, зелёного и красного цветов. Она хочет покрасить деревянный кубик так, чтобы после покраски у кубика было по две грани каждого цвета. Сколькими различными способами она может это сделать? Способы раскраски, получающиеся поворотом кубика, считаются одинаковыми.

Ответ: 6.

Решение. Красный напротив красного, синий напротив синего, зелёный напротив зелёного — один способ. Красный напротив красного, синий напротив зелёного — один способ и ещё два аналогичных способа. Против каждого цвета есть грань как одного, так и другого цвета из двух оставшихся — два способа. Всего 6 способов покрасить.

3.2. У Яны есть краски синего, зелёного, жёлтого и красного цветов. Она хочет покрасить деревянный кубик так, чтобы после покраски у кубика было по две грани синего и зелёного цветов и по одной грани жёлтого и красного цветов. Сколькими различными способами она может это сделать? Способы раскраски, получающиеся поворотом кубика, считаются одинаковыми.

Ответ: 8.

4.1. (13 баллов) Сторож задержал постороннего и хочет прогнать его. Но попавшийся сказал, что заключил спор с друзьями на 100 монет, что сторож не выгонит его отсюда (если выгонит, то он платит друзьям 100 монет, иначе платят они), и, решив откупиться от сторожа, предложил ему назвать сумму. Какое наибольшее число монет может запросить сторож, чтобы посторонний, руководствуясь лишь выгодой для себя, гарантированно заплатил сторожу?

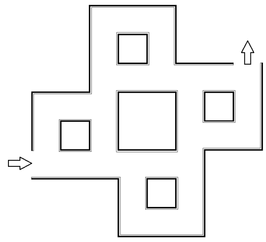
Ответ: 199.

Решение. Если сторож попросит 199 монет, то посторонний, согласившись отдать ему эту сумму, выиграет спор и получит 100 монет. Итого потеряет 99 монет. Если посторонний откажется, то проиграет спор и потеряет 100 монет, то есть для попавшегося это менее выгодно (на 1 монету). Если сторож потребует 200, то посторонний может и отказать, так как разницы в выгоде нет. Если сторож потребует больше, то постороннему выгоднее отказать ему. Сторож может потребовать меньше, но по условию требуется найти наибольшую сумму. Таким образом, ответ — 199 монет.

4.2. Сторож задержал постороннего и хочет прогнать его. Но попавшийся сказал, что заключил спор с друзьями на 150 монет, что сторож не выгонит его отсюда (если выгонит, то он платит друзьям 150 монет, иначе платят они), и, решив откупиться от сторожа, предложил ему назвать сумму. Какое наибольшее число монет может запросить сторож, чтобы посторонний, руководствуясь лишь выгодой для себя, гарантированно заплатил сторожу?

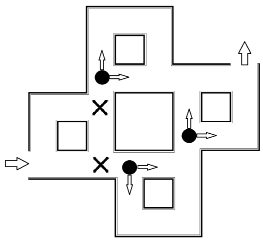
Ответ: 299.

5.1. (13 баллов) На картинке стрелочками отмечены вход и выход из лабиринта. Двигаться по нему можно так, чтобы на этой картинке перемещаться только вправо, вниз или вверх (разворачиваться нельзя). Сколькими различными путями можно пройти этот лабиринт?

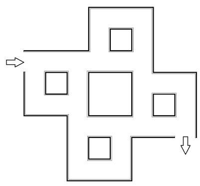


Ответ: 16.

Решение. Назовём место в лабиринте *развилкой*, если далее из него можно двигаться в двух возможных направлениях. Двигаясь после входа вверх или вправо, приходим к одной из развилок, отмеченных на рисунке знаком $\times$. От каждой из них до выхода из лабиринта мы встретим три развилки, отмеченные на рисунке знаком $\bullet$, поэтому всего путей $2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

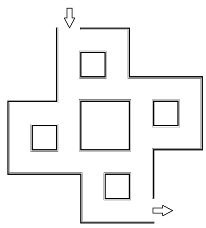


5.2. На картинке стрелочками отмечены вход и выход из лабиринта. Двигаться по нему можно так, чтобы на этой картинке перемещаться только вправо, вверх или вниз (разворачиваться нельзя). Сколькими различными путями можно пройти этот лабиринт?



Ответ: 16.

5.3. На картинке стрелочками отмечены вход и выход из лабиринта. Двигаться по нему можно так, чтобы на этой картинке перемещаться только вниз, влево или вправо (разворачиваться нельзя). Сколькими различными путями можно пройти этот лабиринт?



Ответ: 16.

6.1. (13 баллов) Через сколько минут после 17:00 в следующий раз угол между часовой и минутной стрелками будет точно таким же?

Ответ: $54\frac{6}{11} \approx 54.55$.

Решение. В 17:00 угол между часовой и минутной стрелками равен $\frac{5}{12} \cdot 360^\circ = 150^\circ$. Ближайший момент, когда угол будет таким же, наступит в течение ближайшего часа, после того как минутная стрелка обгонит часовую. Пусть это случилось спустя x мин. Составляем уравнение: $\left(\frac{x}{60} - \frac{5+\frac{x}{60}}{12}\right) \cdot 360^\circ = 150^\circ$, откуда $x = 54\frac{6}{11}$ мин.

6.2. За сколько минут до 16:00 в предыдущий раз угол между часовой и минутной стрелками был точно таким же?

Ответ: $21\frac{9}{11} \approx 21.82$.

7.1. (13 баллов) Найдите $\frac{S_1}{S_2}$, где

$$S_1=\frac{1}{2^{18}}+\frac{1}{2^{17}}-\frac{1}{2^{16}}+\ldots+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2},\qquad S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{2^{17}}-\frac{1}{2^{18}}$$

(в обеих суммах знаки слагаемых чередуются так: $+,+,-,+,+,-,+,+,-,\ldots$).

Ответ: -0.2.

Решение. Для суммы S_1 имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}S_1-\frac{1}{2^{19}}\right)-\frac{1}{2^{19}}\right)+\frac{1}{2^{19}}=S_1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}.$$

Решая это уравнение относительно S_1, получим

$$S_1=\frac{1-2^{18}}{7\cdot 2^{18}}.$$

Аналогично для суммы S_2 находим

$$2(2(2S_2-1)-1)+1=S_2-\frac{1}{2^{16}}-\frac{1}{2^{17}}+\frac{1}{2^{18}}\quad\Longrightarrow\quad S_2=\frac{5\cdot(2^{18}-1)}{7\cdot 2^{18}}.$$

Поэтому $\frac{S_1}{S_2}=\frac{-1}{5}=-0.2$.

7.2. Найдите $\frac{S_2}{S_1}$, где

$$S_1=\frac{1}{3^{15}}+\frac{1}{3^{14}}-\frac{1}{3^{13}}+\ldots+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3},\qquad S_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{13}}+\frac{1}{3^{14}}-\frac{1}{3^{15}}$$

(в обеих суммах знаки слагаемых чередуются так: $+,+,-,+,+,-,+,+,-,\ldots$).

Ответ: -2.2.

8.1. (13 баллов) Найдите наименьшее такое натуральное число, что после умножения его на 9 получается число, записанное теми же цифрами, но в некотором другом порядке.

Ответ: 1089.

Решение. Заметим, что число должно начинаться с единицы, иначе умножение на 9 увеличит число цифр. После умножения 1 на 9 получим 9, следовательно, в первоначальном числе есть цифра 9. Число 19 не подходит, значит двузначные числа не подходят. Рассмотрим трёхзначные числа. Вторая цифра (после единицы) исходного числа не превосходит 1, иначе получаем увеличение числа цифр. Значит, таких чисел всего два: $\overline{1a9}$, где $a=0$ или $a=1$. Оба числа 109, 119 не удовлетворяют требованию задачи. Рассмотрим трёхзначные числа вида $\overline{1ab9}$, где $a=0$ или $a=1$. Среди них нужно найти наименьшее, удовлетворяющее условию задачи. Но уже при $a=0$ получаем число 1089, это и есть ответ ($1089\cdot 9=9801$).

8.2. Найдите наименьшее такое натуральное число, кратное 9, что частное от его деления на 9 записывается теми же цифрами, но в некотором другом порядке.

Ответ: 9801.

9.1. (13 баллов) Поверхность круглого стола разбита на 9 одинаковых секторов, в которых последовательно по часовой стрелке написаны числа от 1 до 9. За столом сидят 9 игроков с номерами 1, 2, ..., 9, идущими по часовой стрелке. Стол может вращаться вокруг своей оси в обе стороны, при этом игроки остаются на месте. Игроки сидят за столом на одинаковых расстояниях друг от друга, поэтому, когда стол перестает вращаться, напротив каждого сектора оказывается ровно один игрок, и он получает то число монет, которое написано на этом секторе. Известно, что после 11 вращений стола игрок №4 получил 90 монет, а игрок №8 — 35 монет. Сколько монет получил игрок №1?

Ответ: 57.

Решение. Если в результате вращения стола одна монета досталась кому-то из игроков с номерами от 5 до 8, то игрок №8 получил на 5 монет меньше, чем игрок №4, а если одна монета досталась кому-то ещё, то №8 получил на 4 монеты больше, чем игрок №4. Пусть вращений, когда одна монета досталась кому-то из игроков с номерами от 5 до 8, было ровно k. Тогда получаем уравнение $-5k+4(11-k)=35-90$, из которого $k=11$. Значит, при всех 11 вращениях каждый игрок с 9 по 4 (если идти по часовой стрелке) получил ровно на 11 монет больше, чем предыдущий. Значит, у первого игрока 35+11+11=57 монет.

9.2. Поверхность круглого стола разбита на 10 одинаковых секторов, в которых последовательно по часовой стрелке написаны числа от 1 до 10. За столом сидят 10 игроков с номерами 1, 2, ..., 10, идущими по часовой стрелке. Стол может вращаться вокруг своей оси в обе стороны, при этом игроки остаются на месте. Игроки сидят за столом на одинаковых расстояниях друг от друга, поэтому, когда стол перестает вращаться, напротив каждого сектора оказывается ровно один игрок, и он получает то число монет, которое написано на этом секторе. Известно, что после 12 вращений стола игрок №4 получил 107 монет, а игрок №8 — 35 монет. Сколько монет получил игрок №2?

Ответ: 83.

9.3. Поверхность круглого стола разбита на 10 одинаковых секторов, в которых последовательно по часовой стрелке написаны числа от 1 до 10. За столом сидят 10 игроков с номерами 1,2, ..., 10, идущими по часовой стрелке. Стол может вращаться вокруг своей оси в обе стороны, при этом игроки остаются на месте. Игроки сидят за столом на одинаковых расстояниях друг от друга, поэтому, когда стол перестает вращаться, напротив каждого сектора оказывается ровно один игрок, и он получает то число монет, которое написано на этом секторе. Известно, что после 11 вращений стола игрок №4 получил 97 монет, а игрок №8 — 31 монету. Сколько монет получил игрок №1?

Ответ: 64.

9.4. Поверхность круглого стола разбита на 11 одинаковых секторов, в которых последовательно по часовой стрелке написаны числа от 1 до 11. За столом сидят 11 игроков с номерами 1,2, ..., 11, идущими по часовой стрелке. Стол может вращаться вокруг своей оси в обе стороны, при этом игроки остаются на месте. Игроки сидят за столом на одинаковых расстояниях друг от друга, поэтому, когда стол перестает вращаться, напротив каждого сектора оказывается ровно один игрок, и он получает то число монет, которое написано на этом секторе. Известно, что после 9 вращений стола игрок №4 получил 87 монет, а игрок №8 — 24 монеты. Сколько монет получил игрок №1?

Ответ: 60.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2018/2019 учебный год
Задания отборочного этапа для 9 классов с ответами и решениями (1-й тур)

1.1. (2 балла) Сколько корней имеет уравнение $x^2 - x\sqrt{5} + \sqrt{2} = 0$?

Ответ: 0.

Решение. Поскольку $D = 5 - 4\sqrt{2} < 0$, уравнение не имеет корней.

1.2. Сколько корней имеет уравнение $x^2 + x\sqrt{6} + \sqrt{2} = 0$?

Ответ: 2.

2.1. (2 балла) Найдите площадь треугольника, ограниченного прямой $y = 9 - 3x$ и осями координат.

Ответ: 13.5.

Решение. Прямая пересекает оси координат в точках $(0, 9)$ и $(3, 0)$, поэтому $S = \frac{3\cdot 9}{2} = 13.5$.

2.2. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямой $y = 15 - 5x$ и осями координат.

Ответ: 22.5.

3.1. (12 баллов) Найдите x, если $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{x}}}}} = \dfrac{16}{37}$.

Ответ: -0.25.

Решение. Последовательно находим:

$$2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{x}}}} = \frac{37}{16}, \quad 3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{x}}} = \frac{16}{5}, \quad 4+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{x}} = 5, \quad 5+\frac{1}{x} = 1, \quad x = -\frac{1}{4}.$$

3.2. Найдите x, если $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{x}}}}} = \dfrac{42}{97}$.

Ответ: -0.5.

3.3. Найдите x, если $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{x}}}}} = \dfrac{29}{67}$.

Ответ: $-\frac{1}{3} \approx -0.33$.

4.1. (12 баллов) В трапеции $ABCD$ на основаниях $AD = 17$ и $BC = 9$ отмечены точки E и F соответственно так, что $MENF$ — прямоугольник, где M и N — середины диагоналей трапеции. Найдите длину отрезка EF.

Ответ: 4.

Решение. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований, поэтому $MN = \frac{AD-BC}{2} = 4$. Так как $MENF$ — прямоугольник, то его диагонали равны. Значит, $EF = MN = 4$.

4.2. В трапеции $ABCD$ на основаниях $AD = 23$ и $BC = 13$ отмечены точки E и F соответственно так, что $ENFM$ — прямоугольник, где M и N — середины диагоналей трапеции. Найдите длину отрезка EF.

Ответ: 5.

4.3. В трапеции $ABCD$ на основаниях $AD = 21$ и $BC = 15$ отмечены точки E и F соответственно так, что $EMFN$ — прямоугольник, где M и N — середины диагоналей трапеции. Найдите длину отрезка EF.

Ответ: 3.

5.1. (12 баллов) Сторож задержал постороннего и хочет прогнать его. Но попавшийся сказал, что заключил спор с друзьями на 100 монет, что сторож не выгонит его отсюда (если выгонит, то он платит друзьям 100 монет, иначе платят они), и, решив откупиться от сторожа, предложил ему назвать сумму. Какое наибольшее число монет может запросить сторож, чтобы посторонний, руководствуясь лишь выгодой для себя, гарантированно заплатил сторожу?

Ответ: 199.

Решение. Если сторож попросит 199 монет, то посторонний, согласившись, отдаст ему эту сумму, но выиграет спор и получит 100 монет. Итого потеряет 99 монет. Если посторонний откажется, то проиграет спор и потеряет 100 монет, то есть для попавшегося это менее выгодно (на 1 монету). Если сторож потребует 200, то посторонний может и отказать, так как разницы в выгоде нет. Если сторож потребует больше, то постороннему выгоднее отказать ему. Сторож может потребовать меньше, но по условию требуется найти наибольшую сумму. Таким образом, ответ — 199 монет.

5.2. Сторож задержал постороннего и хочет прогнать его. Но попавшийся сказал, что заключил спор с друзьями на 150 монет, что сторож не выгонит его отсюда (если выгонит, то он платит друзьям 150 монет, иначе платят они), и, решив откупиться от сторожа, предложил ему назвать сумму. Какое наибольшее число монет может запросить сторож, чтобы посторонний, руководствуясь лишь выгодой для себя, гарантированно заплатил сторожу?

Ответ: 299.

6.1. (12 баллов) Через сколько минут после 17:00 в следующий раз угол между часовой и минутной стрелками будет точно таким же?

Ответ: $54\frac{6}{11} \approx 54.55$.

Решение. В 17:00 угол между часовой и минутной стрелками равен $\frac{5}{12} \cdot 360^\circ = 150^\circ$. Ближайший момент, когда угол будет таким же, наступит в течение ближайшего часа, после того как минутная стрелка обгонит часовую. Пусть это случилось спустя x мин. Тогда

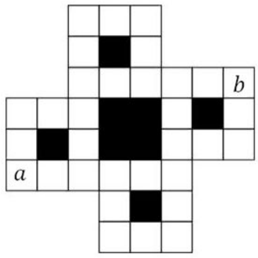
$$\left(\frac{x}{60} - \frac{5+\frac{x}{60}}{12}\right) \cdot 360^\circ = 150^\circ,$$

откуда $x = 54\frac{6}{11}$ мин.

6.2. За сколько минут до 16:00 в предыдущий раз угол между часовой и минутной стрелками был точно таким же?

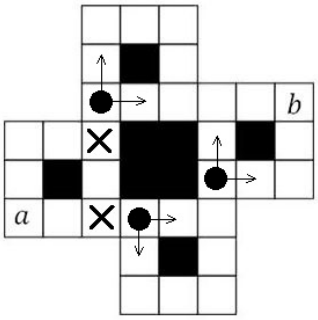
Ответ: $21\frac{9}{11} \approx 21.82$.

7.1. (12 баллов) Фишка может ходить на одну клетку вправо, вверх или вниз. Сколькими способами можно пройти от клетки a до клетки b на поле, изображённом на рисунке, минуя закрашенные клетки? (Фишка не может ходить по тем клеткам, на которых уже была.)

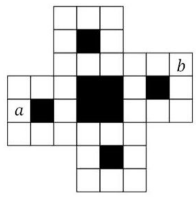


Ответ: 16.

Решение. Назовём клетку на поле *развилкой*, если далее из неё можно двигаться в двух возможных направлениях. Двигаясь от клетки a вверх или вправо, приходим к одной из развилок, отмеченных на рисунке знаком $\times$. Далее от каждой из них до клетки b мы встретим три развилки, отмеченные на рисунке знаком $\bullet$ (стрелками указаны возможные направления движения), поэтому всего способов $2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

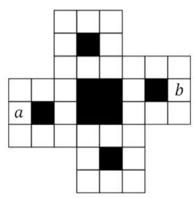


7.2. Фишка может ходить на одну клетку вправо, вниз или вверх. Сколькими способами можно пройти от клетки a до клетки b на поле, изображённом на рисунке, минуя закрашенные клетки? (Фишка не может ходить по тем клеткам, на которых уже была.)



Ответ: 16.

7.3. Фишка может ходить на одну клетку вверх, вниз или вправо. Сколькими способами можно пройти от клетки a до клетки b на поле, изображённом на рисунке, минуя закрашенные клетки? (Фишка не может ходить по тем клеткам, на которых уже была.)



Ответ: 16.

8.1. (12 баллов) Найдите наименьшее такое натуральное число, что после умножения его на 9 получается число, записанное теми же цифрами, но в некотором другом порядке.

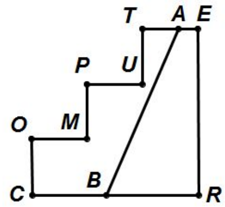
Ответ: 1089.

Решение. Заметим, что число должно начинаться с единицы, иначе умножение на 9 увеличит число цифр. После умножения 1 на 9 получим 9, следовательно, в первоначальном числе есть цифра 9. Число 19 не подходит, значит двузначные числа не подходят. Рассмотрим трёхзначные числа. Вторая цифра (после единицы) исходного числа не превосходит 1, иначе получаем увеличение числа цифр. Значит, таких чисел всего два: $\overline{1a9}$, где $a = 0$ или $a = 1$. Оба числа 109, 119 не удовлетворяют требованию задачи. Рассмотрим трёхзначные числа вида $\overline{1ab9}$, где $a = 0$ или $a = 1$. Среди них нужно найти наименьшее, удовлетворяющее условию задачи. Но уже при $a = 0$ получаем число 1089, это и есть ответ $(1089 \cdot 9 = 9801)$.

8.2. Найдите наименьшее такое натуральное число, кратное 9, что частное от его деления на 9 записывается теми же цифрами, но в некотором другом порядке.

Ответ: 9801.

9.1. (12 баллов) В восьмиугольнике $COMPUTER$, изображённом на рисунке, все внутренние углы равны 90° или 270°, а также



$$CO = OM = MP = PU = UT = TE = \sqrt{2}.$$

Внутри отрезков TE и CR отмечены точки A и B соответственно так, что площади частей, на которые отрезок AB разбивает восьмиугольник, равны. Найдите разность периметров этих частей.

Ответ: $2\sqrt{2} \approx 2.83$.

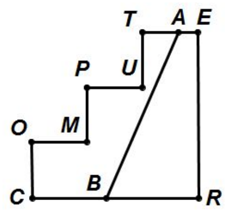
Решение. Пусть $CO = a = \sqrt{2}$ и отрезок AB делит восьмиугольник на две равновеликие части, причём $AE = x$. Заметим, что $ER = CR = 3a$, а площадь восьмиугольника равна 6, значит, площадь трапеции $AERB$ равна $3a^2$. С другой стороны,

$$S_{AERB} = \frac{1}{2}\big(AE + BR\big) \cdot ER = \frac{3a}{2}\big(x + BR\big),$$

откуда $BR = 2a - x$, $BC = x + a$, $AT = a - x$. Значит,

$$P_{BCOMPUTA} - P_{AERB} = (x + a + 5a + a - x + AB) - (x + 3a + 2a - x + AB) = 2a = 2\sqrt{2} \approx 2.83.$$

9.2. В восьмиугольнике $COMPUTER$, изображённом на рисунке, все внутренние углы равны 90° или 270°, а также



$$CO = OM = MP = PU = UT = TE = \sqrt{3}.$$

Внутри отрезков TE и CR отмечены точки A и B соответственно так, что площади частей, на которые отрезок AB разбивает восьмиугольник, равны. Найдите разность периметров этих частей.

Ответ: $2\sqrt{3} \approx 3.46$.

10.1. (12 баллов) Поверхность круглого стола разбита на n одинаковых секторов, в которых последовательно по часовой стрелке написаны числа от 1 до n ($n \geqslant 4$). За столом сидят n игроков с номерами $1, 2, \ldots, n$, идущими по часовой стрелке. Стол может вращаться вокруг своей оси в обе стороны, при этом игроки остаются на месте. Игроки сидят за столом на одинаковых расстояниях друг от друга, поэтому, когда стол перестаёт вращаться, напротив каждого сектора оказывается ровно один игрок, и он получает то число монет, которое написано на этом секторе. После m вращений стола игрок №1 получил на 74 монеты меньше, чем игрок №4, а игрок №2 получил на 50 монет меньше, чем игрок №3. Найдите m, если известно, что игроку №4 по 3 монеты выпадало вдвое большее количество раз, чем по 2 монеты, но вдвое меньшее, чем по одной.

Ответ: 69.

Решение. Пусть игроку №3 одна монета доставалась ровно k раз, то мы получаем уравнение $(m-k)-(n-1)k = 50$. Ровно в $7k$ случаях одна монета доставалась кому-то из игроков 2, 3, 4, тогда получаем уравнение $3(m-7k)-7k(n-3) = 74$. Раскрываем скобки, приводим подобные и получаем систему из двух уравнений $m - nk = 50, 3m - 7nk = 74$. Умножаем перовое равенство на 7, вычитаем из него второе и получаем $m = 69$.

10.2. Поверхность круглого стола разбита на n одинаковых секторов, в которых последовательно по часовой стрелке написаны числа от 1 до n ($n \geqslant 4$). За столом сидят n игроков с номерами $1, 2, \ldots, n$, идущими по часовой стрелке. Стол может вращаться вокруг своей оси в обе стороны, при этом игроки остаются на месте. Игроки сидят за столом на одинаковых расстояниях друг от друга, поэтому, когда стол перестаёт вращаться, напротив каждого сектора оказывается ровно один игрок, и он получает то число монет, которое написано на этом секторе. После m вращений стола игрок №1 получил на 71 монету меньше, чем игрок №4, а игрок №2 получил на 40 монет меньше, чем игрок №3. Найдите m, если известно, что игроку №4 по 3 монеты выпадало втрое большее количество раз, чем по 2 монеты, но вдвое меньшее, чем по одной.

Ответ: 47.

10.3. Поверхность круглого стола разбита на n одинаковых секторов, в которых последовательно по часовой стрелке написаны числа от 1 до n ($n \geqslant 4$). За столом сидят n игроков с номерами 1, 2, …, n, идущими по часовой стрелке. Стол может вращаться вокруг своей оси в обе стороны, при этом игроки остаются на месте. Игроки сидят за столом на одинаковых расстояниях друг от друга, поэтому, когда стол перестаёт вращаться, напротив каждого сектора оказывается ровно один игрок, и он получает то число монет, которое написано на этом секторе. После m вращений стола игрок №1 получил на 73 монеты меньше, чем игрок №4, а игрок №2 получил на 40 монет меньше, чем игрок №3. Найдите m, если известно, что игроку №4 по 3 монеты выпадало такое же количество раз, как и по 2 монеты, но вдвое меньшее, чем по одной.

Ответ: 87.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2018/2019 учебный год
Задания отборочного этапа для 10–11 классов с ответами и решениями (2-й тур)

1.1. Из цифр 1, 3 и 5 составляют различные трёхзначные числа, в каждом из которых все цифры различны. Найдите сумму всех таких трёхзначных чисел.

Ответ. 1998 (все возможные числа: 135, 153, 315, 351, 513, 531).

1.2. Из цифр 1, 2 и 5 составляют различные трёхзначные числа, в каждом из которых все цифры различны. Найдите сумму всех таких трёхзначных чисел.

Ответ. 1776 (все возможные числа: 125, 152, 215, 251, 512, 521).

2.1. Найдите площадь прямоугольного треугольника, один катет которого на 1/3 больше другого и на 1/3 меньше гипотенузы.

Ответ. $\frac{2}{3} \approx 0.67$.

2.2. Найдите площадь прямоугольного треугольника, один катет которого на 2/3 больше другого и на 2/3 меньше гипотенузы.

Ответ. $\frac{8}{3} \approx 2.67$.

3.1. Убывающая последовательность a, b, c — геометрическая прогрессия, а последовательность $577a$, $\frac{2020b}{7}$, $\frac{c}{7}$ — арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ. 4039.

Решение. Пусть $b = aq$, $c = aq^2$. Свойства арифметической прогрессии и условия задачи приводят к уравнению $2 \cdot \frac{2020aq}{7} = 577a + \frac{aq^2}{7} \Leftrightarrow q^2 - 4040q + 4039 = 0$, откуда $q = 1$ или $q = 4039$. Убывающей геометрическая прогрессия может быть только при $q = 4039$ (если, например, $a = -1$).

3.2. Убывающая последовательность a, b, c — геометрическая прогрессия, а последовательность $451a$, $\frac{2030b}{9}$, $\frac{c}{9}$ — арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ. 4059.

3.3. Убывающая последовательность a, b, c — геометрическая прогрессия, а последовательность $311a$, $\frac{1711b}{11}$ и $\frac{c}{11}$ — арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ. 3421.

3.4. Убывающая последовательность a, b, c — геометрическая прогрессия, а последовательность $641a$, $\frac{2244b}{7}$ и $\frac{c}{7}$ — арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ. 4487.

3.5. Убывающая последовательность a, b, c — геометрическая прогрессия, а последовательность $671a$, $\frac{3020b}{9}$ и $\frac{c}{9}$ — арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ. 6039.

3.6. Убывающая последовательность a, b, c — геометрическая прогрессия, а последовательность $279a$, $\frac{1535b}{11}$ и $\frac{c}{11}$ — арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

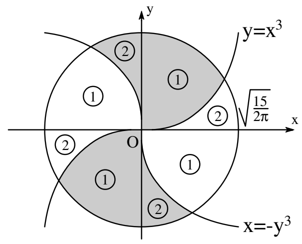
Ответ. 3069.

4.1. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} 2\pi(x^2 + y^2) \leqslant 15, \\ x^4 - y^4 \leqslant xy - x^3y^3. \end{cases}$$

Ответ. 3.75.

Решение. Первое множество есть внутренность круга радиуса $\sqrt{\frac{15}{2\pi}}$. Второе неравенство равносильно



$$x^3(x+y^3) \leqslant y(x+y^3) \quad \Leftrightarrow \quad (x^3-y)(x+y^3) \leqslant 0.$$

Изобразив на плоскости кривые $y=x^3$ и $x=-y^3$, получаем, что системе удовлетворяет заштрихованная область. Учитывая, что отмеченные цифрой 1 области одинаковы, а также одинаковы области, отмеченные цифрой 2, получаем, что искомая площадь равна площади полукруга радиуса $\sqrt{\frac{15}{2\pi}}$, то есть равна $\frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\right)^2 = \frac{15}{4}$.

4.2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} \pi(x^2+y^2) \leqslant 17, \\ x^4-y^4 \leqslant x^3y^3-xy. \end{cases}$$

Ответ. 8.5.

4.3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} \pi(x^2+y^2) \leqslant 23, \\ x^4-y^4 \geqslant xy-x^3y^3. \end{cases}$$

Ответ. 11.5.

4.4. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} 2\pi(x^2+y^2) \leqslant 29, \\ x^4-y^4 \geqslant x^3y^3-xy. \end{cases}$$

Ответ. 7.25.

5.1. Каков наибольший объём пирамиды $SABC$, у которой $AB=5$, $AC=8$ и $\sin\angle BAC = \frac{4}{5}$, а все боковые рёбра SA, SB, SC образуют с плоскостью основания одинаковые углы, не превышающие $60°$?

Ответ. $10\sqrt{\frac{137}{3}} \approx 67.58$.

Решение. Максимум объёма реализуется при угле $\alpha = 60°$, тогда высота пирамиды равна $R\operatorname{tg}\alpha = R\sqrt{3}$, где R — радиус описанной вокруг треугольника окружности. При заданных условиях возможны два треугольника — остроугольный и тупоугольный, площади которых совпадают (они равны $\frac{5\cdot 8}{2}\cdot\frac{4}{5} = 16$), но радиус описанной окружности будет больше у тупоугольного треугольника. Тогда

$$BC^2 = 5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = 25+64+48 = 137, \quad \text{и} \quad R = \frac{\sqrt{137}}{2\cdot\frac{4}{5}} = \frac{5\sqrt{137}}{8}.$$

Итоговый объём равен $V = \frac{1}{3}\cdot16\cdot\frac{5\sqrt{137}}{8}\sqrt{3} = 10\sqrt{\frac{137}{3}} \approx 67.58$.

5.2. Каков наибольший объём пирамиды $SABC$, у которой $AB=5$, $AC=8$ и $\sin\angle BAC = \frac{3}{5}$, а все боковые рёбра SA, SB, SC образуют с плоскостью основания одинаковые углы, не превышающие $60°$?

Ответ. $10\sqrt{51} \approx 71.41$.

5.3. Каков наибольший объём пирамиды $SABC$, у которой $AB=3$, $AC=5$ и $\sin\angle BAC = \frac{4}{5}$, а все боковые рёбра SA, SB, SC образуют с плоскостью основания одинаковые углы, не превышающие $60°$?

Ответ. $\frac{5\sqrt{39}}{2} \approx 15.61$.

5.4. Каков наибольший объём пирамиды $SABC$, у которой $AB = 3$, $AC = 5$ и $\sin \angle BAC = \frac{3}{5}$, а все боковые рёбра SA, SB, SC образуют с плоскостью основания одинаковые углы, не превышающие $60°$?

Ответ. $\frac{5\sqrt{174}}{4} \approx 16.49$.

6.1. На 19 карточках написаны числа $15, 16, 17, \ldots, 33$ соответственно (по одному числу на карточке). Участники математического кружка Вася, Петя и Миша собрались разделить между собой все эти карточки так, чтобы каждому досталась хотя бы одна карточка и ни у кого не нашлось пары карточек, разность чисел на которых нечётна. Сколько существует способов такого дележа?

Ответ. 4596.

Решение. По условию получается, что у каждого из участников будут либо таблички только с чётными числами, либо только с нечётными. Выбираем участника (3 способа), отдаём ему все 9 табличек с чётными числами. Оставшиеся 10 табличек с нечётными числами распределяем между двумя остальными – это можно сделать 2^{10} способами. Но при этом будет 2 способа, когда кто-то из этих двух ребят останется без табличек. Значит, получается $3 \cdot (2^{10} - 2)$ способов.

Аналогично отдаём все таблички с нечётными числами одному участнику, а 9 остальных распределяем между двумя остальными. Здесь получается $3 \cdot (2^9 - 2)$ способов.

Всего способов: $3 \cdot (2^{10} + 2^9 - 4) = 3 \cdot 4 \cdot (2^8 + 2^7 - 1) = 4596$.

6.2. На 17 карточках написаны числа $10, 11, 12, \ldots, 26$ соответственно (по одному числу на карточке). Участники математического кружка Вася, Петя и Миша собрались разделить между собой все эти карточки так, чтобы каждому досталась хотя бы одна карточка и ни у кого не нашлось пары карточек, разность чисел на которых нечётна. Сколько существует способов такого дележа?

Ответ. 2292.

6.3. На 23 карточках написаны числа $13, 14, 15, \ldots, 35$ соответственно (по одному числу на карточке). Участники математического кружка Вася, Петя и Миша собрались разделить между собой все эти карточки так, чтобы каждому досталась хотя бы одна карточка и ни у кого не нашлось пары карточек, разность чисел на которых нечётна. Сколько существует способов такого дележа?

Ответ. 18420.

6.4. На 21 карточке написаны числа $11, 12, 13, \ldots, 31$ соответственно (по одному числу на карточке). Участники математического кружка Вася, Петя и Миша собрались разделить между собой все эти карточки так, чтобы каждому досталась хотя бы одна карточка и ни у кого не нашлось пары карточек, разность чисел на которых нечётна. Сколько существует способов такого дележа?

Ответ. 9204.

6.5. На 19 карточках написаны числа $14, 15, 16, \ldots, 32$ соответственно (по одному числу на карточке). Участники математического кружка Вася, Петя и Миша собрались разделить между собой все эти карточки так, чтобы каждому досталась хотя бы одна карточка и ни у кого не нашлось пары карточек, разность чисел на которых нечётна. Сколько существует способов такого дележа?

Ответ. 4596.

6.6. На 23 карточках написаны числа $12, 13, 14, \ldots, 34$ соответственно (по одному числу на карточке). Участники математического кружка Вася, Петя и Миша собрались разделить между собой все эти карточки так, чтобы каждому досталась хотя бы одна карточка и ни у кого не нашлось пары карточек, разность чисел на которых нечётна. Сколько существует способов такого дележа?

Ответ. 18420.

7.1. Числа p и q подобраны так, что парабола $y = px - x^2$ пересекает гиперболу $xy = q$ в трёх различных точках A, B и C, причём сумма квадратов сторон треугольника ABC равна 324, а точка пересечения его медиан находится на расстоянии 2 от начала координат. Найдите произведение pq.

Ответ. 42.

Решение. Система $y = px - x^2$, $xy = q$ сводится к кубическому уравнению $x^3 - px^2 + q = 0$, имеющему, по условию задачи, три различных корня x_1, x_2, x_3, так как у любых двух разных точек кривой $y = px - x^2$ абсциссы различны. По теореме Виета,

$$x_1 + x_2 + x_3 = p, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0, \quad x_1x_2x_3 = -q.$$

Обозначим $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Заметим, что если хотя бы одно из чисел x_1, x_2 или x_3 равно 0, то $q = 0$, и у кубического уравнения будет лишь два корня, что противоречит условию задачи. Тогда, в силу системы,

$$y_1 = \frac{q}{x_1}, \qquad y_2 = \frac{q}{x_2}, \qquad y_3 = \frac{q}{x_3},$$

откуда

$$y_1 + y_2 + y_3 = q\,\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = 0; \quad y_1y_2 + y_2y_3 + y_1y_3 = q^2\,\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} = -pq.$$

Точка M пересечения медиан треугольника ABC имеет координаты

$$\left(\frac{1}{3}\,(x_1 + x_2 + x_3), \frac{1}{3}\,(y_1 + y_2 + y_3)\right).$$

С учетом теоремы Виета имеем $M\left(\frac{p}{3}, 0\right)$. Теперь вычислим сумму квадратов длин сторон треугольника ABC. Она равна

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (y_3 - y_1)^2 =$$

$$= 2(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 6(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) + 2(y_1 + y_2 + y_3)^2 - 6(y_1y_2 + y_2y_3 + y_1y_3) = 2p^2 + 6pq.$$

Исходя из условия задачи, $\left|\frac{p}{3}\right| = 2$, $2p^2 + 6pq = 324$, откуда находим две пары: $(p; q) = (6; 7)$ или $(p; q) = (-6; -7)$. В обоих случаях $pq = 42$.

7.2. Числа p и q подобраны так, что парабола $y = qx - x^2$ пересекает гиперболу $xy = p$ в трёх различных точках A, B и C, причём сумма квадратов сторон треугольника ABC равна 378, а точка пересечения его медиан находится на расстоянии 3 от начала координат. Найдите произведение pq.

Ответ. 36.

7.3. Числа p и q подобраны так, что парабола $y = px - x^2$ пересекает гиперболу $xy = q$ в трёх различных точках A, B и C, причём сумма квадратов сторон треугольника ABC равна 432, а точка пересечения его медиан находится на расстоянии 4 от начала координат. Найдите произведение pq.

Ответ. 24.

7.4. Числа p и q подобраны так, что парабола $y = qx - x^2$ пересекает гиперболу $xy = p$ в трёх различных точках A, B и C, причём сумма квадратов сторон треугольника ABC равна 252, а точка пересечения его медиан находится на расстоянии 2 от начала координат. Найдите произведение pq.

Ответ. 30.

7.5. Числа p и q подобраны так, что парабола $y = px - x^2$ пересекает гиперболу $xy = q$ в трёх различных точках A, B и C, причем сумма квадратов сторон треугольника ABC равна 270, а точка пересечения его медиан находится на расстоянии 3 от начала координат. Найдите произведение pq.

Ответ. 18.

7.6. Числа p и q подобраны так, что парабола $y = qx - x^2$ пересекает гиперболу $xy = p$ в трёх различных точках A, B и C, причем сумма квадратов сторон треугольника ABC равна 360, а точка пересечения его медиан находится на расстоянии 4 от начала координат. Найдите произведение pq.

Ответ. 12.

8.1. Для всех троек (x, y, z), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 2\sin x = \operatorname{tg} y, \\ 2\cos y = \operatorname{ctg} z, \\ \sin z = \operatorname{tg} x, \end{cases}$$

найдите наименьшее значение выражения $\cos x - \sin z$.

Ответ. $-\frac{5\sqrt{3}}{6} \approx -1.44$.

Решение. Возводя в квадрат первое уравнение и добавляя к обеим частям 1, с учетом второго уравнения имеем

$$4\sin^2 x + 1 = \operatorname{tg}^2 y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y} = 4\operatorname{tg}^2 z.$$

Проделывая ту же процедуру с третьим уравнением, находим

$$\sin^2 z + 1 = \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad 4\cos^2 x = \frac{4}{\sin^2 z + 1}.$$

Складывая полученные соотношения, получаем

$$5 = 4\operatorname{tg}^2 z + \frac{4}{\sin^2 z + 1} = \frac{4\sin^2 z}{1 - \sin^2 z} + \frac{4}{\sin^2 z + 1} = \frac{4 + 4\sin^4 z}{1 - \sin^4 z} \quad \Rightarrow \quad 9\sin^4 z = 1,\ \sin^2 z = \frac{1}{3}.$$

Подставляя эту величину в предыдущие формулы, вычисляем $\cos^2 x = \dfrac{3}{4}$, $\operatorname{tg}^2 y = 1$. Стало быть, в решения (x, y, z) данной в условии системы могут входить только числа

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad y = \pm\frac{\pi}{4} + \pi l, \quad z = \pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi m,\ k, l, m \in \mathbb{Z},$$

и, поэтому возможны только случаи

$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Теперь проанализируем систему по знакам левых и правых частей:

- если x лежит в I четверти, то либо y лежит в I четверти, z лежит в I четверти, либо y лежит в III четверти, z лежит во II четверти;
- если x лежит во II четверти, то либо y лежит в I четверти, z лежит в III четверти, либо y лежит в III четверти, z лежит в IV четверти;
- если x лежит в III четверти, то либо y лежит во II четверти, z лежит во II четверти, либо y лежит в IV четверти, z лежит в I четверти;

- если x лежит в IV четверти, то либо y лежит во II четверти, z лежит в IV четверти, либо y лежит в IV четверти, z лежит в III четверти.

Взяв тройку $x = \dfrac{7\pi}{6}$, $y = -\dfrac{\pi}{4}$, $z = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (прямой проверкой убеждаемся, что она удовлетворяет системе из условия задачи), у которой x в III четверти, а z в I четверти, получаем минимальное из возможных значений $\cos x - \sin z$, равное $-\sqrt{3}/2 - 1/\sqrt{3} = -5/2\sqrt{3}$.

8.2. Для всех троек (x, y, z), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \sqrt{3}\sin x = \operatorname{tg} y, \\ 2\sin y = \operatorname{ctg} z, \\ \sin z = 2\operatorname{tg} x, \end{cases}$$

найдите наименьшее значение выражения $\cos x - \cos z$.

Ответ. $-\frac{7\sqrt{2}}{6} \approx -1.65$.

8.3. Для всех троек (x, y, z), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 2\cos x = \operatorname{ctg} y, \\ 2\sin y = \operatorname{tg} z, \\ \cos z = \operatorname{ctg} x, \end{cases}$$

найдите наименьшее значение выражения $\sin x + \cos z$.

Ответ. $-\frac{5\sqrt{3}}{6} \approx -1.44$.

8.4. Для всех троек (x, y, z), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos x = \operatorname{ctg} y, \\ 2\cos y = \operatorname{tg} z, \\ \cos z = 2\operatorname{ctg} x, \end{cases}$$

найдите наименьшее значение выражения $\sin x + \sin z$.

Ответ. $-\frac{7\sqrt{2}}{6} \approx -1.65$.

9.1. Сколько существует натуральных чисел $n \in [20182019; 20192018]$, для которых число $\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ чётно? (Здесь через $[x]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Ответ. 4999.

Решение. Рассмотрим последовательности

$$x_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad y_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad a_n = x_n + y_n.$$

Поскольку $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, имеем $y_n \in (0; 1)$ при чётных n, $y_n \in (-1; 0)$ при нечётных n. Тогда $[x_n] = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ при чётных n равно $a_n - 1$, а при нечётных — просто a_n. Кроме того, имеем $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных n. Так как $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, то $a_3 = 4$ и получаем такую последовательность чётности для a_n $(n = 1, 2, \ldots)$: неч, неч, чёт, неч, неч, чёт, …

Тогда $[x_n]$ связано с a_n так:

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
a_n	чет	нечет	нечет	чет	нечет	нечет
$[x_n]$	$a_n - 1$	a_n	$a_n - 1$	a_n	$a_n - 1$	a_n
$[x_n]$	нечет	нечет	чет	чет	чет	нечет

Так как $x_n = a_n - y_n$, то для номеров n вида $6k$, $6k+1$, $6k+5$ число $[x_n]$ нечётно, а для номеров n вида $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$ чётно. Поскольку $20182019 = 6k_1 + 5$, $20192018 = 6k_2 + 2$, среди чисел $n = 20182019, \ldots, 20192018$ искомых $3 \cdot \frac{20192018 - 20182022}{6} + 1 = 4999$.

9.2. Сколько существует натуральных чисел $n \in [20182018; 20192019]$, для которых число $\left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n\right]$ нечётно? (Здесь через $[x]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Ответ. 5001.

9.3. Сколько существует натуральных чисел $n \in [20042018; 20192005]$, для которых число $\left[\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n\right]$ чётно? (Здесь через $[x]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Ответ. 74994.

9.4. Сколько существует натуральных чисел $n \in [20042005; 20182019]$, для которых число $\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ нечётно? (Здесь через $[x]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Ответ. 70007.

9.5. Сколько существует натуральных чисел $n \in [20052004; 20192018]$, для которых число $\left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n\right]$ чётно? (Здесь через $[x]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Ответ. 70007.

9.6. Сколько существует натуральных чисел $n \in [20052019; 20182004]$, для которых число $\left[\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n\right]$ нечётно? (Здесь через $[x]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Ответ. 64993.

10.1. Найдите наименьшее из решений неравенства

$$\frac{-\log_2(120-2x\sqrt{32-2x})^2+\left|\log_2\dfrac{120-2x\sqrt{32-2x}}{(x^2-2x+8)^3}\right|}{5\log_7(71-2x\sqrt{32-2x})-2\log_2(120-2x\sqrt{32-2x})} \geqslant 0.$$

Ответ: $-13-\sqrt{57} \approx -20.55$.

Решение. Обозначим $f(x) = -\log_2(x+120)$. Тогда, с учетом условия $71-2x\sqrt{32-2x} > 0$, исходное неравенство можно переписать в виде

$$\frac{2f(-2x\sqrt{32-2x})+|3f(x^2-2x-112)-f(-2x\sqrt{32-2x})|}{(2\log_2 7)\cdot f(-2x\sqrt{32-2x})-5f(-2x\sqrt{32-2x}-49)} \geqslant 0.$$

Для функции $h(x) = -2x\sqrt{32-2x}$ имеем

$$h'(x) = -2\sqrt{32-2x}+\frac{2x}{\sqrt{32-2x}} = \frac{6x-64}{\sqrt{32-2x}},$$

точкой глобального минимума функции $h(x)$ будет $x_* = \dfrac{32}{3}$, $h(x_*) = -\dfrac{64}{3}\sqrt{\dfrac{32}{3}} \approx -69.67$. Для функции $g(x) = x^2-2x-112$, очевидно, справедливо $g(x) \geqslant -113$. Таким образом, при всех допустимых x выражения

$$-2x\sqrt{32-2x},\ x^2-2x-112,\ -2x\sqrt{32-2x}-49$$

лежат в множестве $(-119; +\infty)$, на котором функция $f(x)$ убывает и отрицательна. Тогда

$$(2\log_2 7)\cdot f(-2x\sqrt{32-2x})-5f(-2x\sqrt{32-2x}-49) < (2\log_2 7-5)\cdot f(-2x\sqrt{32-2x}-49) < 0$$

при всех допустимых x, поэтому исходное неравенство равносильно неравенству

$$|3f(x^2-2x-112)-f(-2x\sqrt{32-2x})| \leqslant -2f(-2x\sqrt{32-2x}),$$

которое, в свою очередь, эквивалентно системе

$$\begin{cases} 3f(x^2-2x-112) \leqslant -f(-2x\sqrt{32-2x}), \\ f(x^2-2x-112) \geqslant f(-2x\sqrt{32-2x}). \end{cases}$$

Первое неравенство этой системы из-за отрицательности $f(x)$ выполнено при всех допустимых x, второе из-за ее убывания равносильно неравенству $x^2-2x-112 \leqslant -2x\sqrt{32-2x}$. Его можно переписать в виде $(x+\sqrt{32-2x})^2 \leqslant 144$, что эквивалентно системе

$$\begin{cases} \sqrt{32-2x} \leqslant 12-x, \\ \sqrt{32-2x} \geqslant -12-x, \end{cases}$$

решениями которой будут $x \in [-13-\sqrt{57}; 8]$.

10.2. Найдите наименьшее из решений неравенства

$$\frac{-\log_2(105+2x\sqrt{x+19})^3 + \left|\log_2 \dfrac{105+2x\sqrt{x+19}}{(x^2+x+3)^4}\right|}{9\log_5(76+2x\sqrt{x+19}) - 4\log_2(105+2x\sqrt{x+19})} \geqslant 0.$$

Ответ: $\dfrac{-21+\sqrt{33}}{2} \approx -7.63.$

10.3. Найдите наибольшее из решений неравенства

$$\frac{-\log_3(100+2x\sqrt{2x+25})^3 + \left|\log_3 \dfrac{100+2x\sqrt{2x+25}}{(x^2+2x+4)^4}\right|}{3\log_6(50+2x\sqrt{2x+25}) - 2\log_3(100+2x\sqrt{2x+25})} \geqslant 0.$$

Ответ. $12+4\sqrt{3} \approx 18.93.$

10.4. Найдите наибольшее из решений неравенства

$$\frac{-\log_3(80-2x\sqrt{30-2x})^2 + \left|\log_3 \dfrac{80-2x\sqrt{30-2x}}{(x^2-2x+29)^3}\right|}{7\log_7(65-2x\sqrt{30-2x}) - 4\log_3(80-2x\sqrt{30-2x})} \geqslant 0.$$

Ответ. $8-\sqrt{13} \approx 4.39.$

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2018/2019 учебный год
Задания отборочного этапа для 5–6 классов с ответами и решениями (2-й тур)

1.1. (2 балла) В девятиэтажном доме на каждом этаже по 4 квартиры. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 180 квартир?

Ответ: 5.

Решение. Число подъездов равно $180 : (4 \cdot 9) = 5$.

1.2. В десятиэтажном доме на каждом этаже по 3 квартиры. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 120 квартир?

Ответ: 4.

2.1. (14 баллов) Митя старше Шуры на 11 лет. Когда Мите было столько же лет, сколько Шуре сейчас, он был старше неё в два раза. Сколько лет Мите?

Ответ: 33.

Решение. Шура 11 лет назад была вдвое моложе, чем сейчас. Значит, ей 22 года, а Мите 33.

2.2. Митя старше Шуры на 11 лет. Когда Мите было столько же лет, сколько сейчас Шуре, он был старше неё в два раза. Сколько лет Шуре?

Ответ: 22.

2.3. Через 28 лет сыну будет столько же лет, сколько сейчас отцу. Сколько лет отцу, если сейчас он в пять раз старше сына?

Ответ: 35.

2.4. Через 28 лет дочери будет столько же лет, сколько сейчас отцу. Сколько лет дочери, если сейчас она в пять раз младше отца?

Ответ: 7.

3.1. (14 баллов) Представьте в виде несократимой дроби число $\dfrac{201920192019}{191719171917}$. В ответ запишите знаменатель получившейся дроби.

Ответ: 639.

Решение. Имеем

$$\frac{201920192019}{191719171917} = \frac{2019 \cdot 100010001}{1917 \cdot 100010001} = \frac{2019}{1917} = \frac{3 \cdot 673}{3 \cdot 639} = \frac{673}{639}.$$

Так как $639 = 3^2 \cdot 71$ и 673 не делится на 3 и 71, то получившаяся дробь несократима.

3.2. Представьте в виде несократимой дроби число $\dfrac{201920192019}{199219921992}$. В ответ запишите знаменатель получившейся дроби.

Ответ: 664.

3.3. Представьте в виде несократимой дроби число $\dfrac{201920192019}{200420042004}$. В ответ запишите знаменатель получившейся дроби.

Ответ: 668.

4.1. (14 баллов) Сколько существует шестизначных чисел, сумма цифр которых равна 51?

Ответ: 56.

Решение. Поскольку максимальная сумма цифр шестизначного числа равна $6 \cdot 9 = 54$, искомые числа суть 699999, 789999, 888999, а также все числа, получающиеся из них перестановкой цифр. Из цифр первого из этих чисел состоят 6 шестизначных чисел (цифра 6 может стоять на любом из 6 мест), из цифр второго — $6 \cdot 5 = 30$ чисел (6 вариантов расположения одной из цифр 7, 8, и ещё 5 для другой), из цифр третьего — $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ чисел (6 вариантов для одной цифры 8, ещё 5 вариантов для другой, 4 варианта для третьей, но поскольку эти цифры одинаковы, мы учли каждое число $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ раз). Итого $6 + 30 + 20 = 56$ чисел.

4.2. Сколько существует пятизначных чисел, сумма цифр которых равна 42?

Ответ: 35.

5.1. (14 баллов) Дедка тянул репку, а к нему последовательно присоединялись бабка, внучка, Жучка и кошка. Тянут-потянут, вытянуть не могут! Позвала кошка мышку. Тянут-потянут, вытащили репку! Известно, что каждый последующий участник тянет на четверть слабее предыдущего. Сколько следовало позвать из деревни мужиков, тянущих с той же силой, что и дедка, чтобы они вместе с дедкой и кошкой смогли вытащить репку?

Ответ: 2.

Решение. Бабка, внучка, Жучка и мышка тянут с суммарной силой, составляющей

$$\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{2019}{1024} = 1\frac{995}{1024}$$

от силы дедки. Значит, нужно позвать двух мужиков.

5.2. Дедка тянул репку, а к нему последовательно присоединялись бабка, внучка, Жучка и кошка. Тянут-потянут, вытянуть не могут! Позвала кошка мышку. Тянут-потянут, вытащили репку! Известно, что каждый последующий участник тянет на четверть слабее предыдущего. Сколько следовало позвать из деревни мужиков, тянущих с той же силой, что и дедка, чтобы они вместе с дедкой и мышкой смогли вытащить репку?

Ответ: 3.

6.1. (14 баллов) Найдите наименьшее натуральное число, запись которого содержит 5 нулей и 7 единиц, причём сумма цифр, стоящих в чётных разрядах, равна сумме цифр, стоящих в нечётных разрядах.

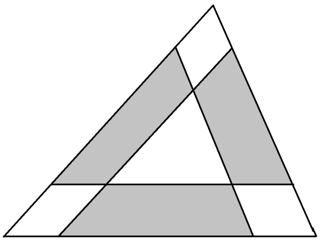
Ответ: 1000001111131.

Решение. Число 7 не делится на 2, поэтому в записи числа не может быть ровно $5 + 7 = 12$ цифр. Рассмотрим случай, когда запись содержит 13 цифр. Если «новая» цифра — это нуль, то снова получаем противоречие. Значит, «новая» цифра должна быть не меньше 1. Поэтому для получения наименьшего числа подбираем его так, чтобы эта цифра была как можно правее в записи числа. Попробуем найти искомое число в виде $100000111111x$. Приравнивая суммы цифр на чётных и на нечётных местах, получим уравнение $4 + x = 3$, откуда $x = 1$, что невозможно. Проверим число вида $a = 10000011111x1$. Подсчитывая суммы цифр на чётных и на нечётных местах, получаем $5 = 2 + x \Rightarrow x = 3$. Значит, искомое число 1000001111131.

6.2. Найдите наименьшее натуральное число, запись которого содержит 3 нуля и 9 единиц, причём сумма цифр, стоящих в чётных разрядах, равна сумме цифр, стоящих в нечётных разрядах.

Ответ: 1000111111131.

7.1. (14 баллов) Миша нарисовал треугольник с периметром 11 и так разрезал его на части тремя прямыми разрезами, параллельными сторонам, как показано на рисунке. Периметры трёх закрашенных фигур (трапеций) оказались равны 5, 7 и 9. Найдите периметр маленького треугольника, получившегося после разрезания.



Ответ: 10.

Решение. Так как у параллелограммов противоположные стороны равны, то у каждой получившейся трапеции боковые стороны равны соответствующим отрезкам на сторонах исходного треугольника. Тогда получается, что сумма периметров трех трапеций равна сумме периметра исходного треугольника (сумма больших оснований и боковых сторон трех трапеций) и периметра нового треугольника (сумма меньших оснований трапеций). Значит периметр нового треугольника равен сумме периметров трапеций минус периметр исходного треугольника: $a+b+c-P$.

7.2. Миша нарисовал треугольник с периметром 13 и так разрезал его на части тремя прямыми разрезами, параллельными сторонам, как показано на рисунке. Периметры трёх закрашенных фигур (трапеций) оказались равны 7, 8 и 9. Найдите периметр маленького треугольника, получившегося после разрезания.

Ответ: 11.

7.3. Миша нарисовал треугольник с периметром 15 и так разрезал его на части тремя прямыми разрезами, параллельными сторонам, как показано на рисунке. Периметры трёх закрашенных фигур (трапеций) оказались равны 6, 8 и 10. Найдите периметр маленького треугольника, получившегося после разрезания.

Ответ: 9.

8.1. (14 баллов) Двое проводят время за игрой: по очереди называют не превосходящие 100 простые числа так, чтобы последняя цифра числа, названного одним игроком, была равна первой цифре числа, которое следующим ходом называет второй (кроме самого первого простого числа, названного в игре). Повторять уже названные ранее числа нельзя. Проигрывает тот, кто не может назвать по этим правилам очередное простое число. Докажите, что один из игроков может действовать так, чтобы гарантированно обеспечить себе выигрыш, и найдите наименьшее возможное количество простых чисел, которые будут использованы обоими игроками в такой игре.

Ответ: 3.

Решение. Опишем выигрышную стратегию для первого игрока. Сначала первый игрок называет простое число, заканчивающееся на 9 и отличное от 79 (например, 19). Поскольку среди чисел 90, …, 99 простым является только число 97, следующим ходом второй игрок должен назвать это число. Тогда третьим ходом первый игрок называет 79, и второй проигрывает. За меньшее число ходов первый игрок выиграть не может, так как для любой цифры от 1 до 9 существует простое число из первой сотни, которое начинается с этой цифры.

8.2. Двое проводят время за игрой: по очереди называют не превосходящие 100 простые числа так, чтобы последняя цифра числа, названного одним игроком, была равна первой цифре числа, которое следующим ходом называет второй (кроме самого первого простого числа, названного в игре). Повторять уже названные ранее числа нельзя. Проигрывает тот, кто не может назвать по этим правилам очередное простое число. Докажите, что один из игроков может действовать так, чтобы гарантированно обеспечить себе выигрыш, и найдите наименьшее возможное количество простых чисел, которые этот игрок назовёт в такой игре.

Ответ: 2.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2018/2019 учебный год
Задания отборочного этапа для 7–8 классов с ответами и решениями (2-й тур)

1.1. (4 балла) Митя старше Шуры на 11 лет. Когда Мите было столько же лет, сколько Шуре сейчас, он был старше неё в два раза. Сколько лет Мите?

Ответ: 33.

Решение. Шура 11 лет назад была вдвое моложе, чем сейчас. Значит, ей 22 года, а Мите 33.

1.2. Митя старше Шуры на 11 лет. Когда Мите было столько же лет, сколько сейчас Шуре, он был старше неё в два раза. Сколько лет Шуре?

Ответ: 22.

2.1. (5 баллов) Одна сторона прямоугольника на 20 % меньше другой, а его площадь равна $4\frac{1}{20}$. Найдите большую сторону прямоугольника.

Ответ: 2.25.

Решение. Если a — искомая сторона, то из условия задачи $0{,}8a^2 = \frac{81}{20}$, откуда $a^2 = \frac{81}{16}$, $a = \frac{9}{4}$.

2.2. Одна сторона прямоугольника на 60 % меньше другой, а его площадь равна $1\frac{9}{40}$. Найдите большую сторону прямоугольника.

Ответ: 1.75.

3.1. (13 баллов) Найдите наибольшее натуральное n, удовлетворяющее неравенству $n^{300} < 3^{500}$.

Ответ: 6.

Решение. Неравенство равносильно следующему: $n^3 < 3^5 = 243$. Поскольку $6^3 = 216 < 243 < 7^3 = 289$, искомым является $n = 6$.

3.2. Найдите наименьшее натуральное n, удовлетворяющее неравенству $n^{300} > 5^{200}$.

Ответ: 3.

4.1. (13 баллов) Числитель несократимой дроби возвели в куб, а знаменатель увеличили на 3. В результате дробь удвоилась. Найдите значение исходной дроби, если её числитель и знаменатель — натуральные числа.

Ответ: $\frac{2}{3} \approx 0.67$.

Решение. По условию $2 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b+3}$, откуда $a^2 = \frac{2(b+3)}{b} = 2 + \frac{6}{b}$. Поэтому 6 делится на b. Если $b = 1$, 2 или 6, то $a^2 = 8$, 5 или 3 соответственно. Таких целых a не существует. Если $b = 3$, то $a = 2$. Искомая дробь: $\frac{2}{3}$.

4.2. Знаменатель несократимой дроби возвели в куб, а числитель увеличили на 2. В результате дробь стала в три раза меньше. Найдите значение исходной дроби, если её числитель и знаменатель — натуральные числа.

Ответ: $\frac{1}{3} \approx 0.33$.

5.1. (13 баллов) Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 11 и запись которого содержит 5 нулей и 7 единиц. (Можно использовать признак делимости на 11: число делится на 11, если разность между суммой цифр, стоящих в чётных разрядах, и суммой цифр, стоящих в нечётных разрядах, делится на 11.)

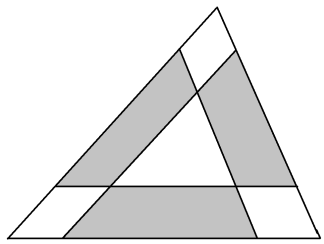
Ответ: 1000001111131.

Решение. Число 7 не делится на 2, поэтому в записи числа не может быть ровно $5+7=12$ цифр. Рассмотрим случай, когда запись содержит 13 цифр. Если «новая» цифра — это нуль, то снова получаем противоречие. Значит, «новая» цифра должна быть не меньше 1. Поэтому для получения наименьшего числа подбираем его так, чтобы эта цифра была как можно правее в записи числа. Попробуем найти искомое число в виде $100000111111x$. Приравнивая суммы цифр на чётных и на нечётных местах, получим уравнение $4+x=3$, откуда $x=1$, что невозможно. Проверим число вида $a=10000011111x1$. Подсчитывая суммы цифр на чётных и на нечётных местах, получаем $5=2+x \Rightarrow x=3$. Значит, искомое число 1000001111131.

5.2. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 11 и запись которого содержит 3 нуля и 9 единиц. (Можно использовать признак делимости на 11: число делится на 11, если разность между суммой цифр, стоящих в чётных разрядах, и суммой цифр, стоящих в нечётных разрядах, делится на 11.)

Ответ: 1000111111131.

6.1. (13 баллов) Миша нарисовал треугольник с периметром 11 и так разрезал его на части тремя прямыми разрезами, параллельными сторонам, как показано на рисунке. Периметры трёх закрашенных фигур (трапеций) оказались равны 5, 7 и 9. Найдите периметр маленького треугольника, получившегося после разрезания.



Ответ: 10.

Решение. Так как у параллелограммов противоположные стороны равны, то у каждой получившейся трапеции боковые стороны равны соответствующим отрезкам на сторонах исходного треугольника. Тогда получается, что сумма периметров трех трапеций равна сумме периметра исходного треугольника (сумма больших оснований и боковых сторон трех трапеций) и периметра нового треугольника (сумма меньших оснований трапеций). Значит периметр нового треугольника равен сумме периметров трапеций минус периметр исходного треугольника: $a+b+c-P$.

6.2. Миша нарисовал треугольник с периметром 13 и так разрезал его на части тремя прямыми разрезами, параллельными сторонам, как показано на рисунке. Периметры трёх закрашенных фигур (трапеций) оказались равны 7, 8 и 9. Найдите периметр маленького треугольника, получившегося после разрезания.

Ответ: 11.

6.3. Миша нарисовал треугольник с периметром 15 и так разрезал его на части тремя прямыми разрезами, параллельными сторонам, как показано на рисунке. Периметры трёх закрашенных фигур (трапеций) оказались равны 6, 8 и 10. Найдите периметр маленького треугольника, получившегося после разрезания.

Ответ: 9.

7.1. (13 баллов) У Юры есть необычные часы с несколькими минутными стрелками, двигающимися в разных направлениях. Юра посчитал, что за один час минутные стрелки попарно совпали ровно 54 раза. Какое наибольшее число минутных стрелок может быть на Юриных часах?

Ответ: 28.

Решение. Пусть какие-то две стрелки совпали, тогда через 30 секунд они совпадут вновь. Следовательно, стрелки в каждой такой паре совпадут ровно 2 раза за минуту. Таким образом, если n стрелок двигаются в одну сторону, а m стрелок — в другую, то $2mn=54$, $mn=27$. Следовательно, n может быть равно 1, 3, 9 или 27. Наибольшая сумма $m+n$ получается при $n=1$, $m=27$ (или наоборот) и равна 28.

7.2. У Юры есть необычные часы с несколькими минутными стрелками, двигающимися в разных направлениях. Юра посчитал, что за один час минутные стрелки попарно совпали ровно 54 раза. Какое наименьшее число минутных стрелок может быть на Юриных часах?

Ответ: 12.

7.3. У Юры есть необычные часы с несколькими минутными стрелками, двигающимися в разных направлениях. Юра посчитал, что за один час минутные стрелки попарно совпали ровно 66 раз. Какое наибольшее число минутных стрелок может быть на Юриных часах?

Ответ: 34.

7.4. У Юры есть необычные часы с несколькими минутными стрелками, двигающимися в разных направлениях. Юра посчитал, что за один час минутные стрелки попарно совпали ровно 66 раз. Какое наименьшее число минутных стрелок может быть на Юриных часах?

Ответ: 14.

8.1. (13 баллов) Двое проводят время за игрой: по очереди называют не превосходящие 100 простые числа так, чтобы последняя цифра числа, названного одним игроком, была равна первой цифре числа, которое следующим ходом называет второй (кроме самого первого простого числа, названного в игре). Повторять уже названные ранее числа нельзя. Проигрывает тот, кто не может назвать по этим правилам очередное простое число. Докажите, что один из игроков может действовать так, чтобы гарантированно обеспечить себе выигрыш, и найдите наименьшее возможное количество простых чисел, которые будут использованы обоими игроками в такой игре.

Ответ: 3.

Решение. Опишем выигрышную стратегию для первого игрока. Сначала первый игрок называет простое число, заканчивающееся на 9 и отличное от 79 (например, 19). Поскольку среди чисел 90, …, 99 простым является только число 97, следующим ходом второй игрок должен назвать это число. Тогда третьим ходом первый игрок называет 79, и второй проигрывает. За меньшее число ходов первый игрок выиграть не может, так как для любой цифры от 1 до 9 существует простое число из первой сотни, которое начинается с этой цифры.

8.2. Двое проводят время за игрой: по очереди называют не превосходящие 100 простые числа так, чтобы последняя цифра числа, названного одним игроком, была равна первой цифре числа, которое следующим ходом называет второй (кроме самого первого простого числа, названного в игре). Повторять уже названные ранее числа нельзя. Проигрывает тот, кто не может назвать по этим правилам очередное простое число. Докажите, что один из игроков может действовать так, чтобы гарантированно обеспечить себе выигрыш, и найдите наименьшее возможное количество простых чисел, которые этот игрок назовёт в такой игре.

Ответ: 2.

9.1. (13 баллов) Сколькими способами можно разместить восемь из девяти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в таблице 4×2 (4 строки, 2 столбца) так, чтобы сумма цифр в каждой строке, начиная со второй, была на 1 больше, чем в предыдущей?

Ответ: 64.

Решение. Сумма всех девяти чисел равна 45. Обозначим через x сумму двух чисел в первой строке, а через a то единственное из девяти чисел число, которое мы не размещаем в фигуре. Тогда $x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 45 - a$, откуда $4x + a = 39$. Так как a — целое число от 1 до 9, то получаем 2 возможных варианта: либо $x = 9$, $a = 3$, либо $x = 8$, $a = 7$.

Если $a = 3$, то мы должны расставить числа 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а сумма чисел в строках должна быть равна соответственно 9, 10, 11 и 12. Возможные варианты для чисел первой строки: $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 4 + 5$.

Если в первой строке стоят 1 и 8, то во второй строке должны стоять 4 и 6, в третьей 2 и 9, в последней 5 и 7.

Если в первой строке стоят 2 и 7, то во второй строке должны стоять 1 и 9 (при других вариантах нельзя подобрать числа для третьей строки), в третьей 5 и 6, в последней 4 и 8.

Если в первой строке стоят 4 и 5, то во второй строке могут быть 1 и 9 или 2 и 8. Но и в том, и в другом случае числа для третьей строки найти нельзя.

Если $a = 7$, то мы должны расставить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, а сумма чисел в строках должна быть равна соответственно 8, 9, 10 и 11. Сумма чисел в первой строке равна $8 = 5+3 = 6 + 2$.

Если в первой строке стоят 3 и 5, то во второй строке должны стоять 1 и 8, в третьей 6 и 4, в последней 2 и 9.

Если в первой строке стоят 6 и 2, то во второй строке могут стоять 1 и 8 или 4 и 5. Если там стоят 1 и 8, то невозможно подобрать числа в следующей строке. Значит, там стоят 4 и 5, тогда в следующей строке стоят 1 и 9, а в последней 3 и 8.

Таким образом, всего получилось 4 варианта расстановки чисел без учета порядка чисел в строках. Так как в каждой строке числа можно менять местами, получается по $2^4 = 16$ вариантов для каждой расстановки. В итоге получаем 64 варианта.

9.2. Сколькими способами можно разместить восемь из девяти цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 в таблице 4×2 (4 строки, 2 столбца) так, чтобы сумма цифр в каждой строке, начиная со второй, была на 2 больше, чем в предыдущей?

Ответ: 48.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2018/2019 учебный год
Задания отборочного этапа для 9 классов с ответами и решениями (2-й тур)

1.1. (2 балла) Из цифр 1, 3 и 5 составляют различные трёхзначные числа, в каждом из которых все цифры различны. Найдите сумму всех таких трёхзначных чисел.

Ответ: 1998.

Решение. Все возможные числа: 135, 153, 315, 351, 513, 531.

1.2. Из цифр 1, 2 и 5 составляют различные трёхзначные числа, в каждом из которых все цифры различны. Найдите сумму всех таких трёхзначных чисел.

Ответ: 1776.

2.1. (2 балла) В треугольнике один из углов меньше 50°, другой — меньше 70°. Найдите косинус третьего угла, если его синус равен $\frac{4}{7}$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{33}}{7} \approx -0.82$.

Решение. Если $\sin\alpha = \frac{4}{7}$ и $\alpha > 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$, то $|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{33}}{7}$ и $\cos\alpha < \frac{1}{2}$, поэтому $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{33}}{7}$.

2.2. В треугольнике один из углов меньше 40°, другой — меньше 80°. Найдите косинус третьего угла, если его синус равен $\frac{5}{8}$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{39}}{8} \approx -0.78$.

3.1. (12 баллов) Число

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{2017}{2018!}$$

записали в виде несократимой дроби с натуральными числителем и знаменателем. Найдите две последние цифры числителя.

Ответ: 99.

Решение. Имеем

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{2017}{2018!} = \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2017!} - \frac{1}{2018!}\right) = 1 - \frac{1}{2018!} = \frac{2018!-1}{2018!}.$$

В итоге получили несократимую дробь, а последние две цифры числа $2018! - 1$ — это две девятки.

3.2. Число

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{2018}{2019!}$$

записали в виде несократимой дроби с натуральными числителем и знаменателем. Найдите три последние цифры числителя.

Ответ: 999.

4.1. (12 баллов) В прямоугольнике $ABCD$ на продолжении стороны CD за точку D отмечена точка E. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке K, а биссектриса угла ADE пересекает продолжение стороны AB в точке M. Найдите BC, если $MK = 8$ и $AB = 3$.

Ответ: $\sqrt{55} \approx 7.42$.

Решение. Поскольку BK — биссектриса угла ABC, треугольник ABK равнобедренный, $AB = AK$. Аналогично получаем, что $AD = AM$. Значит, треугольники AKM и ABD равны по двум катетам. Применяя в треугольнике AKM теорему Пифагора, находим $BC = AD = AM = \sqrt{MK^2 - AB^2} = \sqrt{55}$.

4.2. В прямоугольнике $ABCD$ на продолжении стороны CD за точку D отмечена точка E. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке K, а биссектриса угла ADE пересекает продолжение стороны AB в точке M. Найдите BC, если $MK = 9$ и $AB = 4$.

Ответ: $\sqrt{65} \approx 8.06$.

4.3. В прямоугольнике $ABCD$ на продолжении стороны CD за точку D отмечена точка E. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке K, а биссектриса угла ADE пересекает продолжение стороны AB в точке M. Найдите BC, если $MK = 10$ и $AB = 7$.

Ответ: $\sqrt{51} \approx 7.14$.

5.1. (12 баллов) Убывающая последовательность a, b, c — геометрическая прогрессия, а последовательность $19a$, $\dfrac{124b}{13}$, $\dfrac{c}{13}$ — арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ: 247.

Решение. Пусть $b = aq$, $c = aq^2$. Свойства арифметической прогрессии и условия задачи приводят к уравнению $2 \cdot \frac{124aq}{13} = 19a + \frac{aq^2}{13} \Leftrightarrow q^2 - 248q + 247 = 0$, откуда $q = 1$ или $q = 247$. Убывающей геометрическая прогрессия может быть только при $q = 247$ (если, например, $a = -1$).

5.2. Убывающая последовательность a, b, c — геометрическая прогрессия, а последовательность $13a$, $\dfrac{59b}{9}$, $\dfrac{c}{9}$ — арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ: 117.

5.3. Убывающая последовательность a, b, c — геометрическая прогрессия, а последовательность $19a$, $\dfrac{67b}{7}$, $\dfrac{c}{7}$ — арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ: 133.

6.1. (12 баллов) У Юры есть необычные часы с несколькими минутными стрелками, двигающимися в разных направлениях. Юра посчитал, что за один час минутные стрелки попарно совпали ровно 54 раза. Какое наибольшее число минутных стрелок может быть на Юриных часах?

Ответ: 28.

Решение. Пусть какие-то две стрелки совпали, тогда через 30 секунд они совпадут вновь. Следовательно, стрелки в каждой такой паре совпадут ровно 2 раза за минуту. Таким образом, если n стрелок двигаются в одну сторону, а m стрелок — в другую, то $2mn = 54$, $mn = 27$. Следовательно, n может быть равно 1, 3, 9 или 27. Наибольшая сумма $m + n$ получается при $n = 1$, $m = 27$ (или наоборот) и равна 28.

6.2. У Юры есть необычные часы с несколькими минутными стрелками, двигающимися в разных направлениях. Юра посчитал, что за один час минутные стрелки попарно совпали ровно 54 раза. Какое наименьшее число минутных стрелок может быть на Юриных часах?

Ответ: 12.

6.3. У Юры есть необычные часы с несколькими минутными стрелками, двигающимися в разных направлениях. Юра посчитал, что за один час минутные стрелки попарно совпали ровно 66 раз. Какое наибольшее число минутных стрелок может быть на Юриных часах?

Ответ: 34.

6.4. У Юры есть необычные часы с несколькими минутными стрелками, двигающимися в разных направлениях. Юра посчитал, что за один час минутные стрелки попарно совпали ровно 66 раз. Какое наименьшее число минутных стрелок может быть на Юриных часах?

Ответ: 14.

7.1. (12 баллов) Двое проводят время за игрой: по очереди называют не превосходящие 100 простые числа так, чтобы последняя цифра числа, названного одним игроком, была равна первой цифре числа, которое следующим ходом называет второй (кроме самого первого простого числа, названного в игре). Повторять уже названные ранее числа нельзя. Проигрывает тот, кто не может назвать по этим правилам очередное простое число. Докажите, что один из игроков может действовать так, чтобы гарантированно обеспечить себе выигрыш, и найдите наименьшее возможное количество простых чисел, которые будут использованы обоими игроками в такой игре.

Ответ: 3.

Решение. Опишем выигрышную стратегию для первого игрока. Сначала первый игрок называет простое число, заканчивающееся на 9 и отличное от 79 (например, 19). Поскольку среди чисел 90, …, 99 простым является только число 97, следующим ходом второй игрок должен назвать это число. Тогда третьим ходом первый игрок называет 79, и второй проигрывает. За меньшее число ходов первый игрок выиграть не может, так как для любой цифры от 1 до 9 существует простое число из первой сотни, которое начинается с этой цифры.

7.2. Двое проводят время за игрой: по очереди называют не превосходящие 100 простые числа так, чтобы последняя цифра числа, названного одним игроком, была равна первой цифре числа, которое следующим ходом называет второй (кроме самого первого простого числа, названного в игре). Повторять уже названные ранее числа нельзя. Проигрывает тот, кто не может назвать по этим правилам очередное простое число. Докажите, что один из игроков может действовать так, чтобы гарантированно обеспечить себе выигрыш, и найдите наименьшее возможное количество простых чисел, которые этот игрок назовёт в такой игре.

Ответ: 2.

8.1. (12 баллов) Сколькими способами можно разместить восемь из девяти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в таблице 4×2 (4 строки, 2 столбца) так, чтобы сумма цифр в каждой строке, начиная со второй, была на 1 больше, чем в предыдущей?

Ответ: 64.

Решение. Сумма всех девяти чисел равна 45. Обозначим через x сумму двух чисел в первой строке, а через a то единственное из девяти чисел число, которое мы не размещаем в фигуре. Тогда $x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 45 - a$, откуда $4x + a = 39$. Так как a — целое число от 1 до 9, то получаем 2 возможных варианта: либо $x = 9$, $a = 3$, либо $x = 8$, $a = 7$.

Если $a = 3$, то мы должны расставить числа 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а сумма чисел в строках должна быть равна соответственно 9, 10, 11 и 12. Возможные варианты для чисел первой строки: $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 4 + 5$.

Если в первой строке стоят 1 и 8, то во второй строке должны стоять 4 и 6, в третьей 2 и 9, в последней 5 и 7.

Если в первой строке стоят 2 и 7, то во второй строке должны стоять 1 и 9 (при других вариантах нельзя подобрать числа для третьей строки), в третьей 5 и 6, в последней 4 и 8.

Если в первой строке стоят 4 и 5, то во второй строке могут быть 1 и 9 или 2 и 8. Но и в том, и в другом случае числа для третьей строки найти нельзя.

Если $a = 7$, то мы должны расставить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, а сумма чисел в строках должна быть равна соответственно 8, 9, 10 и 11. Сумма чисел в первой строке равна $8 = 5+3 = 6+2$.

Если в первой строке стоят 3 и 5, то во второй строке должны стоять 1 и 8, в третьей 6 и 4, в последней 2 и 9.

Если в первой строке стоят 6 и 2, то во второй строке могут стоять 1 и 8 или 4 и 5. Если там стоят 1 и 8, то невозможно подобрать числа в следующей строке. Значит, там стоят 4 и 5, тогда в следующей строке стоят 1 и 9, а в последней 3 и 8.

Таким образом, всего получилось 4 варианта расстановки чисел без учета порядка чисел в строках. Так как в каждой строке числа можно менять местами, получается по $2^4 = 16$ вариантов для каждой расстановки. В итоге получаем 64 варианта.

8.2. Сколькими способами можно разместить восемь из девяти цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 в таблице 4×2 (4 строки, 2 столбца) так, чтобы сумма цифр в каждой строке, начиная со второй, была на 2 больше, чем в предыдущей?

Ответ: 48.

9.1. (12 баллов) Две окружности касаются внешним образом в точке K. На их общей внутренней касательной отмечена точка P таким образом, что $KP = 14$. Через точку P к окружностям проведены две секущие, причём одна из них высекает на первой окружности хорду $AB = 45$, а другая — на второй окружности хорду $CD = 21$, причём точка A лежит между точками B и P, а точка C — между точками D и P. Найдите отношение $BC : AD$.

Ответ: 1.75.

Решение. По теореме о касательной и секущей находим $AP = 4$, $CP = 7$. Кроме того, $PA \cdot PB = PK^2 = PC \cdot PD$, поэтому треугольники BPC и DPA подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними. Значит, $BC : AD = CP : AP = \frac{7}{4}$.

9.2. Две окружности касаются внешним образом в точке K. На их общей внутренней касательной отмечена точка P таким образом, что $KP = 18$. Через точку P к окружностям проведены две секущие, причём одна из них высекает на первой окружности хорду $AB = 48$, а другая на второй окружности хорду $CD = 27$, причём точка A лежит между точками B и P, а точка C — между точками D и P. Найдите отношение $BC : AD$.

Ответ: 1.5.

10.1. (12 баллов) Про различные натуральные числа k, l, m, n известно, что найдутся такие три натуральных числа a, b, c, что каждое из чисел k, l, m, n является корнем или уравнения $ax^2 - bx + c = 0$, или уравнения $cx^2 - 16bx + 256a = 0$. Найдите $k^2 + l^2 + m^2 + n^2$.

Ответ: 325.

Решение. Если k, l — корни первого уравнения, то корнями второго являются числа $m = \frac{16}{k}$, $n = \frac{16}{l}$. Поэтому числа k, l, m, n — делители числа 16. Делителями 16 являются числа 1, 2, 4, 8 и 16, но число 4 не подходит, так как по условию все числа k, l, m, n различны. Значит, $k^2 + l^2 + m^2 + n^2 = 1^2 + 2^2 + 8^2 + 16^2 = 325$.

10.2. Про различные натуральные числа k, l, m, n известно, что найдутся такие три натуральных числа a, b, c, что каждое из чисел k, l, m, n является корнем или уравнения $ax^2 - bx + c = 0$, или уравнения $cx^2 - 8bx + 64a = 0$. Найдите $k^2 + l^2 + m^2 + n^2$.

Ответ: 85.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2018/2019 учебного года для 10—11 классов

Ответы и решения

1.1. Из поселка на станцию по одной дороге одновременно отправились дачник А пешком и мотоцикл с пассажиром — дачником Б. Не доехав до станции, мотоциклист высадил пассажира и сразу поехал обратно к поселку, а дачник Б пошел к станции пешком. Встретив дачника А, мотоциклист посадил его к себе и привез на станцию. В результате оба дачника прибыли на станцию одновременно. Какую часть пути от поселка до станции дачник А проехал на мотоцикле, если дачники шли с одинаковой скоростью, в 9 раз меньшей скорости мотоцикла?
Ответ: $\frac{5}{6}$.
Решение. Примем путь от поселка до станции за 1. Поскольку оба дачника потратили на путь до станции одно и то же время и пользовались одним и тем же мотоциклом, то расстояние, пройденное ими пешком, одно и то же (это можно увидеть также и на графиках их движения). Обозначим это расстояние через x. Тогда путь, который проехал мотоциклист до встречи с дачником А, равен $(1-x)+(1-2x)=2-3x$. Так как скорость мотоциклиста в 9 раз больше скорости дачника, выполняется равенство $2-3x=9x$, откуда $x=1/6$.

1.2. Из посёлка на станцию по одной дороге одновременно отправились дачник А пешком и мотоцикл с пассажиром — дачником Б. Не доехав до станции, мотоциклист высадил пассажира и сразу поехал обратно к посёлку, а дачник Б пошел к станции пешком. Встретив дачника А, мотоциклист посадил его к себе и привёз на станцию. В результате оба дачника прибыли на станцию одновременно. Сколько процентов пути от поселка до станции дачник Б прошёл пешком, если дачники шли с одинаковой скоростью, в 7 раз меньшей скорости мотоцикла?
Ответ: 20%.

1.3. Из посёлка на станцию по одной дороге одновременно отправились дачник А — пешком и дачник Б — на такси. Не доехав до станции, таксист высадил своего пассажира и сразу поехал обратно к посёлку, а дачник Б пошел к станции пешком. Встретив дачника А, таксист подсадил его к себе и привёз на станцию. В результате оба дачника прибыли на станцию одновременно. Какую часть пути от посёлка до станции дачник А проехал на такси, если дачники шли с одинаковой скоростью, в 15 раз меньшей скорости такси?
Ответ: $\frac{8}{9}$.

1.4. Из посёлка на станцию по одной дороге одновременно отправились дачник А — пешком и дачник Б — на такси. Не доехав до станции, таксист высадил своего пассажира и сразу поехал обратно к посёлку, а дачник Б пошел к станции пешком. Встретив дачника А, таксист подсадил его к себе и привёз на станцию. В результате оба дачника прибыли на станцию одновременно. Сколько процентов пути от посёлка до станции дачник Б прошёл пешком, если дачники шли с одинаковой скоростью, в 17 раз меньшей скорости такси?
Ответ: 10%.

2.1. Найдите целую часть числа $a+\dfrac{9}{b}$, где a и b — соответственно целая и дробная часть числа $\sqrt{76-42\sqrt{3}}$.
Ответ: 12.
Решение. Данное число равно $\sqrt{76-42\sqrt{3}}=\sqrt{\left(7-3\sqrt{3}\right)^2}=7-3\sqrt{3}=1+\left(6-3\sqrt{3}\right)$, где $6-3\sqrt{3}\in(0;1)$. Поэтому $a=1$, $b=6-3\sqrt{3}$. Значит, $a+\frac{9}{b}=1+\frac{9}{6-3\sqrt{3}}=1+\frac{3}{2-\sqrt{3}}=1+3\left(2+\sqrt{3}\right)=7+3\sqrt{3}$. Так как $12<7+3\sqrt{3}<13$, то целая часть числа $a+\frac{9}{b}$ равна 12.

2.2. Найдите целую часть числа $a+\dfrac{8}{b}$, где a и b — соответственно целая и дробная часть числа $\sqrt{48-24\sqrt{3}}$.
Ответ: 16.

2.3. Найдите целую часть числа $a+\dfrac{9}{b}$, где a и b — соответственно целая и дробная часть числа $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$.
Ответ: 34.

2.4. Найдите целую часть числа $a+\dfrac{8}{b}$, где a и b — соответственно целая и дробная часть числа $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$.
Ответ: 31.

3.1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^{x+2y} + 2^x = 3 \cdot 2^y, \\ 2^{2x+y} + 2 \cdot 2^y = 4 \cdot 2^x. \end{cases}$$

Ответ: $x = y = \frac{1}{2}$.

Решение.

$$\begin{cases} 2^x \cdot (2^y)^2 + 2^x = 3 \cdot 2^y, \\ (2^x)^2 \cdot 2^y + 2 \cdot 2^y = 4 \cdot 2^x \end{cases}$$

$$2^x = u\ (>0), \quad 2^y = v\ (>0)$$

$$\begin{cases} uv^2 + u - 3v = 0, \\ u^2v + 2v - 4u = 0. \end{cases}$$

$$uv^2 - u^2v + u - 2v - 3v + 4u = 0,$$

$$uv(v-u) + 5(u-v) = 0,$$

$$uv(v-u) - 5(v-u) = 0,$$

$$(uv-5)(v-u) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} uv = 5 \\ v - u = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} u = \frac{5}{v} \\ u = v \end{array}\right.$$

$$u = \frac{5}{v}$$

$$\frac{5}{v} \cdot v^2 + \frac{5}{v} - 3v = 0$$

$$5v + \frac{5}{v} - 3v = 0$$

$$2v + \frac{5}{v} = 0$$

$$2v^2 + 5 = 0$$

(нет решений)

$$u = v$$

$$v^3 - 2v = 0$$

$$v = 0, \quad v = \pm\sqrt{2}$$

$$2^x = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

3.2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^{x+y} - 2^{x-y} = 4, \\ 2^{x+y} - 8 \cdot 2^{y-x} = 6. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{5}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

Решение.

$$2^{x+y} = u\ (>0), \quad 2^{y-x} = v\ (>0)$$

$$\begin{cases} u - v = 4, \\ u - \frac{8}{v} = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = v + 4, \\ v + 4 - \frac{8}{v} = 6 \end{cases}$$

$$v^2 + 4v - 6v - 8 = 0$$

$$v^2 - 2v - 8 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} v = 4 \\ v = -2 \text{ (посторонний корень)} \end{array}\right. \Rightarrow u = 4 + 4 = 8$$

$$\begin{cases} 2^{x-y} = 4 \\ 2^{x+y} = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$2x = 5, \quad 2y = 1$$

$$x = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{1}{2}$$

3.3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3^{x+2y} + 3^x = 4 \cdot 3^y, \\ 3^{2x+y} + 2 \cdot 3^y = 5 \cdot 3^x. \end{cases}$$

Ответ: $x = y = \frac{1}{2}$.

3.4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3^{x+y} - 3^{x-y} = 18, \\ 3^{x+y} - 27 \cdot 3^{y-x} = 24. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{5}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

4.1. На стороне AC треугольника ABC взяты точки E и K, причём точка E лежит между точками A и K и $AE : EK : KC = 3 : 5 : 4$. Медиана AD пересекает отрезки BE и BK в точках L и M соответственно. Найдите отношение площадей треугольников BLM и ABC.
Ответ: $\frac{1}{5}$.
Решение. Так как медиана треугольника делит его площадь пополам, то $S(ABD) = S(ADC)$ и $S(BMD) = S(MDC)$, а значит, $S(ABM) = S(AMC) = \frac{3}{2}S(AMK)$. В то же время $\frac{S(ABM)}{S(AMK)} = \frac{BM}{MK}$, поэтому $\frac{BM}{MK} = \frac{3}{2}$. Отсюда $\frac{S(BLM)}{S(LMK)} = \frac{3}{2}$, а значит, $S(ABL) = \frac{3}{2}S(ALK) = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3}S(ALE) = 4S(ALE)$. Поэтому $\frac{BL}{LE} = \frac{S(ABL)}{S(ALE)} = 4$. По теореме об отношении площадей треугольников с общим углом $\frac{S(BLM)}{S(BEK)} = \frac{BL}{BE} \cdot \frac{BM}{BK} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$. В то же время $\frac{S(BEK)}{S(ABC)} = \frac{EK}{AC} = \frac{5}{12}$. Окончательно получим, что $\frac{S(BLM)}{S(ABC)} = \frac{S(BLM)}{S(BEK)} \cdot \frac{S(BEK)}{S(ABC)} = \frac{12}{25} \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{5}$.

4.2. В треугольнике ABC на стороне BC отмечена такая точка D, что $BD : DC = 1 : 5$, а на стороне AC — точки E и K, причём точка E лежит между точками A и K. Отрезок AD пересекается с отрезками BE и BK в точках M и N соответственно, причём $BM : ME = 3 : 4$, $BN : NK = 2 : 3$. Найдите отношение $AM : ND$.
Ответ: $120 : 49$.

4.3. В треугольнике ABC на стороне AC отмечены такие точки E и K, что $AE = EK = KC$. На стороне BC взята такая точка D, что отрезок AD пересекает отрезки BE и BK в точках N и M соответственно, причём $AN : NM = 4 : 3$. Найдите отношение площади четырёхугольника $CKMD$ к площади треугольника ABC.
Ответ: $\frac{1}{6}$.

4.4. В треугольнике ABC на стороне BC отмечена такая точка D, что $BD : DC = 1 : 3$, а на стороне AC — точки E и K, причём точка E лежит между точками A и K. Отрезок AD пересекается с отрезками BE и BK в точках M и N соответственно, причём $BM : ME = 7 : 5$, $BN : NK = 2 : 3$. Найдите отношение $MN : AD$.
Ответ: $11 : 45$. *Решение.* Используем теорему Менелая 1)

$$\frac{AN}{ND}\frac{DB}{DC}\frac{CK}{KA} = 1$$

$$\frac{AN}{ND}\frac{1}{4}\frac{CK}{KA} = 1$$

2)

$$\frac{BD}{DC}\frac{CA}{AK}\frac{KN}{NB} = 1$$

$$\frac{1}{3}\frac{CA}{AK}\frac{3}{2} = 1$$

$$\frac{CA}{AK} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{CK}{KA} = 1$$

3)

$$\frac{AN}{ND} = \frac{4}{1}$$

4)

$$\frac{AM}{MD}\frac{DB}{BC}\frac{CE}{EA} = 1$$

$$\frac{AM}{MD}\frac{x}{4x}\frac{CE}{EA} = 1$$

5)

$$\frac{BD}{DC}\frac{CA}{AE}\frac{EM}{MB} = 1$$

$$\frac{x}{3x}\frac{CA}{AE}\frac{EM}{MB} = 1$$

$$\frac{1}{3}\frac{CA}{AE}\frac{5}{7} = 1$$

$$\frac{CA}{AE} = \frac{21}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{CE}{EA} = \frac{16}{5}$$

6)

$$\frac{AM}{MD}\frac{1}{4}\frac{16}{5} = 1$$

$$\frac{AM}{MD} = \frac{5}{4}$$

Имеем из полученных соотношений, обозначив

$$AN = 4p,\ ND = p, AN = 5\kappa, MD = 4\kappa :$$

$$AD = 5\kappa + 4\kappa = 5p$$

$$\kappa = \frac{5}{9}p$$

$$\frac{MN}{AD} = \frac{4\kappa - p}{5p} = \frac{4\frac{5}{9}p - p}{5p} = \frac{11}{45}$$

5.1. Про последовательность $\{a_n\}$ известно, что $a_1 = 1{,}5$ и $a_n = \dfrac{1}{n^2-1}$ при $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Существуют ли такие значения n, что сумма первых n членов этой последовательности отличается от 2,25 меньше, чем на 0,01? Если да, то найдите наименьшее из них.
Ответ: да, $n = 100$.
Решение. Общая формула членов последовательности (кроме первого) может быть записана так ($n \geqslant 2$):

$$a_n = \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right).$$

В результате сумма первых n членов последовательности, кроме первого, принимает вид:

$$\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\right.$$
$$\left.+\ldots+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right].$$

После сокращений для суммы n первых членов последовательности можно записать:

$$S_n = 1{,}5 + \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right] = 2{,}25 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right).$$

Пусть $f(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$. Тогда поскольку $f(n)$ убывает и

$$f(100) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100}\right) = \frac{1}{100},$$
$$f(99) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right) > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100}\right) = \frac{1}{100},$$

искомое значение n равно 100.

5.2. Про последовательность $\{a_n\}$ известно, что $a_1 = 1{,}25$ и $a_n = \dfrac{2}{n^2-1}$ при $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Существуют ли такие значения n, что сумма первых n членов этой последовательности отличается от 2,75 меньше, чем на 0,01? Если да, то найдите наименьшее из них.
Ответ: да, $n = 200$.

5.3. Про последовательность $\{a_n\}$ известно, что $a_1 = 1{,}5$ и $a_n = \dfrac{3}{n^2-1}$ при $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Существуют ли такие значения n, что сумма первых n членов этой последовательности отличается от 3,75 меньше, чем на 0,01? Если да, то найдите наименьшее из них.
Ответ: да, $n = 300$.

5.4. Про последовательность $\{a_n\}$ известно, что $a_1 = 1{,}25$ и $a_n = \dfrac{4}{n^2-1}$ при $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Существуют ли такие значения n, что сумма первых n членов этой последовательности отличается от 4,25 меньше, чем на 0,01? Если да, то найдите наименьшее из них.
Ответ: да, $n = 400$.

6.1. Найдите все решения неравенства

$$\sin^{2018} x + \cos^{-2019} x \geqslant \cos^{2018} x + \sin^{-2019} x,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.
Ответ: $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right) \cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right]$.
Решение. Функция $f(t) = t^{2018} - t^{-2019}$ возрастает на каждом из полуинтервалов $[-1, 0)$ и $(0, 1]$. Действительно, производная $f'(t) = t^{-2020}(2018t^{4037} + 2019) = 0$ при $t = -\sqrt[4037]{\frac{2019}{2018}} < -1$, поэтому $f'(t) > 0$ на каждом из полуинтервалов $[-1, 0)$ и $(0, 1]$. Кроме того $f(t) \leqslant 0$, если $0 < t \leqslant 1$, а если $-1 \leqslant t < 0$, то $f(t) \geqslant 2$. Поэтому исходное неравенство эквивалентно совокупности неравенств:

$$f(\sin x) \geqslant f(\cos x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x \geqslant \cos x > 0, \\ 0 > \sin x \geqslant \cos x, \\ \quad\begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Значит, ответ на периоде от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{7\pi}{4}$ выглядит так: $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right) \cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right]$

6.2. Найдите все решения неравенства

$$\cos^{2018} x + \sin^{-2019} x \geqslant \sin^{2018} x + \cos^{-2019} x,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.
Ответ: $\left[-\frac{4\pi}{3}; -\pi\right) \cup \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

6.3. Найдите все решения неравенства

$$\sin^{2018} x + \cos^{-2019} x \leqslant \cos^{2018} x + \sin^{-2019} x,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.
Ответ: $\left[-\frac{5\pi}{4}; -\pi\right) \cup \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

6.4. Найдите все решения неравенства

$$\cos^{2018} x + \sin^{-2019} x \leqslant \sin^{2018} x + \cos^{-2019} x,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$.
Ответ: $\left[-\frac{\pi}{3}; 0\right) \cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}\right]$

7.1. Сколько существует значений параметра a, при которых уравнение

$$4a^2 + 3x\lg x + 3\lg^2 x = 13a\lg x + ax$$

имеет единственное решение?
Ответ: 2.
Решение. Данное уравнение эквивалентно уравнению $(3\lg x - a)(x + \lg x - 4a) = 0$, откуда имеем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = \frac{a}{3}, \\ x + \lg x = 4a. \end{array}\right.$$

Каждое из уравнений этой совокупности при любом a имеет единственное положительное решение, так как непрерывные функции $f_1(x) = \lg x$ и $f_2(x) = x + \lg x$ на области своего определения $(0; +\infty)$ строго возрастают и принимают всевозможные значения из $(-\infty; +\infty)$. Поэтому необходимо, чтобы это решения совпали. Тогда $x = 11a/3$, $\lg x = a/3$, следовательно, $10^{a/3} = 11a/3$. Это уравнение имеет ровно два решения в силу того, что функция $g(t) = 10^t - 11t$ строго убывает на $(-\infty; \lg(11\lg e)]$, строго возрастает на $[\lg(11\lg e); +\infty)$, принимает в точке $t = 1$ отрицательное значение, а в точках $t = 0$ и $t = 2$ – положительные значения.

7.2. Сколько существует значений параметра a, при которых уравнение

$$3a^2 + 4x\lg x + 4\lg^2 x = 13a\lg x + ax$$

имеет единственное решение?
Ответ: 2.

7.3. Сколько существует значений параметра a, при которых уравнение

$$5a^2 + 3x\lg x + 9\lg^2 x = 18a\lg x + ax$$

имеет единственное решение?
Ответ: 2.

7.4. Сколько существует значений параметра a, при которых уравнение

$$5a^2 + 4x\lg x + 12\lg^2 x = 23a\lg x + ax$$

имеет единственное решение?
Ответ: 2.

8.1. Боковое ребро правильной пирамиды равно 2. Может ли её объём быть равным 3,25?
Ответ: нет.
Решение. Объём правильной пирамиды меньше объёма описанного вокруг неё конуса. Если обозначить боковое ребро через b, а угол между образующей конуса и основанием через α, то радиус основания конуса равен $b\cos\alpha$, а высота конуса равна $b\sin\alpha$. Таким образом, объём конуса равен $\frac{1}{3}\pi b^2\cos^2\alpha \cdot b\sin\alpha = \frac{1}{3}\pi b^3\cos^2\alpha\sin\alpha$.

Найдём максимум функции $f(\alpha) = \cos^2\alpha\sin\alpha = \sin\alpha - \sin^3\alpha$ при $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$. Максимум функции $y = t - t^3$ при $t \in (0; 1)$ достигается при $1 - 3t^2 = 0$, то есть в точке $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом, $f(\alpha) = \sin\alpha - \sin^3\alpha$ при $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ может принимать значения от 0 до $\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Значит, объём конуса может принимать значения от 0 до $\frac{2\pi b^3}{9\sqrt{3}} = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$.

Докажем, что $\frac{16\pi}{9\sqrt{3}} < 3{,}25 = \frac{13}{4} \Leftrightarrow \pi < \frac{117\sqrt{3}}{64}$. Последнее неравенство выполняется, так как $\frac{117\sqrt{3}}{64} > \frac{117\cdot 1{,}73}{64} > 3{,}16 > \pi$. Поэтому пирамиды с объёмом 3,25 не существует.

8.2. Объём правильной пирамиды равен π. Может ли её боковое ребро быть равным 1,98?
Ответ: нет.

8.3. Боковое ребро правильной пирамиды равно 4. Может ли её объём быть равным 26?
Ответ: нет.

8.4. Объём правильной пирамиды равен 8π. Может ли её боковое ребро быть равным 3,96?
Ответ: нет.

ЛОМОНОСОВ – 2019. МАТЕМАТИКА. Критерии проверки (10-11 классы)

Задача № 1 = 15 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Правильное уравнение, но арифметические ошибки	∓	5
Замечание. Графическое решение является решением.		

Задача № 2 = 15 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Идейно верное решение. (верно раскрыта иррациональность, найдены a,b) с полными обоснованиями, но ответ неверен вследствие одной вычислительной ошибки	±	10
Верно раскрыта иррациональность, найдены a,b, нет обоснования	∓	5
Замечание.		

Задача № 3 = 15 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Арифметическая ошибка в конце решения	±	10
Не отброшен отрицательный корень показательного уравнения		0

Задача № 4 = 15 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Одна арифметическая ошибка при полностью правильном решении	±	10
Арифметические ошибки при правильном ходе решения или найдено верно отношение площадей (отрезков) при задании найти отношение отрезков (площадей)	∓	5
Замечание. Допускается решение с использованием теоремы Менелая (ее доказательство не требуется)		

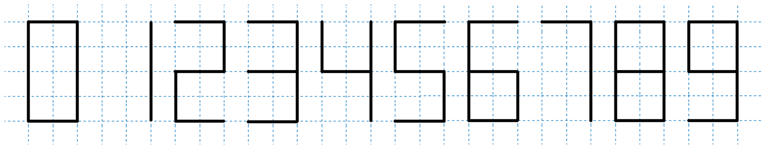
Задача № 5 = 15 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Ответ «да» обоснован верно. Минимальное значение n найдено ошибочно при правильном ходе решения.	±	10
Получена только односторонняя оценка для f(n)	∓	5
Задача № 6 = 15 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Доказана монотонность на полуинтервалах, свел задачу к совокупности двух неравенств. Не учтен случай, когда значения тригонометрических функций попадают в разные полуинтервалы	±	10
Ошибка в решении тригонометрических неравенств при обоснованной монотонности .	∓	5

Задача № 7 = 15 баллов	Плюсы-минусы	Балл
Верное разложение на множители, **доказано**, что каждое из двух уравнений эквивалентной совокупности имеет единственное решение, сделан вывод, что эти решения должны совпадать.	$\pm$	10
Верное разложение на множители.	$\mp$	5
Замечание. Под "доказано" имеются в виду упоминания монотонного возрастания соответствующих функций и указание области их значений, или используется выпуклость. Если есть верный ответ, подтвержденный графиком логарифмической функции, исключено касание и отсутствие решений, то надо ставить 15		

Задача № 8= 15 баллов	Плюсы-минусы	Балл
Свел задачу к конусу, получил функцию объем конуса, при исследовании функции допущена ошибка, возможно приведшая к неверному ответу. Или без конуса . Найдено экстремальное значение R (или угла), есть формула максимального объема пирамиды при каждом n и указана ее точная верхняя грань	$\pm$	10
Свел задачу к конусу, получил функцию объема конуса, но нет или не обосновано требуемое сравнение	$\mp$	5

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2018/2019 учебного года для 5–6 классов

Задача 1. Для представления записей чисел используют однотипные металлические формы цифр:



Сколько «весит» число 2019, если число 1 «весит» 1 кг?

Ответ: 9,5 кг.

Решение. Числу 1 соответствует форма, которая состоит из двух «палок», вес каждой из которых равен 0,5 кг. Число 2019 состоит из четырёх форм: в двойке 5 «палок», в нуле — 6, в единице — 2, в девятке 6 «палок». Значит, оно весит $(5+6+2+6)/2 = 19/2 = 9{,}5$ кг.

Задача 2. У Миши есть набор из девяти карточек с буквами слова «ЛОМОНОСОВ». На оборотной стороне каждой карточки Миша написал по цифре так, что на карточках с одинаковыми буквами цифры одинаковы, а на карточках с разными буквами — различны. При этом оказалось верным равенство

$$\text{Л} + \frac{\text{О}}{\text{М}} + \text{О} + \text{Н} + \frac{\text{О}}{\text{С}} = \text{ОВ},$$

в котором обе входящие в него дроби являются правильными. Какие цифры мог написать Миша на карточках? Достаточно привести один пример.

Ответ: $8 + \frac{2}{3} + 2 + 9 + \frac{2}{6} = 20$ (можно переставить местами 8 и 9, а также 3 и 6).

Решение. Левая часть оказавшегося верным равенства меньше величины $10 + 9 + 10 = 29$, а значит, цифра, соответствующая букве «О», может оказаться либо единицей, либо двойкой. При этом должно выполняться равенство $\frac{\text{О}}{\text{М}} + \frac{\text{О}}{\text{С}} = 1$. Отсюда следует, что на карточке с буквой «О» может оказаться только цифра 2, а значит, на карточках с буквами «М» и «С» написаны (в любом порядке) цифры 3 и 6. В таком случае справедливо неравенство $\text{Л} + \text{Н} + 1 + 2 \geqslant 20$, из которого восстанавливаются значения цифр на оставшихся карточках.

Задача 3. На реке от одной пристани в противоположных направлениях в 13:00 вышли два одинаковых прогулочных катера. Одновременно с ними от пристани отчалил плот. Через час один из катеров развернулся и поплыл в обратном направлении. В 15:00 то же самое сделал и второй катер. Какова скорость течения, если в момент встречи катеров плот отошёл от пристани на 7,5 км?

Ответ: 2,5 км/ч.

Решение. Рассмотрим систему отсчёта, связанную с рекой. В этой системе катера двигаются с равными скоростями: вначале 1 час удаляются друг от друга в противоположных направлениях, затем ещё 1 час двигаются в одном направлении (при этом расстояние между ним не меняется), а затем сближаются до встречи. Поскольку на втором временном промежутке расстояние между катерами не менялось, сближаться они будут столько же, сколько удалялись, то есть 1 час. Таким образом, с момента отплытия до встречи прошло 3 часа. За это время плот проплыл (со скоростью течения) 7,5 км. Следовательно, его скорость равна 2,5 км/ч.

Задача 4. Каждую клетку таблицы 3×3 раскрашивают в один из трёх цветов так, что клетки, имеющие общую сторону, имеют разный цвет, причём необязательно все три цвета использованы. Сколько существует таких раскрасок?

Ответ: 246.

Решение. Центральную клетку можно раскрасить в любой из трёх цветов, назовём этот цвет a. Каждую из четырёх клеток, имеющих общую сторону с центральной, можно раскрасить в любой из двух оставшихся цветов. Пусть клетка, расположенная над центральной, раскрашена в цвет b. Третий цвет назовём c. Рассмотрим всевозможные варианты раскраски клеток, имеющих общую сторону с центральной, и закодируем их строчками из букв b и c, которые начинаются с буквы b, а затем соответствуют цветам этих клеток, пробегаемых против часовой стрелки. Например, раскраска

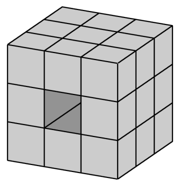
	b	
c	a	b
	c	

будет закодирована строчкой $bccb$. Рассмотрим любую угловую клетку. Если две клетки, имеющие с ней общую сторону, раскрашены в один цвет, то угловую клетку можно раскрасить двумя способами. Если же эти две клетки раскрашены в разные цвета, то угловую клетку можно раскрасить только одним способом. Составим таблицу, в которой для каждой из 8 полученных кодирующих строчек укажем число раскрасок угловых клеток.

$bbbb$	16	$bbcb$	4	$bcbb$	4	$bccb$	4
$bbbc$	4	$bbcc$	4	$bcbc$	1	$bccc$	4

Таким образом, искомое число раскрасок равно произведению числа способов раскрасить центральную клетку на число способов раскрасить клетку, расположенную над центральной, на сумму чисел построенной таблицы: $3 \cdot 2 \cdot (16 + 6 \cdot 4 + 1) = 246$.

Задача 5. Из 24 одинаковых деревянных кубиков склеили «трубу» — куб $3\times3\times3$ с убранной «сердцевиной» из трёх кубиков (см. рисунок). Можно ли в каждом квадратике на поверхности «трубы» провести диагональ так, чтобы получился замкнутый путь, который ни через одну вершину не проходит дважды?



Ответ: Нет.

Решение. Диагоналей на поверхности «трубы» столько же, сколько граней кубиков на этой поверхности: $4\cdot9+2\cdot8+12 = 64$. Несамопересекающийся замкнутый путь, проходящий по всем диагоналям, должен содержать столько же вершин. Вершин всех кубиков также 64 (четыре «слоя» по 16 вершин — задействованы все узловые точки куба $3\times3\times3$). Раскрасим их в чёрный и белый цвета в шахматном порядке: у каждой вершины соседние другого цвета. Получится по 32 вершины каждого цвета. Но искомый путь может проходить только через вершины одного цвета, и поэтому может содержать не более 32 диагоналей.

Задача 6. Петя пропустил футбольный матч «Динамо»–«Шинник» и, придя утром в школу, услышал, как друзья обсуждают результаты игры. Сосед Пети по парте Вася отказался назвать счёт матча, однако согласился честно ответить на любые два вопроса Пети об игре, ответами на которые могут быть лишь слова «да» или «нет». Услышав это, три друга Пети честно сказали ему следующее.

Рома: «Если я назову общее количество забитых голов за матч, то тебе наверняка удастся узнать у Васи счёт».

Олег: «Вообще-то, даже если проигравшая команда забила бы на один гол больше, то информации об общем количестве забитых голов за матч было бы достаточно, чтобы наверняка узнать у Васи счёт».

Серёжа: «Нападающий “Шинника” сделал самую красивую голевую передачу в этом сезоне».

Сможет ли теперь Петя наверняка узнать у Васи счёт, задав лишь один вопрос?

Ответ: Да.

Решение. Из слов Романа и Олега следует, что общее количество голов в матче не превосходит двух, а также что одна из команд одержала победу. Варианты счёта: $0:1$, $1:0$, $0:2$ и $2:0$. Из слов Серёжи теперь ясно, что выиграл «Шинник», так как проигравшая команда не могла забить ни одного гола. Для восстановления счёта теперь достаточно задать один вопрос Васе. Вопрос может быть, например, таким: «В матче было забито больше одного гола?».

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2018/2019 учебного года для 7–8 классов

Задача 1. У Миши есть набор из девяти карточек с буквами слова «ЛОМОНОСОВ». На оборотной стороне каждой карточки Миша написал по цифре так, что на карточках с одинаковыми буквами цифры одинаковы, а на карточках с разными буквами — различны. При этом оказалось верным равенство

$$\text{Л} + \frac{\text{О}}{\text{М}} + \text{О} + \text{Н} + \frac{\text{О}}{\text{С}} = \text{ОВ},$$

в котором обе входящие в него дроби являются правильными. Какие цифры мог написать Миша на карточках? Найдите все решения.

Ответ: $8 + \frac{2}{3} + 2 + 9 + \frac{2}{6} = 20$ и варианты, в которых переставлены местами пары цифр 8 и 9, 3 и 6.

Решение. Левая часть оказавшегося верным равенства меньше величины $10 + 9 + 10 = 29$, а значит, цифра, соответствующая букве «О», может оказаться либо единицей, либо двойкой. При этом должно выполняться равенство $\frac{\text{О}}{\text{М}} + \frac{\text{О}}{\text{С}} = 1$. Отсюда следует, что на карточке с буквой «О» может оказаться только цифра 2, а значит, на карточках с буквами «М» и «С» написаны (в любом порядке) цифры 3 и 6. В таком случае справедливо неравенство $\text{Л} + \text{Н} + 1 + 2 \geqslant 20$, из которого восстанавливаются значения цифр на оставшихся карточках.

Ответ к варианту 2: $8 + \frac{2}{3} + 2 + 9 + \frac{2}{6} = 20$ и варианты, в которых переставлены местами пары цифр 8 и 9, 3 и 6.

Задача 2. Убедитесь, что $1009 = 15^2 + 28^2$, и представьте число 2018 в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

Ответ: $2018^2 = 13^2 + 43^2$.

Решение. Данное в условии равенство проверяется непосредственно. Пусть $a = 15$, $b = 28$. Тогда $1009 = a^2 + b^2$, $2018 = 2a^2 + 2b^2 = (a + b)^2 + (a - b)^2 = 13^2 + 43^2$.

Ответ к варианту 2: $3866^2 = 29^2 + 55^2$.

Задача 3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведены биссектриса BD и высота CH. Из вершины C на биссектрису BD опущен перпендикуляр CK. Найдите угол HCK, если $BK : KD = 3 : 1$.

Ответ: $30°$.

Решение. Пусть M — середина BD. Тогда CM — медиана прямоугольного треугольника CBD и $CM = MB = MD$. Кроме того, CK является высотой и медианой треугольника MCD, поэтому $MC = CD$ и треугольник CMD равносторонний. Тогда $\angle CDM = 60°$ и $\angle CBM = \angle CBD = 90° - 60° = 30°$, следовательно, $\angle CBA = 2\angle CBD = 60°$. Отсюда $\angle BCH = 30°$, $\angle HCK = 90° - 30° - 30° = 30°$.

Ответ к варианту 2: $30°$.

Задача 4. Стрелочные часы показывают ровно час. Комар и муха сидят на одинаковом расстоянии от центра на часовой и минутной стрелках соответственно. Когда стрелки совпадают, насекомые меняются местами. Во сколько раз расстояние, которое за полсуток преодолел комар, больше расстояния, которое преодолела за это же время муха?

Ответ: 83/73.

Решение. Комар и муха движутся по кругу. За первый час комар преодолеет 11/12 этого круга (в начале был на часовой стрелке, указывающей на час, в конце — на минутной, указывающей на 12). За второй час комар преодолеет 3/12 круга (был на минутной, указывающей на 12, стал на часовой, указывающей на 3). Таким образом, комар преодолел 14/12 круга за первые 2 часа. За следующие 2 часа он также преодолеет 14/12 круга, и т. д. Получим, что за 10 часов он прошёл $5 \cdot 14/12 = 70/12$ круга. Одиннадцатый час начинается с того, что комар на часовой стрелке, указывающей на 11, минутная указывает на 12. Комар за этот час проделает 1/12 круга и в конце окажется на минутной стрелке. За последний, двенадцатый час минутная и часовая стрелки не встретятся, комар пройдёт один круг. Итак, за полсуток комар преодолеет расстояние $A = 70/12 + 1/12 + 1 = 83/12$. Аналогично рассуждая для мухи, получим расстояние $B = 5 \cdot (2/12 + 10/12) + 1 + 1/12 = 73/12$. Отсюда находим $A/B = 83/73$.

Ответ к варианту 2: 72/71.

Задача 5. Каждую клетку таблицы 3×3 раскрашивают в один из трёх цветов так, что клетки, имеющие общую сторону, имеют разный цвет. Среди всех возможных таких раскрасок найдите долю тех, в которых использовано ровно два цвета.

Ответ: 1/41.

Решение. Центральную клетку можно раскрасить в любой из трёх цветов, назовём этот цвет a. Каждую из четырёх клеток, имеющих общую сторону с центральной, можно раскрасить в любой из двух оставшихся цветов. Пусть клетка, расположенная над центральной, раскрашена в цвет b. Третий цвет назовём c. Рассмотрим всевозможные варианты раскраски клеток, имеющих общую сторону с центральной, и закодируем их строчками из букв b и c, которые начинаются с буквы b, а затем соответствуют цветам этих клеток, пробегаемых против часовой стрелки. Например, раскраска

	b	
c	a	b
	c	

будет закодирована строчкой $bccb$.

Рассмотрим любую угловую клетку. Если две клетки, имеющие с ней общую сторону, раскрашены в один цвет, то угловую клетку можно раскрасить двумя способами. Если же эти две клетки раскрашены в разные цвета, то угловую клетку можно раскрасить только одним способом. Составим таблицу, в которой для каждой из 8 полученных кодирующих строчек укажем число раскрасок угловых клеток.

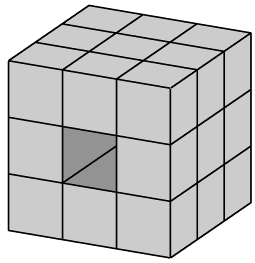
$bbbb$	16	$bbcb$	4	$bcbb$	4	$bccb$	4
$bbbc$	4	$bbcc$	4	$bcbc$	1	$bccc$	4

Таким образом, искомое число раскрасок равно произведению числа способов раскрасить центральную клетку на число способов раскрасить клетку, расположенную над центральной, на сумму чисел построенной таблицы: $3 \cdot 2 \cdot (16 + 6 \cdot 4 + 1) = 246$.

Число же двухцветных таблиц равно 6, так как цвет центральной клетки в этом случае совпадает с цветом угловых клеток, а для клеток, имеющих общую сторону с центральной, всегда есть два возможных варианта. Отсюда получаем, что искомое отношение равно $\frac{1}{41}$.

Ответ к варианту 2: 40/41.

Задача 6. Из 24 одинаковых деревянных кубиков склеили «трубу» — куб $3 \times 3 \times 3$ с убранной «сердцевиной» из трёх кубиков (см. рисунок). Можно ли в каждом квадратике на поверхности «трубы» провести диагональ так, чтобы получился замкнутый путь, который ни через одну вершину не проходит дважды?



Ответ: Нет.

Решение. Диагоналей на поверхности «трубы» столько же, сколько граней кубиков на этой поверхности: $4 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 12 = 64$. Несамопересекающийся замкнутый путь, проходящий по всем диагоналям, должен содержать столько же вершин. Вершин всех кубиков также 64 (четыре «слоя» по 16 вершин — задействованы все узловые точки куба $3 \times 3 \times 3$). Раскрасим их в чёрный и белый цвета в шахматном порядке: у каждой вершины соседние другого цвета. Получится по 32 вершины каждого цвета. Но искомый путь может проходить только через вершины одного цвета, и поэтому может содержать не более 32 диагоналей.

Ответ к варианту 2: Нет.

Задача 7. На столе лежат карточки с числами от 1 до 8: одна карточка с числом 1, две с числом 2, три с числом 3, и т. д. Петя и Вася поочерёдно берут по одной карточке и складывают в одну колоду (начинает Петя). После очередного хода Васи Петя может сказать «стоп», и тогда все невыбранные карточки убираются со стола, а далее Вася и Петя поочерёдно выбирают любые карточки из получившейся колоды (начинает Вася) и выкладывают их на стол слева направо. Если после того, как на стол будет выложена последняя карточка, получившееся число будет являться разностью квадратов каких-то целых чисел, побеждает Вася, иначе побеждает Петя. Может ли кто-то из игроков действовать так, чтобы обеспечить себе выигрыш независимо от действий другого?

Ответ: Да, может (Вася).

Решение. Во-первых, заметим, что в виде разности квадратов целых чисел представимо любое нечётное число, так как $2k + 1 = (2k + 1)^2 - k^2$, и любое число делящееся на 4, так как $4k = (k+1)^2 - (k-1)^2$. Во-вторых, в силу условий задачи последнюю карточку из стопки будет класть Петя. Если среди двух оставшихся в конце цифр есть хотя бы одна нечётная, Вася оставит её Пете и выиграет игру. Если среди двух оставшихся в конце цифр остались только чётные, и хотя бы одна из них делится на 4, то Вася оставляет Пете карточку с цифрой, делящейся на 4, и также выигрывает игру. Следовательно, единственный случай, когда Петя может выиграть, это когда в конце остаются две чётные цифры, не делящиеся на 4.

Назовём цифры, делящиеся на 4, и нечётные цифры «хорошими», а остальные — «плохими». Заметим, что исходно карточек с «хорошими» цифрами больше, поэтому в первой части игры Вася всегда может выбирать карточки с «хорошими» цифрами, тогда в получившейся стопке их будет не меньше половины. Если Вася всегда будет класть на стол карточки с «плохими» цифрами, пока они есть, то в конце, среди двух оставшихся карточек будет по крайней мере одна с «хорошей» цифрой, и Вася выиграет.

Ответ к варианту 2: Да, может (Оля).

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2018/2019 учебного года для 9 класса

Задача 1. Вася и Петя выбежали одновременно с места старта круговой беговой дорожки и побежали в противоположных направлениях. На бегу в некотором месте дорожки они встретились. Вася пробежал полный круг и, продолжая бег в том же направлении, добежал до места их прежней встречи в тот момент, когда Петя пробежал полный круг. Во сколько раз Вася бежал быстрее Пети?

Ответ: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Решение. Пусть v — скорость Пети, xv — скорость Васи, t — время, за которое они добрались до места встречи. Тогда из условия имеем уравнение $\dfrac{(1+x)vt}{xv} = \dfrac{xvt}{v}$, откуда $x^2 = 1 + x$, $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Ответ к варианту 2: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Задача 2. Расстояние между корнями квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ равно 1. Найдите коэффициенты p и q, если известно, что они являются простыми числами.

Ответ: $p = 3$, $q = 2$.

Решение. Квадрат расстояния между корнями трёхчлена равен

$$|x_1 - x_2|^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 4q = 1,$$

откуда получаем $(p-1)(p+1) = 4q$. Оба множителя, стоящих в левой части, — чётные, и один из них делится на 4, поэтому $4q$ делится на 8. Поскольку q простое, $q = 2$, откуда $p = 3$.

Ответ к варианту 2: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Задача 3. Стрелочные часы показывают ровно час. Комар и муха сидят на одинаковом расстоянии от центра на часовой и минутной стрелках соответственно. Когда стрелки совпадают, насекомые меняются местами. Во сколько раз расстояние, которое за полсуток преодолел комар, больше расстояния, которое преодолела за это же время муха?

Ответ: 83/73.

Решение. Комар и муха движутся по кругу. За первый час комар преодолеет 11/12 этого круга (в начале был на часовой стрелке, указывающей на час, в конце — на минутной, указывающей на 12). За второй час комар преодолеет 3/12 круга (был на минутной, указывающей на 12, стал на часовой, указывающей на 3). Таким образом, комар преодолел 14/12 круга за первые 2 часа. За следующие 2 часа он также преодолеет 14/12 круга, и т. д. Получим, что за 10 часов он прошёл $5 \cdot 14/12 = 70/12$ круга. Одиннадцатый час начинается с того, что комар на часовой стрелке, указывающей на 11, минутная указывает на 12. Комар за этот час проделает 1/12 круга и в конце окажется на минутной стрелке. За последний, двенадцатый час минутная и часовая стрелки не встретятся, комар пройдёт один круг. Итак, за полсуток комар преодолеет расстояние $A = 70/12 + 1/12 + 1 = 83/12$. Аналогично рассуждая для мухи, получим расстояние $B = 5 \cdot (2/12 + 10/12) + 1 + 1/12 = 73/12$. Отсюда $A/B = 83/73$.

Ответ к варианту 2: 72/71.

Задача 4. Каждую клетку таблицы 3×3 раскрашивают в один из трёх цветов так, что клетки, имеющие общую сторону, имеют разный цвет. Среди всех возможных таких раскрасок найдите долю тех, в которых использовано ровно два цвета.

Ответ: 1/41.

Решение. Центральную клетку можно раскрасить в любой из трёх цветов, назовём этот цвет a. Каждую из четырёх клеток, имеющих общую сторону с центральной, можно раскрасить в любой из двух оставшихся цветов. Пусть клетка, расположенная над центральной, раскрашена в цвет b. Третий цвет назовём c. Рассмотрим всевозможные варианты раскраски клеток, имеющих общую сторону с центральной, и закодируем их строчками из букв b и c, которые начинаются с буквы b, а затем соответствуют цветам этих клеток, пробегаемых против часовой стрелки. Например, раскраска

	b	
c	a	b
	c	

будет закодирована строчкой $bccb$.

Рассмотрим любую угловую клетку. Если две клетки, имеющие с ней общую сторону, раскрашены в один цвет, то угловую клетку можно раскрасить двумя способами. Если же эти две клетки раскрашены в разные цвета, то угловую клетку можно раскрасить только одним способом. Составим таблицу, в которой для каждой из 8 полученных кодирующих строчек укажем число раскрасок угловых клеток.

$bbbb$	16	$bbcb$	4	$bcbb$	4	$bccb$	4
$bbbc$	4	$bbcc$	4	$bcbc$	1	$bccc$	4

Таким образом, искомое число раскрасок равно произведению числа способов раскрасить центральную клетку на число способов раскрасить клетку, расположенную над центральной, на сумму чисел построенной таблицы: $3 \cdot 2 \cdot (16 + 6 \cdot 4 + 1) = 246$.

Число же двухцветных таблиц равно 6, так как цвет центральной клетки в этом случае совпадает с цветом угловых клеток, а для клеток, имеющих общую сторону с центральной, всегда есть два возможных варианта. Отсюда получаем, что искомое отношение равно $\frac{1}{41}$.

Ответ к варианту 2: 40/41.

Задача 5. Числа a, b и c удовлетворяют равенству $\sqrt{a} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$. Найдите a, если $b = 52 - 30\sqrt{3}$ и $c = a - 2$.

Ответ: $a = 27$.

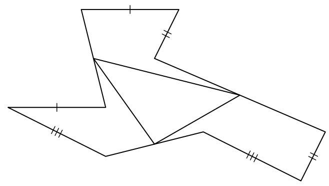
Решение. Имеем

$$\sqrt{b} = \sqrt{52 - 30\sqrt{3}} = \sqrt{27 - 2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{3} + 25} = 3\sqrt{3} - 5.$$

Следовательно, $\sqrt{a} - \sqrt{a-2} = 3\sqrt{3} - 5$, $\dfrac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{a-2}} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}+5}$, $\sqrt{a} + \sqrt{a-2} = \sqrt{27} + \sqrt{25}$. Поскольку функция $f(a) = \sqrt{a} + \sqrt{a-2}$ возрастает и $f(27) = 0$, единственным решением данного уравнения является $a = 27$.

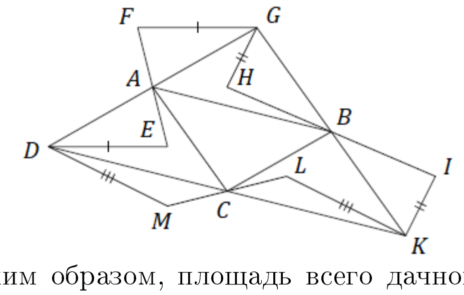
Ответ к варианту 2: $c = 16$.

Задача 6. Лёшин дачный участок имеет форму девятиугольника, у которого есть три пары равных и параллельных сторон (см. рисунок). Лёша знает, что площадь треугольника с вершинами в серединах оставшихся сторон девятиугольника равна 12 соток. Помогите ему найти площадь всего дачного участка.



Ответ: 48 соток.

Решение. Пусть $DEFGHIKLM$ — данный девятиугольник, ABC — треугольник с вершинами в серединах оставшихся (неотмеченных) сторон. Из условия следует, что четырёхугольник $DFGE$ — параллелограмм, так как его противоположные стороны DE и FG равны и параллельны. В параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам, следовательно, точки D, A, G лежат на одной прямой. Кроме того, $DA = AG$.



Аналогично рассуждая про четырёхугольники $HGIK$ и $KMDL$, получаем, что точка B лежит на прямой GK, точка C лежит на прямой DK, и $GB = BK$, $KC = CD$.

Площадь девятиугольника $DEFGHIKLM$ равна площади треугольника DGK, так как треугольники AFG, BIK и CMD равны соответственно треугольникам AED, BHG и CLK. Наконец, A, B, C — середины сторон треугольника DGK, а значит, его площадь в 4 раза больше площади треугольника ABC. Таким образом, площадь всего дачного участка равна

$$S_{DEFGHIKLM} = 4S_{ABC} = 48 \text{ соток}.$$

Ответ к варианту 2: 32 сотки.

Задача 7. Какое из чисел больше: $\frac{1}{99}$ или

$$\frac{1}{9903}+\frac{1}{9903+200}+\frac{1}{9903+200+202}+\ldots+\frac{1}{9903+200+202+\ldots+2018}?$$

Ответ: Первое.

Решение. Пусть A — второе из данных чисел. Уменьшим все знаменатели числа A на 3, полученное число B будет больше, чем A:

$$A<B=\frac{1}{9900}+\frac{1}{9900+200}+\frac{1}{9900+200+202}+...+\frac{1}{9900+200+202+...+2018}.$$

Рассмотрим знаменатели дробей числа B. Заметим, что $9900=99\cdot100$. Следующий знаменатель равен $99\cdot100+200=100\cdot101$. Следующий равен $100\cdot101+202=101\cdot102$, и т. д. Последний знаменатель будет равен $1009\cdot1010$. Значит,

$$B=\frac{1}{99\cdot100}+\frac{1}{100\cdot101}+\frac{1}{101\cdot102}+\ldots+\frac{1}{1009\cdot1010}=$$

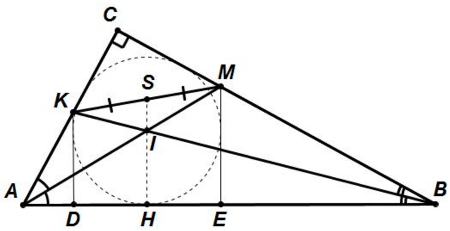
$$=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}+\frac{1}{101}-\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{1009}-\frac{1}{1010}=\frac{1}{99}-\frac{1}{1010}<\frac{1}{99}.$$

Таким образом, $A<B<\frac{1}{99}$.

Ответ к варианту 2: Первое.

Задача 8. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки P и Q — середины биссектрис, проведённых из вершин A и B. Вписанная в треугольник окружность касается гипотенузы в точке H. Найдите угол PHQ.

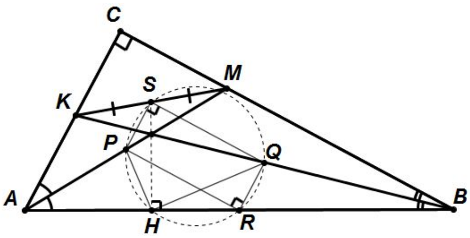
Ответ: 90°.



Решение. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90°$) I — точка пересечения биссектрис AM и BK, S — середина KM, вписанная в треугольник окружность касается гипотенузы в точке H. Тогда точки S, I и H лежат на одной прямой.

Доказательство. Обозначим через D и E проекции точек K и M на гипотенузу AB (см. рис.). Тогда $\triangle DKB=\triangle CKB$ по гипотенузе и острому углу, следовательно, $\angle DKB=\angle CKB$, то есть KB — биссектриса внешнего угла $\triangle AKD$, а AI — биссектриса его внутреннего угла. Значит, I — центр вневписанной окружности $\triangle AKD$, поэтому DI — биссектриса угла KDE. Аналогично доказывается, что EI является биссектрисой угла MDE. Таким образом, $\triangle DIE$ — прямоугольный и равнобедренный, то есть IH — серединный перпендикуляр к DE. Точка S, будучи серединой боковой стороны прямоугольной трапеции $DKME$, также лежит на серединном перпендикуляре к DE. Поэтому точки S, I и H лежат на одной прямой. Лемма доказана.



Пользуясь леммой, докажем теперь, что $\angle PHQ=90°$. Пусть R — середина гипотенузы AB. Тогда PS и RQ являются средними линиями в треугольниках $\triangle AKM$ и $\triangle AKB$, поэтому $PS\parallel AK\parallel QR$ и $PS=\frac{1}{2}AK=QR$, значит, $PSQR$ — параллелограмм. Более того, $\angle PSQ=90°$, так как его стороны сонаправлены сторонам угла $\angle ACB=90°$. Значит, $PSQR$ — прямоугольник.

Обозначим через Ω окружность, описанную около прямоугольника $PSQR$. Из леммы следует, что $\angle SHR=90°$. Поскольку $\angle SPR=\angle SHR$, точка H лежит на окружности Ω. Следовательно, $\angle PHQ=\angle PRQ=90°$ (как вписанные углы, опирающиеся на диаметр PQ).

Ответ к варианту 2: 90°.

Критерии проверки работ заключительного этапа олимпиады школьников «Ломоносов» по математике

5–9 классы (2018/2019 учебный год)

В решении задач оценивается прежде всего математическая правильность, однако приветствуется и рациональность решения, а также аккуратность и подробность его текста.

За решение каждой задачи ставится одна из следующих оценок:

- «+» — задача решена верно и полностью;
- «+.» — задача решена с незначительными недочётами;
- «±» — задача в целом решена, но в решении есть существенные недостатки (пробелы в обоснованиях, вычислительная ошибка в конце идейно верного решения и т.п.);
- «∓» — задача не решена, но получено существенное продвижение в решении;
- «−» — задача не решена или решение содержит грубые ошибки.

Эти оценки переводятся в баллы в соответствии с таблицей:

5–6 классы

+/+.	±	∓	−
20	14	7	0

7–8 классы

+/+.	±	∓	−
18	12	6	0

9 класс

+/+.	±	∓	−
15	10	5	0

Общий балл за работу равен сумме баллов за решения всех задач. Если сумма баллов за задачи превышает 100, то итоговый балл равен «100». Если сумма баллов по всем задачам равна 0, то итоговый балл равен «2».

Решения, содержащие типичные ошибки, оцениваются в соответствии с указаниями старших по проверке.