

**Олимпиада школьников «Ломоносов» 2018/2019 учебного года
по механике и математическому моделированию**

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Отборочный этап. Тур 1

10-11 классы

Во всех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно).

::1.1:: Гаврила и Глафира едут на велосипедах по дороге, общая длина которой 28 км. Глафира едет со скоростью 12 км/час. Велосипед Гаврилы сломан, и поэтому его скорость всего 8 км/час. Так как Гаврила все время отстает, Глафира каждый раз ожидает его на стоянках, расположенных около дороги на отметках 3,9 км, 8,1 км, 14,3 км, 21,9 км и 28 км. Сколько всего минут проведет Глафира в ожидании Гаврилы? Ответ, при необходимости, округлите до целых.

{= 70}

::1.2:: Гаврила и Глафира едут на велосипедах по дороге, общая длина которой 30 км. Глафира едет со скоростью 15 км/час. Велосипед Гаврилы сломан, и поэтому его скорость всего 8 км/час. Так как Гаврила все время отстает, Глафира каждый раз ожидает его на стоянках, расположенных около дороги на отметках 4,1 км, 8,4 км, 14,8 км, 22,2 км и 30 км. Сколько всего минут проведет Глафира в ожидании Гаврилы? Ответ, при необходимости, округлите до целых.

{= 105}

::1.3:: Гаврила и Глафира едут на велосипедах по дороге, общая длина которой 32 км. Глафира едет со скоростью 12 км/час. Велосипед Гаврилы сломан, и поэтому его скорость всего 8 км/час. Так как Гаврила все время отстает, Глафира каждый раз ожидает его на стоянках, расположенных около дороги на отметках 4,4 км, 8,5 км, 14,8 км, 23,8 км и 32 км. Сколько всего минут проведет Глафира в ожидании Гаврилы? Ответ, при необходимости, округлите до целых.

{= 80}

::1.4:: Гаврила и Глафира едут на велосипедах по дороге, общая длина которой 40 км. Глафира едет со скоростью 15 км/час. Велосипед Гаврилы сломан, и поэтому его скорость всего 8 км/час. Так как Гаврила все время отстает, Глафира каждый раз ожидает его на стоянках, расположенных около дороги на отметках 8,1 км, 14,4 км, 26,2 км, 32,4 км и 40 км. Сколько всего минут проведет Глафира в ожидании Гаврилы? Ответ, при необходимости, округлите до целых.

{= 140}

::2.1:: Стоя на краю высокого крутого обрыва, Гаврила одновременно бросил два камня с одинаковой по модулю скоростью 20 м/с: один вертикально вверх, а второй под углом 60° к горизонту. Определите перемещение второго камня относительно первого в тот момент, когда второй камень вновь окажется на исходной высоте. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 , сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ дать в метрах, округлив, при необходимости, до целого числа.

{= 36}

::2.2:: Стоя на краю высокого крутого обрыва, Гаврила одновременно бросил два камня с одинаковой по модулю скоростью 10 м/с: один вертикально вверх, а второй

под углом 45° к горизонту. Определите перемещение второго камня относительно первого в тот момент, когда второй камень вновь окажется на исходной высоте. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 , сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ дать в метрах, округлив, при необходимости, до целого числа.

$$\{= 11\}$$

::2.3:: Стоя на краю высокого крутого обрыва, Гаврила одновременно бросил два камня с одинаковой по модулю скоростью 10 м/с : один вертикально вверх, а второй под углом 30° к горизонту. Определите перемещение второго камня относительно первого в тот момент, когда второй камень вновь окажется на исходной высоте. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 , сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ дать в метрах, округлив, при необходимости, до целого числа.

$$\{= 10\}$$

::2.4:: Стоя на краю высокого крутого обрыва, Гаврила одновременно бросил два камня с одинаковой по модулю скоростью 20 м/с : один вертикально вверх, а второй под углом 75° к горизонту. Определите перемещение второго камня относительно первого в тот момент, когда второй камень вновь окажется на исходной высоте. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 , сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ дать в метрах, округлив, при необходимости, до целого числа.

$$\{= 20\}$$

::3.1:: На сколько процентов изменится ускорение тела, которое помещают без начальной скорости на плоскость, наклоненную под углом 30° к горизонту, при увеличении коэффициента трения между телом и плоскостью на 50% ? Начальное значение коэффициента трения $\mu = 0.4$. Ответ дайте в процентах, округлив, при необходимости, до целого.

$$\{= 100\}$$

::3.2:: На сколько процентов изменится ускорение тела, которое помещают без начальной скорости на плоскость, наклоненную под углом 30° к горизонту, при увеличении коэффициента трения между телом и плоскостью на 20% ? Начальное значение коэффициента трения $\mu = 0.5$. Ответ дайте в процентах, округлив, при необходимости, до целого.

$$\{= 100\}$$

::3.3:: На сколько процентов изменится ускорение тела, которое помещают без начальной скорости на плоскость, наклоненную под углом 30° к горизонту, при увеличении коэффициента трения между телом и плоскостью на 80% ? Начальное значение коэффициента трения $\mu = 0.35$. Ответ дайте в процентах, округлив, при необходимости, до целого.

$$\{= 100\}$$

::3.4:: На сколько процентов изменится ускорение тела, которое помещают без начальной скорости на плоскость, наклоненную под углом 30° к горизонту, при увеличении коэффициента трения между телом и плоскостью на 30% ? Начальное значение коэффициента трения $\mu = 0.45$. Ответ дайте в процентах, округлив, при необходимости, до целого.

$$\{= 100\}$$

::4.1:: Имеется треугольник с углом 60° , лежащей напротив этого угла стороной длиной 11 см и еще одной стороной длиной 5 см. Требуется вырезать из фанеры такой круг, внутри которого можно разместить этот треугольник. Найдите наименьший возможный радиус (в сантиметрах) такого круга. Ответ, при необходимости, округлите до сотых.

{= 6, 31}

::4.2:: Имеется треугольник с углом 60° , лежащей напротив этого угла стороной длиной 13 см и еще одной стороной длиной 6 см. Требуется вырезать из фанеры такой круг, внутри которого можно разместить этот треугольник. Найдите наименьший возможный радиус (в сантиметрах) такого круга. Ответ, при необходимости, округлите до сотых.

{= 7, 46}

::4.3:: Имеется треугольник с углом 60° , лежащей напротив этого угла стороной длиной 23 см и еще одной стороной длиной 10 см. Требуется вырезать из фанеры такой круг, внутри которого можно разместить этот треугольник. Найдите наименьший возможный радиус (в сантиметрах) такого круга. Ответ, при необходимости, округлите до сотых.

{= 13, 15}

::4.4:: Имеется треугольник с углом 60° , лежащей напротив этого угла стороной длиной 25 см и еще одной стороной длиной 12 см. Требуется вырезать из фанеры такой круг, внутри которого можно разместить этот треугольник. Найдите наименьший возможный радиус (в сантиметрах) такого круга. Ответ, при необходимости, округлите до сотых.

{= 14, 37}

::5.1:: Одноатомный идеальный газ является рабочим телом тепловой машины. Сначала происходит изобарическое сжатие из состояния 1 в состояние 2, потом изохорический нагрев в состояние 3 до такой же температуры, что и в состоянии 1. Цикл замыкается процессом 3-1, в котором давление есть линейная функция объема. Если давление газа в состояниях 2 и 3 равно 1 атм и 2 атм соответственно, то кпд тепловой машины составляет 25%. Определите кпд тепловой машины, которая работает по подобному циклу, в котором давление на участке 2-3 изменяется от 2 до 4 атм. Ответ дайте в процентах, округлив, при необходимости, до целого.

{25}

::5.2:: Одноатомный идеальный газ является рабочим телом тепловой машины. Сначала происходит изохорический нагрев из состояния 1 в состояние 2, потом происходит процесс 2-3, в котором давление есть линейная функция объема, цикл замыкается изобарическим сжатием. Температура газа в состояниях 2 и 3 одинакова. Если объем газа в состояниях 1 и 3 равен 1 л и 2 л соответственно, то кпд тепловой машины составляет 15%. Определите кпд тепловой машины, которая работает по подобному циклу, в котором объем на участке 3-1 изменяется от 4 до 2 л. Ответ дайте в процентах, округлив, при необходимости, до целого.

{15}

::5.3:: Одноатомный идеальный газ является рабочим телом тепловой машины. Сначала происходит изобарическое сжатие из состояния 1 в состояние 2, потом изохорический нагрев в состояние 3 до такой же температуры, что и в состоянии 1. Цикл замыкается процессом 3-1, в котором давление есть линейная функция объема. Если давление газа в состояниях 1 и 3 равно 1 атм и 2 атм соответственно, то кпд тепловой машины составляет 20%. Определите кпд тепловой машины, которая работает по подобному циклу, в котором давление на участке 2-3 изменяется от 2 до 6 атм. Ответ дайте в процентах, округлив, при необходимости, до целого.

{20}

::5.4:: Одноатомный идеальный газ является рабочим телом тепловой машины. Сначала происходит изохорический нагрев из состояния 1 в состояние 2, потом происходит

процесс 2-3, в котором давление есть линейная функция объема, цикл замыкается изобарическим сжатием. Температура газа в состояниях 2 и 3 одинакова. Если объем газа в состояниях 1 и 3 равен 5 л и 10 л соответственно, то кпд тепловой машины составляет 10%. Определите кпд тепловой машины, которая работает по подобному циклу, в котором объем на участке 3-1 изменяется от 6 до 3 л. Ответ дайте в процентах, округлив, при необходимости, до целого.

{10}

**Олимпиада школьников «Ломоносов» 2018/2019 учебного года
по механике и математическому моделированию**

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Отборочный этап. Тур 1

9 класс

Во всех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно).

::1.1:: Гаврила и Глафира едут на велосипедах по дороге, общая длина которой 28 км. Глафира едет со скоростью 12 км/час. Велосипед Гаврилы сломан, и поэтому его скорость всего 8 км/час. Так как Гаврила все время отстает, Глафира каждый раз ожидает его на стоянках, расположенных около дороги на отметках 3,9 км, 8,1 км, 14,3 км, 21,9 км и 28 км. Сколько всего минут проведет Глафира в ожидании Гаврилы? Ответ, при необходимости, округлите до целых.

{= 70}

::1.2:: Гаврила и Глафира едут на велосипедах по дороге, общая длина которой 30 км. Глафира едет со скоростью 15 км/час. Велосипед Гаврилы сломан, и поэтому его скорость всего 8 км/час. Так как Гаврила все время отстает, Глафира каждый раз ожидает его на стоянках, расположенных около дороги на отметках 4,1 км, 8,4 км, 14,8 км, 22,2 км и 30 км. Сколько всего минут проведет Глафира в ожидании Гаврилы? Ответ, при необходимости, округлите до целых.

{= 105}

::1.3:: Гаврила и Глафира едут на велосипедах по дороге, общая длина которой 32 км. Глафира едет со скоростью 12 км/час. Велосипед Гаврилы сломан, и поэтому его скорость всего 8 км/час. Так как Гаврила все время отстает, Глафира каждый раз ожидает его на стоянках, расположенных около дороги на отметках 4,4 км, 8,5 км, 14,8 км, 23,8 км и 32 км. Сколько всего минут проведет Глафира в ожидании Гаврилы? Ответ, при необходимости, округлите до целых.

{= 80}

::1.4:: Гаврила и Глафира едут на велосипедах по дороге, общая длина которой 40 км. Глафира едет со скоростью 15 км/час. Велосипед Гаврилы сломан, и поэтому его скорость всего 8 км/час. Так как Гаврила все время отстает, Глафира каждый раз ожидает его на стоянках, расположенных около дороги на отметках 8,1 км, 14,4 км, 26,2 км, 32,4 км и 40 км. Сколько всего минут проведет Глафира в ожидании Гаврилы? Ответ, при необходимости, округлите до целых.

{= 140}

::2.1:: Стоя на краю высокого крутого обрыва, Гаврила одновременно бросил два камня с одинаковой по модулю скоростью 20 м/с: один вертикально вверх, а второй под углом 60° к горизонту. Определите перемещение второго камня относительно первого в тот момент, когда второй камень вновь окажется на исходной высоте. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 , сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ дать в метрах, округлив, при необходимости, до целого числа.

{= 36}

::2.2:: Стоя на краю высокого крутого обрыва, Гаврила одновременно бросил два камня с одинаковой по модулю скоростью 10 м/с: один вертикально вверх, а второй

под углом 45° к горизонту. Определите перемещение второго камня относительно первого в тот момент, когда второй камень вновь окажется на исходной высоте. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 , сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ дать в метрах, округлив, при необходимости, до целого числа.

$$\{= 11\}$$

::2.3:: Стоя на краю высокого крутого обрыва, Гаврила одновременно бросил два камня с одинаковой по модулю скоростью 10 м/с : один вертикально вверх, а второй под углом 30° к горизонту. Определите перемещение второго камня относительно первого в тот момент, когда второй камень вновь окажется на исходной высоте. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 , сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ дать в метрах, округлив, при необходимости, до целого числа.

$$\{= 10\}$$

::2.4:: Стоя на краю высокого крутого обрыва, Гаврила одновременно бросил два камня с одинаковой по модулю скоростью 20 м/с : один вертикально вверх, а второй под углом 75° к горизонту. Определите перемещение второго камня относительно первого в тот момент, когда второй камень вновь окажется на исходной высоте. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 , сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ дать в метрах, округлив, при необходимости, до целого числа.

$$\{= 20\}$$

::3.1:: На сколько процентов изменится ускорение тела, которое помещают без начальной скорости на плоскость, наклоненную под углом 30° к горизонту, при увеличении коэффициента трения между телом и плоскостью на 50% ? Начальное значение коэффициента трения $\mu = 0.4$. Ответ дайте в процентах, округлив, при необходимости, до целого.

$$\{= 100\}$$

::3.2:: На сколько процентов изменится ускорение тела, которое помещают без начальной скорости на плоскость, наклоненную под углом 30° к горизонту, при увеличении коэффициента трения между телом и плоскостью на 20% ? Начальное значение коэффициента трения $\mu = 0.5$. Ответ дайте в процентах, округлив, при необходимости, до целого.

$$\{= 100\}$$

::3.3:: На сколько процентов изменится ускорение тела, которое помещают без начальной скорости на плоскость, наклоненную под углом 30° к горизонту, при увеличении коэффициента трения между телом и плоскостью на 80% ? Начальное значение коэффициента трения $\mu = 0.35$. Ответ дайте в процентах, округлив, при необходимости, до целого.

$$\{= 100\}$$

::3.4:: На сколько процентов изменится ускорение тела, которое помещают без начальной скорости на плоскость, наклоненную под углом 30° к горизонту, при увеличении коэффициента трения между телом и плоскостью на 30% ? Начальное значение коэффициента трения $\mu = 0.45$. Ответ дайте в процентах, округлив, при необходимости, до целого.

$$\{= 100\}$$

::4.1:: На испытаниях длительности работы электродвигателей без подзарядки международная комиссия признала, что треть моделей показали отличный результат (проработав непрерывно более 5 часов). Еще 44% моделей были признаны хорошими (они проработали от 4 до 5 часов), а 8 моделей получили оценку "удовлетворительно" (они

проработали от 3 до 4 часов). Известно, что эти 8 моделей составляют более 3%, но менее 4% от общего числа участников испытаний.

Остальные электродвигатели проработали менее 3 часов, и поэтому не прошли квалификацию. Сколько моделей не прошли квалификацию?

{= 43}

::4.2:: На испытаниях длительности работы электродвигателей без подзарядки международная комиссия признала, что треть моделей показали отличный результат (проработав непрерывно более 5 часов). Еще 44% моделей были признаны хорошими (они проработали от 4 до 5 часов), а 8 моделей получили оценку "удовлетворительно" (они проработали от 3 до 4 часов). Известно, что эти 8 моделей составляют более 3%, но менее 4% от общего числа участников испытаний.

Остальные электродвигатели проработали менее 3 часов, и поэтому не прошли квалификацию. Сколько моделей не прошли квалификацию?

{= 43}

::4.3:: На испытаниях длительности работы электродвигателей без подзарядки международная комиссия признала, что треть моделей показали отличный результат (проработав непрерывно более 5 часов). Еще 44% моделей были признаны хорошими (они проработали от 4 до 5 часов), а 8 моделей получили оценку "удовлетворительно" (они проработали от 3 до 4 часов). Известно, что эти 8 моделей составляют более 3%, но менее 4% от общего числа участников испытаний.

Остальные электродвигатели проработали менее 3 часов, и поэтому не прошли квалификацию. Сколько моделей не прошли квалификацию?

{= 43}

::4.4:: На испытаниях длительности работы электродвигателей без подзарядки международная комиссия признала, что треть моделей показали отличный результат (проработав непрерывно более 5 часов). Еще 44% моделей были признаны хорошими (они проработали от 4 до 5 часов), а 8 моделей получили оценку "удовлетворительно" (они проработали от 3 до 4 часов). Известно, что эти 8 моделей составляют более 3%, но менее 4% от общего числа участников испытаний.

Остальные электродвигатели проработали менее 3 часов, и поэтому не прошли квалификацию. Сколько моделей не прошли квалификацию?

{= 43}

::5.1:: Имеется треугольник с углом 60° , лежащей напротив этого угла стороной длиной 11 см и еще одной стороной длиной 5 см. Требуется вырезать из фанеры такой круг, внутри которого можно разместить этот треугольник. Найдите наименьший возможный радиус (в сантиметрах) такого круга. Ответ, при необходимости, округлите до сотых.

{= 6,31}

::5.2:: Имеется треугольник с углом 60° , лежащей напротив этого угла стороной длиной 13 см и еще одной стороной длиной 6 см. Требуется вырезать из фанеры такой круг, внутри которого можно разместить этот треугольник. Найдите наименьший возможный радиус (в сантиметрах) такого круга. Ответ, при необходимости, округлите до сотых.

{= 7,46}

::5.3:: Имеется треугольник с углом 60° , лежащей напротив этого угла стороной длиной 23 см и еще одной стороной длиной 10 см. Требуется вырезать из фанеры такой круг, внутри которого можно разместить этот треугольник. Найдите наименьший возможный радиус (в сантиметрах) такого круга. Ответ, при необходимости, округлите до сотых.

{= 13,15}

::5.4:: Имеется треугольник с углом 60° , лежащей напротив этого угла стороной длиной 25 см и еще одной стороной длиной 12 см. Требуется вырезать из фанеры такой круг, внутри которого можно разместить этот треугольник. Найдите наименьший возможный радиус (в сантиметрах) такого круга. Ответ, при необходимости, округлите до сотых.

$$\{= 14, 37\}$$

7-8 классы

1.1. С какой минимальной силой надо надавить на кубик объемом 10 см^3 , плавающий в воде, чтобы он полностью находился под водой? Плотность материала кубика $600 \text{ кг}/\text{м}^3$, плотность воды $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$. Ответ дать в единицах СИ. Ускорение свободного падения принять равным $10 \text{ м}/\text{с}^2$.

Ответ. 0,04.

1.2. С какой минимальной силой надо надавить на кубик объемом 10 см^3 , плавающий в воде, чтобы он полностью находился под водой? Плотность материала кубика $500 \text{ кг}/\text{м}^3$, плотность воды $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$. Ответ дать в единицах СИ. Ускорение свободного падения принять равным $10 \text{ м}/\text{с}^2$.

Ответ. 0,05.

1.3. С какой минимальной силой надо надавить на кубик объемом 10 см^3 , плавающий в воде, чтобы он полностью находился под водой? Плотность материала кубика $400 \text{ кг}/\text{м}^3$, плотность воды $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$. Ответ дать в единицах СИ. Ускорение свободного падения принять равным $10 \text{ м}/\text{с}^2$.

Ответ. 0,06.

1.4. С какой минимальной силой надо надавить на кубик объемом 10 см^3 , плавающий в воде, чтобы он полностью находился под водой? Плотность материала кубика $700 \text{ кг}/\text{м}^3$, плотность воды $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$. Ответ дать в единицах СИ. Ускорение свободного падения принять равным $10 \text{ м}/\text{с}^2$.

Ответ. 0,03.

2.1. Гаврила выяснил, что передних покрышек автомобиля хватает на 20000 км пробега, а задних — на 30000 км. Поэтому он решил поменять их местами в какой-то момент, чтобы автомобиль прошел максимально возможное расстояние. Найдите это расстояние (в км).

Ответ. $\{24000\}$.

2.2. Гаврила выяснил, что передних покрышек автомобиля хватает на 24000 км пробега, а задних — на 36000 км. Поэтому он решил поменять их местами в какой-то момент, чтобы автомобиль прошел максимально возможное расстояние. Найдите это расстояние (в км).

Ответ. $\{28800\}$.

2.3. Гаврила выяснил, что передних покрышек автомобиля хватает на 42000 км пробега, а задних — на 56000 км. Поэтому он решил поменять их местами в какой-то момент, чтобы автомобиль прошел максимально возможное расстояние. Найдите это расстояние (в км).

Ответ. $\{48000\}$.

2.4. Гаврила выяснил, что передних покрышек автомобиля хватает на 21000 км пробега, а задних — на 28000 км. Поэтому он решил поменять их местами в какой-то момент, чтобы автомобиль прошел максимально возможное расстояние. Найдите это расстояние (в км).

Ответ. $\{24000\}$.

3.1. Трансгалактический корабль попал в удивительный метеоритный поток. Часть метеоритов летит вдоль прямой линии с одинаковыми скоростями друг за другом, на равном расстоянии друг от друга. А другая часть летит так же, но вдоль другой прямой линии, параллельной первой, с такими же скоростями, но в обратную сторону, на таком же расстоянии друг от друга. Корабль летит параллельно этим линиям. Астронавт Гаврила зафиксировал, что каждые 7 с корабль встречает метеориты, летящие навстречу кораблю, и каждые 13 с — метеориты, летящие в одну сторону с кораблем. Он задумался, как часто метеориты будет пролетать мимо него, если корабль будет стоять на месте. Ему показалось, что надо взять среднее арифметическое двух данных времен. Прав ли Гаврила? Если да, то запишите в ответ это среднее арифметическое. Если нет, то укажите правильное время в секундах, округленное до десятых.

Ответ. $\{9,1\}$.

3.2. Трансгалактический корабль попал в удивительный метеоритный поток. Часть метеоритов летит вдоль прямой линии с одинаковыми скоростями друг за другом, на равном расстоянии друг от друга. А другая часть летит так же, но вдоль другой прямой линии, параллельной первой, с такими же скоростями, но в обратную сторону, на таком же расстоянии друг от друга. Корабль летит параллельно этим линиям. Астронавт Гаврила зафиксировал, что каждые 7 с корабль встречает метеориты, летящие навстречу кораблю, и каждые 13 с — метеориты, летящие в одну сторону с кораблем. Он задумался, как часто метеориты будет пролетать мимо него, если корабль будет стоять на месте. Ему показалось, что надо взять среднее арифметическое двух данных времен. Прав ли Гаврила? Если да, то запишите в ответ это среднее арифметическое. Если нет, то укажите правильное время в секундах, округленное до десятых.

Ответ. {9,1}.

3.3. Трансгалактический корабль попал в удивительный метеоритный поток. Часть метеоритов летит вдоль прямой линии с одинаковыми скоростями друг за другом, на равном расстоянии друг от друга. А другая часть летит так же, но вдоль другой прямой линии, параллельной первой, с такими же скоростями, но в обратную сторону, на таком же расстоянии друг от друга. Корабль летит параллельно этим линиям. Астронавт Гаврила зафиксировал, что каждые 7 с корабль встречает метеориты, летящие навстречу кораблю, и каждые 13 с — метеориты, летящие в одну сторону с кораблем. Он задумался, как часто метеориты будет пролетать мимо него, если корабль будет стоять на месте. Ему показалось, что надо взять среднее арифметическое двух данных времен. Прав ли Гаврила? Если да, то запишите в ответ это среднее арифметическое. Если нет, то укажите правильное время в секундах, округленное до десятых.

Ответ. {9,1}.

3.4. Трансгалактический корабль попал в удивительный метеоритный поток. Часть метеоритов летит вдоль прямой линии с одинаковыми скоростями друг за другом, на равном расстоянии друг от друга. А другая часть летит так же, но вдоль другой прямой линии, параллельной первой, с такими же скоростями, но в обратную сторону, на таком же расстоянии друг от друга. Корабль летит параллельно этим линиям. Астронавт Гаврила зафиксировал, что каждые 7 с корабль встречает метеориты, летящие навстречу кораблю, и каждые 13 с — метеориты, летящие в одну сторону с кораблем. Он задумался, как часто метеориты будет пролетать мимо него, если корабль будет стоять на месте. Ему показалось, что надо взять среднее арифметическое двух данных времен. Прав ли Гаврила? Если да, то запишите в ответ это среднее арифметическое. Если нет, то укажите правильное время в секундах, округленное до десятых.

Ответ. {9,1}.

4.1. Два одинаковых цилиндрических сосуда соединены на уровне дна трубкой малого сечения с краном. Пока кран был закрыт в первый сосуд налили воду, а во второй — масло так, что уровень жидкостей был одинаков и равен $h = 40$ см. На каком уровне установится вода в первом сосуде, если кран открыть? Плотность воды $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$, плотность масла $700 \text{ кг}/\text{м}^3$. Объемом соединительной трубки пренебречь. Ответ дать в сантиметрах.

Ответ. {34}.

4.2. Два одинаковых цилиндрических сосуда соединены на уровне дна трубкой малого сечения с краном. Пока кран был закрыт в первый сосуд налили воду, а во второй — масло так, что уровень жидкостей был одинаков и равен $h = 40$ см. На каком уровне установится вода в первом сосуде, если кран открыть? Плотность воды $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$, плотность масла $700 \text{ кг}/\text{м}^3$. Объемом соединительной трубки пренебречь. Ответ дать в сантиметрах.

Ответ. {34}

4.3. Два одинаковых цилиндрических сосуда соединены на уровне дна трубкой малого сечения с краном. Пока кран был закрыт в первый сосуд налили воду, а во второй — масло так, что уровень жидкостей был одинаков и равен $h = 40$ см. На каком уровне установится вода в первом сосуде, если кран открыть? Плотность воды $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$, плотность масла $700 \text{ кг}/\text{м}^3$. Объемом соединительной трубки пренебречь. Ответ дать в сантиметрах.

Ответ. {34}.

4.4. Два одинаковых цилиндрических сосуда соединены на уровне дна трубкой малого сечения с краном. Пока кран был закрыт в первый сосуд налили воду, а во второй — масло так, что уровень жидкостей был одинаков и равен $h = 40$ см. На каком уровне установится вода в первом сосуде, если кран открыть? Плотность воды $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$, плотность масла $700 \text{ кг}/\text{м}^3$. Объемом соединительной трубки пренебречь. Ответ дать в сантиметрах.

Ответ. {34}.

5.1. Гладкий шар радиуса 1 см обмакнули в красную краску и запустили между двумя абсолютно гладкими концентрическими сферами радиусов 4 см и 6 см соответственно (этот шар оказался снаружи меньшей сферы, но внутри большей). При соприкосновении с обеими сферами шар оставляет красный след. В процессе движения шар прошел по замкнутому маршруту, в результате чего на меньшей сфере образовалась ограниченная красным контуром область, площадь которой 37 кв. см. Найдите площадь области, ограниченной красным контуром на большей сфере. Ответ дайте в квадратных сантиметрах, при необходимости округлив до сотых.

Ответ. {83,25}.

5.2. Гладкий шар радиуса 1 см обмакнули в красную краску и запустили между двумя абсолютно гладкими концентрическими сферами радиусов 4 см и 6 см соответственно (этот шар оказался снаружи меньшей сферы, но внутри большей). При соприкосновении с обеими сферами шар оставляет красный след. В процессе движения шар прошел по замкнутому маршруту, в результате чего на меньшей сфере образовалась ограниченная красным контуром область, площадь которой 37 кв. см. Найдите площадь области, ограниченной красным контуром на большей сфере. Ответ дайте в квадратных сантиметрах, при необходимости округлив до сотых.

Ответ. {83,25}.

5.3. Гладкий шар радиуса 1 см обмакнули в красную краску и запустили между двумя абсолютно гладкими концентрическими сферами радиусов 4 см и 6 см соответственно (этот шар оказался снаружи меньшей сферы, но внутри большей). При соприкосновении с обеими сферами шар оставляет красный след. В процессе движения шар прошел по замкнутому маршруту, в результате чего на меньшей сфере образовалась ограниченная красным контуром область, площадь которой 37 кв. см. Найдите площадь области, ограниченной красным контуром на большей сфере. Ответ дайте в квадратных сантиметрах, при необходимости округлив до сотых.

Ответ. {83,25}.

5.4. Гладкий шар радиуса 1 см обмакнули в красную краску и запустили между двумя абсолютно гладкими концентрическими сферами радиусов 4 см и 6 см соответственно (этот шар оказался снаружи меньшей сферы, но внутри большей). При соприкосновении с обеими сферами шар оставляет красный след. В процессе движения шар прошел по замкнутому маршруту, в результате чего на меньшей сфере образовалась ограниченная красным контуром область, площадь которой 37 кв. см. Найдите площадь области, ограниченной красным контуром на большей сфере. Ответ дайте в квадратных сантиметрах, при необходимости округлив до сотых.

Ответ. {83,25}.

10–11 классы

1.1. Гаврила выяснил, что передних покрышек автомобиля хватает на 20000 км пробега, а задних – на 30000 км. Поэтому он решил поменять их местами в какой-то момент, чтобы автомобиль прошел максимально возможное расстояние. Найдите это расстояние (в км).

Ответ. {24000}.

1.2. Гаврила выяснил, что передних покрышек автомобиля хватает на 24000 км пробега, а задних – на 36000 км. Поэтому он решил поменять их местами в какой-то момент, чтобы автомобиль прошел максимально возможное расстояние. Найдите это расстояние (в км).

Ответ. {28800}.

1.3. Гаврила выяснил, что передних покрышек автомобиля хватает на 42000 км пробега, а задних – на 56000 км. Поэтому он решил поменять их местами в какой-то момент, чтобы автомобиль прошел максимально возможное расстояние. Найдите это расстояние (в км).

Ответ. {48000}.

1.4. Гаврила выяснил, что передних покрышек автомобиля хватает на 21000 км пробега, а задних – на 28000 км. Поэтому он решил поменять их местами в какой-то момент, чтобы автомобиль прошел максимально возможное расстояние. Найдите это расстояние (в км).

Ответ. {24000}.

2.1. Петарду подбросили вертикально вверх со скоростью 20 м/с. Через одну секунду после начала полета она разорвалась на две неравные части, отношение масс которых равно 1 : 2. Меньший осколок сразу после взрыва полетел горизонтально со скоростью 16 м/с. Найдите величину скорости второго осколка (в м/с) сразу после взрыва. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 .

Ответ. 17.

2.2. Петарду подбросили вертикально вверх со скоростью 20 м/с. Через одну секунду после начала полета она разорвалась на два осколка равной массы. Первый осколок сразу после взрыва полетел горизонтально со скоростью 48 м/с. Найдите величину скорости второго осколка (в м/с) сразу после взрыва. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 .

Ответ. 52.

2.3. Петарду подбросили вертикально вверх со скоростью 20 м/с. Через три секунды после начала полета она разорвалась на две неравные части, отношение масс которых равно 1 : 2. Меньший осколок сразу после взрыва полетел горизонтально со скоростью 16 м/с. Найдите величину скорости второго осколка (в м/с) сразу после взрыва. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 .

Ответ. 17.

2.4. Петарду подбросили вертикально вверх со скоростью 20 м/с. Через три секунды после начала полета она разорвалась на два осколка равной массы. Первый осколок сразу после взрыва полетел горизонтально со скоростью 48 м/с. Найдите величину скорости второго осколка (в м/с) сразу после взрыва. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 .

Ответ. 52.

3.1. Один моль идеального одноатомного газа нагревают сначала изобарически. При этом он совершает работу 20 Дж. Затем его нагревают изотермически, сообщая ему то же количество теплоты, что и в первом случае. Какую работу совершает газ (в Джоулях) во втором случае?

Ответ. {50}.

3.2. Один моль идеального одноатомного газа нагревают сначала изобарически. При этом он совершает работу 10 Дж. Затем его нагревают изотермически, сообщая ему то же количество теплоты, что и в первом случае. Какую работу совершает газ (в Джоулях) во втором случае?

Ответ. {25}.

3.3. Один моль идеального одноатомного газа нагревают сначала изобарически. При этом он совершают работу 30 Дж. Затем его нагревают изотермически, сообщая ему то же количество теплоты, что и в первом случае. Какую работу совершают газ (в Джоулях) во втором случае?

Ответ. {75}.

3.4. Один моль идеального одноатомного газа нагревают сначала изобарически. При этом он совершают работу 40 Дж. Затем его нагревают изотермически, сообщая ему то же количество теплоты, что и в первом случае. Какую работу совершают газ (в Джоулях) во втором случае?

Ответ. {100}.

4.1. Гладкий шар радиуса 1 см обмакнули в красную краску и запустили между двумя абсолютно гладкими концентрическими сферами радиусов 4 см и 6 см соответственно (этот шар оказался снаружи меньшей сферы, но внутри большей). При соприкосновении с обеими сферами шар оставляет красный след. В процессе движения шар прошел по замкнутому маршруту, в результате чего на меньшей сфере образовалась ограниченная красным контуром область, площадь которой 37 кв. см. Найдите площадь области, ограниченной красным контуром на большей сфере. Ответ дайте в квадратных сантиметрах, при необходимости округлив до сотых.

Ответ. {83,25}.

4.2. Гладкий шар радиуса 1 см обмакнули в синюю краску и запустили между двумя абсолютно гладкими концентрическими сферами радиусов 4 см и 6 см соответственно (этот шар оказался снаружи меньшей сферы, но внутри большей). При соприкосновении с обеими сферами шар оставляет синий след. В процессе движения шар прошел по замкнутому маршруту, в результате чего на меньшей сфере образовалась ограниченная синим контуром область, площадь которой 27 кв. см. Найдите площадь области, ограниченной синим контуром на большей сфере. Ответ дайте в квадратных сантиметрах, при необходимости округлив до сотых.

Ответ. {60,75}.

4.3. Гладкий шар радиуса 1 см обмакнули в красную краску и запустили между двумя абсолютно гладкими концентрическими сферами радиусов 4 см и 6 см соответственно (этот шар оказался снаружи меньшей сферы, но внутри большей). При соприкосновении с обеими сферами шар оставляет красный след. В процессе движения шар прошел по замкнутому маршруту, в результате чего на меньшей сфере образовалась ограниченная красным контуром область, площадь которой 47 кв. см. Найдите площадь области, ограниченной красным контуром на большей сфере. Ответ дайте в квадратных сантиметрах, при необходимости округлив до сотых.

Ответ. {105,75}.

4.4. Гладкий шар радиуса 1 см обмакнули в синюю краску и запустили между двумя абсолютно гладкими концентрическими сферами радиусов 4 см и 6 см соответственно (этот шар оказался снаружи меньшей сферы, но внутри большей). При соприкосновении с обеими сферами шар оставляет синий след. В процессе движения шар прошел по замкнутому маршруту, в результате чего на меньшей сфере образовалась ограниченная синим контуром область, площадь которой 17 кв. см. Найдите площадь области, ограниченной синим контуром на большей сфере. Ответ дайте в квадратных сантиметрах, при необходимости округлив до сотых.

Ответ. {38,25}.

5.1. Мальчик большим пальцем руки давит вдоль вертикального стержня, опирающегося на шероховатую горизонтальную поверхность. Затем он начинает постепенно наклонять стержень, сохраняя неизменную направленную вдоль стержня компоненту силы, приложенной к его торцу. При угле наклона стержня к горизонту $\alpha = 80^\circ$ стержень начинает скользить по поверхности. Определите коэффициент трения между поверхностью и стержнем, если в вертикальном положении сила реакции плоскости в 11 раз превышала силу тяжести, действующую на стержень. Ответ округлите до сотых.

Ответ. {0,17}

5.2. Мальчик большим пальцем руки давит вдоль вертикального стержня, опирающегося на шероховатую горизонтальную поверхность. Затем он начинает постепенно наклонять стержень, сохраняя неизменной направленную вдоль стержня компоненту силы, приложенной к его торцу. При угле наклона стержня к горизонту $\alpha = 70^\circ$ стержень начинает скользить по поверхности. Определите коэффициент трения между поверхностью и стержнем, если в вертикальном положении сила реакции плоскости в 21 раз превышала силу тяжести, действующую на стержень. Ответ округлите до сотых.

Ответ. {0,35}

5.3. Мальчик большим пальцем руки давит вдоль вертикального стержня, опирающегося на шероховатую горизонтальную поверхность. Затем он начинает постепенно наклонять стержень, сохраняя неизменной направленную вдоль стержня компоненту силы, приложенной к его торцу. При угле наклона стержня к горизонту $\alpha = 75^\circ$ стержень начинает скользить по поверхности. Определите коэффициент трения между поверхностью и стержнем, если в вертикальном положении сила реакции плоскости в 16 раз превышала силу тяжести, действующую на стержень. Ответ округлите до сотых.

Ответ. {0,26}

5.4. Мальчик большим пальцем руки давит вдоль вертикального стержня, опирающегося на шероховатую горизонтальную поверхность. Затем он начинает постепенно наклонять стержень, сохраняя неизменной направленную вдоль стержня компоненту силы, приложенной к его торцу. При угле наклона стержня к горизонту $\alpha = 85^\circ$ стержень начинает скользить по поверхности. Определите коэффициент трения между поверхностью и стержнем, если в вертикальном положении сила реакции плоскости в 6 раз превышала силу тяжести, действующую на стержень. Ответ округлите до сотых.

Ответ. {0,08}.

9 класс

1.1. С какой минимальной силой надо надавить на кубик объемом 10 см^3 , плавающий в воде, чтобы он полностью находился под водой? Плотность материала кубика $600 \text{ кг}/\text{м}^3$, плотность воды $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$. Ответ дать в единицах СИ. Ускорение свободного падения принять равным $10 \text{ м}/\text{с}^2$.

Ответ. $\{0,04\}$.

1.2. С какой минимальной силой надо надавить на кубик объемом 10 см^3 , плавающий в воде, чтобы он полностью находился под водой? Плотность материала кубика $500 \text{ кг}/\text{м}^3$, плотность воды $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$. Ответ дать в единицах СИ. Ускорение свободного падения принять равным $10 \text{ м}/\text{с}^2$.

Ответ. $\{0,05\}$.

1.3. С какой минимальной силой надо надавить на кубик объемом 10 см^3 , плавающий в воде, чтобы он полностью находился под водой? Плотность материала кубика $400 \text{ кг}/\text{м}^3$, плотность воды $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$. Ответ дать в единицах СИ. Ускорение свободного падения принять равным $10 \text{ м}/\text{с}^2$.

Ответ. $\{0,06\}$.

1.4. С какой минимальной силой надо надавить на кубик объемом 10 см^3 , плавающий в воде, чтобы он полностью находился под водой? Плотность материала кубика $700 \text{ кг}/\text{м}^3$, плотность воды $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$. Ответ дать в единицах СИ. Ускорение свободного падения принять равным $10 \text{ м}/\text{с}^2$.

Ответ. $\{0,03\}$.

2.1. Гаврила выяснил, что передних покрышек автомобиля хватает на 20000 км пробега, а задних — на 30000 км. Поэтому он решил поменять их местами в какой-то момент, чтобы автомобиль прошел максимально возможное расстояние. Найдите это расстояние (в км).

Ответ. $\{24000\}$.

2.2. Гаврила выяснил, что передних покрышек автомобиля хватает на 24000 км пробега, а задних — на 36000 км. Поэтому он решил поменять их местами в какой-то момент, чтобы автомобиль прошел максимально возможное расстояние. Найдите это расстояние (в км).

Ответ. $\{28800\}$.

2.3. Гаврила выяснил, что передних покрышек автомобиля хватает на 42000 км пробега, а задних — на 56000 км. Поэтому он решил поменять их местами в какой-то момент, чтобы автомобиль прошел максимально возможное расстояние. Найдите это расстояние (в км).

Ответ. $\{48000\}$.

2.4. Гаврила выяснил, что передних покрышек автомобиля хватает на 21000 км пробега, а задних — на 28000 км. Поэтому он решил поменять их местами в какой-то момент, чтобы автомобиль прошел максимально возможное расстояние. Найдите это расстояние (в км).

Ответ. $\{24000\}$.

3.1. Два одинаковых цилиндрических сосуда соединены на уровне дна трубкой малого сечения с краном. Пока кран был закрыт в первый сосуд налили воду, а во второй — масло так, что уровень жидкостей был одинаков и равен $h = 40$ см. На каком уровне установится вода в первом сосуде, если кран открыть? Плотность воды $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$, плотность масла $700 \text{ кг}/\text{м}^3$. Объемом соединительной трубки пренебречь. Ответ дать в сантиметрах.

Ответ. $\{34\}$.

3.2. Два одинаковых цилиндрических сосуда соединены на уровне дна трубкой малого сечения с краном. Пока кран был закрыт в первый сосуд налили воду, а во второй — масло так, что уровень жидкостей был одинаков и равен $h = 40$ см. На каком уровне установится вода

в первом сосуде, если кран открыть? Плотность воды $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$, плотность масла $700 \text{ кг}/\text{м}^3$. Объемом соединительной трубы пренебречь. Ответ дать в сантиметрах.

Ответ. {34}.

3.3. Два одинаковых цилиндрических сосуда соединены на уровне дна трубкой малого сечения с краном. Пока кран был закрыт в первый сосуд налили воду, а во второй — масло так, что уровень жидкостей был одинаков и равен $h = 40 \text{ см}$. На каком уровне установится вода в первом сосуде, если кран открыть? Плотность воды $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$, плотность масла $700 \text{ кг}/\text{м}^3$. Объемом соединительной трубы пренебречь. Ответ дать в сантиметрах.

Ответ. {34}.

3.4. Два одинаковых цилиндрических сосуда соединены на уровне дна трубкой малого сечения с краном. Пока кран был закрыт в первый сосуд налили воду, а во второй — масло так, что уровень жидкостей был одинаков и равен $h = 40 \text{ см}$. На каком уровне установится вода в первом сосуде, если кран открыть? Плотность воды $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$, плотность масла $700 \text{ кг}/\text{м}^3$. Объемом соединительной трубы пренебречь. Ответ дать в сантиметрах.

Ответ. {34}.

4.1. Петарду подбросили вертикально вверх со скоростью $20 \text{ м}/\text{с}$. Через одну секунду после начала полета она разорвалась на две неравные части, отношение масс которых равно $1 : 2$. Меньший осколок сразу после взрыва полетел горизонтально со скоростью $16 \text{ м}/\text{с}$. Найдите величину скорости второго осколка (в $\text{м}/\text{с}$) сразу после взрыва. Ускорение свободного падения принять равным $10 \text{ м}/\text{с}^2$.

Ответ. {17}.

4.2. Петарду подбросили вертикально вверх со скоростью $20 \text{ м}/\text{с}$. Через одну секунду после начала полета она разорвалась на два осколка равной массы. Первый осколок сразу после взрыва полетел горизонтально со скоростью $48 \text{ м}/\text{с}$. Найдите величину скорости второго осколка (в $\text{м}/\text{с}$) сразу после взрыва. Ускорение свободного падения принять равным $10 \text{ м}/\text{с}^2$.

Ответ. {52}.

4.3. Петарду подбросили вертикально вверх со скоростью $20 \text{ м}/\text{с}$. Через три секунды после начала полета она разорвалась на две неравные части, отношение масс которых равно $1 : 2$. Меньший осколок сразу после взрыва полетел горизонтально со скоростью $16 \text{ м}/\text{с}$. Найдите величину скорости второго осколка (в $\text{м}/\text{с}$) сразу после взрыва. Ускорение свободного падения принять равным $10 \text{ м}/\text{с}^2$.

Ответ. {17}.

4.4. Петарду подбросили вертикально вверх со скоростью $20 \text{ м}/\text{с}$. Через три секунды после начала полета она разорвалась на два осколка равной массы. Первый осколок сразу после взрыва полетел горизонтально со скоростью $48 \text{ м}/\text{с}$. Найдите величину скорости второго осколка (в $\text{м}/\text{с}$) сразу после взрыва. Ускорение свободного падения принять равным $10 \text{ м}/\text{с}^2$.

Ответ. {52}.

5.1. Гладкий шар радиуса 1 см обмакнули в красную краску и запустили между двумя абсолютно гладкими концентрическими сферами радиусов 4 см и 6 см соответственно (этот шар оказался снаружи меньшей сферы, но внутри большей). При соприкосновении с обеими сферами шар оставляет красный след. В процессе движения шар прошел по замкнутому маршруту, в результате чего на меньшей сфере образовалась ограниченная красным контуром область, площадь которой 37 кв. см . Найдите площадь области, ограниченной красным контуром на большей сфере. Ответ дайте в квадратных сантиметрах, при необходимости округлив до сотых.

Ответ. {83,25}.

5.2. Гладкий шар радиуса 1 см обмакнули в синюю краску и запустили между двумя абсолютно гладкими концентрическими сферами радиусов 4 см и 6 см соответственно (этот шар

оказался снаружи меньшей сферы, но внутри большей). При соприкосновении с обеими сферами шар оставляет синий след. В процессе движения шар прошел по замкнутому маршруту, в результате чего на меньшей сфере образовалась ограниченная синим контуром область, площадь которой 27 кв. см. Найдите площадь области, ограниченной синим контуром на большей сфере. Ответ дайте в квадратных сантиметрах, при необходимости округлив до сотых.

Ответ. {60,75}.

5.3. Гладкий шар радиуса 1 см обмакнули в красную краску и запустили между двумя абсолютно гладкими концентрическими сферами радиусов 4 см и 6 см соответственно (этот шар оказался снаружи меньшей сферы, но внутри большей). При соприкосновении с обеими сферами шар оставляет красный след. В процессе движения шар прошел по замкнутому маршруту, в результате чего на меньшей сфере образовалась ограниченная красным контуром область, площадь которой 47 кв. см. Найдите площадь области, ограниченной красным контуром на большей сфере. Ответ дайте в квадратных сантиметрах, при необходимости округлив до сотых.

Ответ. {105,75}.

5.4. Гладкий шар радиуса 1 см обмакнули в синюю краску и запустили между двумя абсолютно гладкими концентрическими сферами радиусов 4 см и 6 см соответственно (этот шар оказался снаружи меньшей сферы, но внутри большей). При соприкосновении с обеими сферами шар оставляет синий след. В процессе движения шар прошел по замкнутому маршруту, в результате чего на меньшей сфере образовалась ограниченная синим контуром область, площадь которой 17 кв. см. Найдите площадь области, ограниченной синим контуром на большей сфере. Ответ дайте в квадратных сантиметрах, при необходимости округлив до сотых.

Ответ. {38,25}.

**Олимпиада школьников «Ломоносов» 2018/2019 учебного года
по механике и математическому моделированию**

**ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ
Отборочный этап. Тур 1
7-8 классы**

Во всех задачах требуется дать только ответ (решение присыпать не нужно).

::1.1:: Гаврила и Глафира едут на велосипедах по дороге, общая длина которой 28 км. Глафира едет со скоростью 12 км/час. Велосипед Гаврилы сломан, и поэтому его скорость всего 8 км/час. Так как Гаврила все время отстает, Глафира каждый раз ожидает его на стоянках, расположенных около дороги на отметках 3,9 км, 8,1 км, 14,3 км, 21,9 км и 28 км. Сколько всего минут проведет Глафира в ожидании Гаврилы? Ответ, при необходимости, округлите до целых.

{= 70}

::1.2:: Гаврила и Глафира едут на велосипедах по дороге, общая длина которой 30 км. Глафира едет со скоростью 15 км/час. Велосипед Гаврилы сломан, и поэтому его скорость всего 8 км/час. Так как Гаврила все время отстает, Глафира каждый раз ожидает его на стоянках, расположенных около дороги на отметках 4,1 км, 8,4 км, 14,8 км, 22,2 км и 30 км. Сколько всего минут проведет Глафира в ожидании Гаврилы? Ответ, при необходимости, округлите до целых.

{= 105}

::1.3:: Гаврила и Глафира едут на велосипедах по дороге, общая длина которой 32 км. Глафира едет со скоростью 12 км/час. Велосипед Гаврилы сломан, и поэтому его скорость всего 8 км/час. Так как Гаврила все время отстает, Глафира каждый раз ожидает его на стоянках, расположенных около дороги на отметках 4,4 км, 8,5 км, 14,8 км, 23,8 км и 32 км. Сколько всего минут проведет Глафира в ожидании Гаврилы? Ответ, при необходимости, округлите до целых.

{= 80}

::1.4:: Гаврила и Глафира едут на велосипедах по дороге, общая длина которой 40 км. Глафира едет со скоростью 15 км/час. Велосипед Гаврилы сломан, и поэтому его скорость всего 8 км/час. Так как Гаврила все время отстает, Глафира каждый раз ожидает его на стоянках, расположенных около дороги на отметках 8,1 км, 14,4 км, 26,2 км, 32,4 км и 40 км. Сколько всего минут проведет Глафира в ожидании Гаврилы? Ответ, при необходимости, округлите до целых.

{= 140}

::2.1:: Сосуд наполовину заполнен водой. В него сначала кладут один кубик льда, масса которого составляет одну сотую от массы воды в сосуде. Когда кубик полностью растает через некоторое время τ , в сосуд кладут второй кубик льда такого же объема, как и предыдущий. И опять ждут промежуток времени τ , а потом кладут следующий кубик. И так далее, до тех пор пока сосуд полностью не заполнится. Какая температура установится в сосуде, если исходно вода имела температуру 75° C , а лед 0° C .

Теплообменом с окружающей средой и стенками сосуда пренебречь. Считать, что плотность льда составляет $9/10$ от плотности воды.

{= 0}

::2.2:: Сосуд наполовину заполнен водой. В него сначала кладут один кубик льда, масса которого составляет одну сотую от массы воды в сосуде. Когда кубик полностью растает через некоторое время τ , в сосуд кладут второй кубик льда такого же объема, как и предыдущий. И опять ждут промежуток времени τ , а потом кладут следующий кубик. И так далее, до тех пор пока сосуд полностью не заполнится. Какая температура установится в сосуде, если исходно вода имела температуру 75° С , а лед 0° С .

Теплообменом с окружающей средой и стенками сосуда пренебречь. Считать, что плотность льда составляет $9/10$ от плотности воды.

{= 0}

::2.3:: Сосуд наполовину заполнен водой. В него сначала кладут один кубик льда, масса которого составляет одну сотую от массы воды в сосуде. Когда кубик полностью растает через некоторое время τ , в сосуд кладут второй кубик льда такого же объема, как и предыдущий. И опять ждут промежуток времени τ , а потом кладут следующий кубик. И так далее, до тех пор пока сосуд полностью не заполнится. Какая температура установится в сосуде, если исходно вода имела температуру 75° С , а лед 0° С .

Теплообменом с окружающей средой и стенками сосуда пренебречь. Считать, что плотность льда составляет $9/10$ от плотности воды.

{= 0}

::2.4:: Сосуд наполовину заполнен водой. В него сначала кладут один кубик льда, масса которого составляет одну сотую от массы воды в сосуде. Когда кубик полностью растает через некоторое время τ , в сосуд кладут второй кубик льда такого же объема, как и предыдущий. И опять ждут промежуток времени τ , а потом кладут следующий кубик. И так далее, до тех пор пока сосуд полностью не заполнится. Какая температура установится в сосуде, если исходно вода имела температуру 75° С , а лед 0° С .

Теплообменом с окружающей средой и стенками сосуда пренебречь. Считать, что плотность льда составляет $9/10$ от плотности воды.

{= 0}

::3.1:: Гаврила экспериментировал в лаборатории с двумя жидкостями, плотности которых отличалась в 4 раза. В каком отношении надо взять массы этих жидкостей, чтобы смесь имела плотность равную среднему геометрическому плотностей этих двух жидкостей. В ответ записать отношение массы более плотной жидкости к менее плотной.

{= 2}

::3.2:: Гаврила экспериментировал в лаборатории с двумя жидкостями, плотности которых отличалась в 4 раза. В каком отношении надо взять массы этих жидкостей, чтобы смесь имела плотность равную среднему геометрическому плотностей этих двух жидкостей. В ответ записать отношение массы более плотной жидкости к менее плотной.

{= 2}

::3.3:: Гаврила экспериментировал в лаборатории с двумя жидкостями, плотности которых отличалась в 4 раза. В каком отношении надо взять массы этих жидкостей, чтобы смесь имела плотность равную среднему геометрическому плотностей этих двух жидкостей. В ответ записать отношение массы более плотной жидкости к менее плотной.

{= 2}

::3.4:: Гаврила экспериментировал в лаборатории с двумя жидкостями, плотности которых отличалась в 4 раза. В каком отношении надо взять массы этих жидкостей, чтобы смесь имела плотность равную среднему геометрическому плотностей этих двух

жидкостей. В ответ записать отношение массы более плотной жидкости к менее плотной.

{= 2}

::4.1:: На испытаниях длительности работы электродвигателей без подзарядки международная комиссия признала, что треть моделей показали отличный результат (проработав непрерывно более 5 часов). Еще 44% моделей были признаны хорошими (они проработали более 4 часов), а 8 моделей получили оценку удовлетворительно (они проработали более трех часов). Известно, что эти 8 моделей составляют более 3%, но менее 4% от общего числа участников испытаний. Были и такие участники, которые не прошли квалификацию и проработали менее трех часов.

Сколько моделей не прошли квалификацию?

{= 43}

::4.2:: На испытаниях длительности работы электродвигателей без подзарядки международная комиссия признала, что треть моделей показали отличный результат (проработав непрерывно более 5 часов). Еще 44% моделей были признаны хорошими (они проработали более 4 часов), а 8 моделей получили оценку удовлетворительно (они проработали более трех часов). Известно, что эти 8 моделей составляют более 3%, но менее 4% от общего числа участников испытаний. Были и такие участники, которые не прошли квалификацию и проработали менее трех часов.

Сколько моделей не прошли квалификацию?

{= 43}

::4.3:: На испытаниях длительности работы электродвигателей без подзарядки международная комиссия признала, что треть моделей показали отличный результат (проработав непрерывно более 5 часов). Еще 44% моделей были признаны хорошими (они проработали более 4 часов), а 8 моделей получили оценку удовлетворительно (они проработали более трех часов). Известно, что эти 8 моделей составляют более 3%, но менее 4% от общего числа участников испытаний. Были и такие участники, которые не прошли квалификацию и проработали менее трех часов.

Сколько моделей не прошли квалификацию?

{= 43}

::4.4:: На испытаниях длительности работы электродвигателей без подзарядки международная комиссия признала, что треть моделей показали отличный результат (проработав непрерывно более 5 часов). Еще 44% моделей были признаны хорошими (они проработали более 4 часов), а 8 моделей получили оценку удовлетворительно (они проработали более трех часов). Известно, что эти 8 моделей составляют более 3%, но менее 4% от общего числа участников испытаний. Были и такие участники, которые не прошли квалификацию и проработали менее трех часов.

Сколько моделей не прошли квалификацию?

{= 43}

::5.1:: Два поезда стартуют одновременно. Один из Санкт-Петербурга, а другой из Москвы. Поезд, выезжающий из Москвы, доедет до Санкт-Петербурга за 6 часов, а, выезжающий из Санкт-Петербурга — за 8 часов. В какой-то момент времени одному поезду осталось проехать в три раза больше, чем другому. Сколько времени (в минутах) они провели в пути к этому моменту? Считать, что поезда едут с постоянной скоростью и без остановок.

{= 320}

::5.2:: Два поезда стартуют одновременно. Один из Санкт-Петербурга, а другой из Москвы. Поезд, выезжающий из Москвы, доедет до Санкт-Петербурга за 6 часов, а,

выезжающий из Санкт-Петербурга — за 8 часов. В какой-то момент времени одному поезду осталось проехать в три раза больше, чем другому. Сколько времени (в минутах) они провели в пути к этому моменту? Считать, что поезда едут с постоянной скоростью и без остановок.

$$\{= 320\}$$

::5.3:: Два поезда стартуют одновременно. Один из Санкт-Петербурга, а другой из Москвы. Поезд, выезжающий из Москвы, доедет до Санкт-Петербурга за 6 часов, а, выезжающий из Санкт-Петербурга — за 8 часов. В какой-то момент времени одному поезду осталось проехать в три раза больше, чем другому. Сколько времени (в минутах) они провели в пути к этому моменту? Считать, что поезда едут с постоянной скоростью и без остановок.

$$\{= 320\}$$

::5.4:: Два поезда стартуют одновременно. Один из Санкт-Петербурга, а другой из Москвы. Поезд, выезжающий из Москвы, доедет до Санкт-Петербурга за 6 часов, а, выезжающий из Санкт-Петербурга — за 8 часов. В какой-то момент времени одному поезду осталось проехать в три раза больше, чем другому. Сколько времени (в минутах) они провели в пути к этому моменту? Считать, что поезда едут с постоянной скоростью и без остановок.

$$\{= 320\}$$

Критерии оценки

Полное и правильное решение любой задачи оценивалось в 20 баллов.

Идейно верное решение, содержащее недочеты (вычислительные ошибки, небольшие недостатки в обоснованиях) оценивалось в 15 баллов.

Решение содержащее верный ход рассуждений, значительные продвижения, но не приведшие к правильному ответу из-за существенных ошибок, оценивались в 5 баллов

Засчитывался результат 5 лучших задач

Решения задач варианта 191. Ответы ко всем вариантам.

1. Трактор тащит на полозьях очень длинную трубу. Гаврила прошел вдоль всей трубы с постоянной скоростью в направлении движения трактора и насчитал 210 шагов. Когда он пошел в обратном направлении с той же скоростью, количество шагов оказалось равным 100. Чему равна длина трубы, если шаг Гаврилы равен 80 см? Ответ округлите до ближайшего целого числа метров. Скорость трактора постоянна.

Ответ: 108 м. **Решение.** Пусть длина трубы равна x (метров), и за 1 шаг Гаврилы длиной a (м) труба перемещается на расстояние y (м). Тогда, если m и n – количество шагов Гаврилы в том и другом направлении, получаем два уравнения: $x = m(a - y)$, $x = n(a + y)$. Отсюда

$$\frac{x}{m} + \frac{x}{n} = 2a, \quad x = \frac{2amn}{m+n}, \quad \text{и} \quad x = \frac{2 \times 0,8 \times 10 \times 100}{210+100}$$

$$= \frac{3360}{31} \approx 108,387 \quad (\text{м}).$$

Возможны и другие способы решения. Например: При тех же неизвестных, что выше, введем также скорость Гаврилы V (м/мин) и скорость трактора U (м/мин). Записав в том и другом

$$\begin{cases} \frac{x}{V-U} = \frac{am}{V}, \\ \frac{x}{V+U} = \frac{an}{V}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{am} = 1 - \frac{U}{V}, \\ \frac{x}{bn} = 1 + \frac{U}{V}. \end{cases}$$

Складывая, получаем тот

$$x = \frac{2amn}{m+n}.$$

же ответ

Ответ к варианту 192: 98 м. Комментарий. $\frac{1463}{15} \approx 97,533$ (м).

Ответ к варианту 193: 89 м. Комментарий. $\frac{1152}{13} \approx 88,615$ (м).

Ответ к варианту 194: 82 м. Комментарий. $\frac{1071}{13} \approx 82,3846$ (м).

2. Маленький козленок привязан веревкой длиной 4,7 м к кольшку, расположенному на плоском лугу рядом со старым деревом. Ствол дерева имеет форму кругового цилиндра радиуса 0,5 м, причем кратчайшее расстояние от кольшка до поверхности дерева равно 1 м. Может ли козленок обойти вокруг дерева и подойти вплотную к кольшку так, чтобы конец веревки совместился с ее началом? Ответ обоснуйте.

Считать, что веревка в натянутом положении находится в горизонтальной плоскости.

Ответ: нет. **Решение.** Когда козленок обойдет дерево и подойдет к кольшку, веревка будет частично лежать на поверхности дерева, а оставшаяся часть будет состоять из двух прямолинейных отрезков. Минимальная необходимая длина равна сумме удвоенной длины отрезка касательной, проведенной от кольшка к дереву и длины дуги между точками

касания (см. рис.). Пусть угол между касательными равен 2α , тогда

$$\sin \alpha = \frac{R}{R+d} = \frac{1}{3}$$

$$\text{При этом } L_{\min} = 2R \operatorname{ctg} \alpha + R(\pi + 2\alpha) = 2\sqrt{2} + \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{3}$$

Это число примерно равно 4,739, но посчитать это и сделать сравнение с 4,7 без вычислительных средств довольно затруднительно.

Если заменить дугу AB и касательную BK на меньший по длине отрезок AK , то

можно сделать такую оценку: $L_{\min} > L_- = \pi R + 2\sqrt{R^2 + (R+d)^2}$. В числах это даст

$$L_{\min} > L_- = \frac{\pi}{2} + \sqrt{10} > \frac{3,14}{2} + 3,15 > 4,7$$

. Таким образом, веревки не хватит.

В вариантах 2 и 3 веревки хватает. Это доказывается с помощью другой замены: заменяем дугу

AB и касательную BK на отрезок KC , который длиннее, так как $CB = R \operatorname{tg} \alpha > R$. Тогда

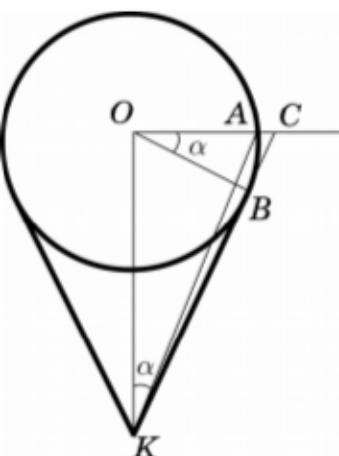
$$L_{\min} < L_+ = \pi R + \frac{2(R+d)^2}{\sqrt{d(2R+d)}}. \text{ Например, в варианте 2 получаем } L_{\min} < L_+ = \frac{\pi}{2} + \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

$$< \frac{3,142}{2} + \frac{9 \cdot 1,42}{4} < 4,8$$

Ответ к варианту 192: да.

Ответ к варианту 193: да.

Ответ к варианту 194: нет.



3. Для определения скорости течения широкой и бурной реки, Гаврила и Глафира поставили следующий эксперимент. В некоторой точке берега на расстоянии 100 м от моста они установили сирену, подающую звуковые сигналы через равные промежутки времени. Вторую такую же сирену взяла с собой Глафира, которая села на велосипед и расположилась на том же берегу в начале моста. Гаврила сел в моторную лодку, находящуюся у берега посередине между первой сиреной и началом моста. Экспериментаторы стартуют одновременно, скорость моторной лодки относительно воды, как и скорость велосипеда, равна 20 км/час и направлена перпендикулярно берегу. Оказалось, что звуковые сигналы от обеих сирен приходят к Гавриле одновременно. Определите скорость течения реки на расстоянии 62 м от берега. Берег реки прямолинейный, скорость течения в каждой точке направлена вдоль берега.

Ответ: 12,4 км/час = 3,44 м/с. **Решение.** Введем систему координат, ось x которой направлена вдоль берега, начало координат в точке старта Гаврилы. Сирена на берегу имеет координаты $(L, 0)$, Глафира едет вдоль прямой $x = -L$ (в нашем случае $L = 50$ м). Так как экспериментаторы находятся на одинаковом расстоянии от берега, то равенство времен, которые нужны для прохождения звукового сигнала, дает условие на координаты (x, y) Гаврилы: $x + L = \sqrt{(x - L)^2 + y^2}$.

Отсюда получаем $4xL = y^2$, что описывает параболу. Дифференцирование дает соотношение для скоростей: $4UL = 2yV$, где V и U соответственно скорость катера и скорость течения в данной точке. На расстоянии h от берега имеем $U = \frac{hV}{2L}$.

Ответ к варианту 192: 12,24 км/час = 3,4 м/с.

Ответ к варианту 193: 12,4 км/час = 3,44 м/с.

Ответ к варианту 194: 12,24 км/час = 3,4 м/с.

Задача 4

Вариант 191 Одноатомный идеальный газ является рабочим телом тепловой машины. Сначала происходит изобарическое сжатие из состояния 1 в состояние 2, потом изохорический нагрев в состояние 3, цикл замыкается процессом 3-1, в котором давление есть линейная функция объема. Температуры в состояниях 1 и 3 одинаковы, давление в цикле изменяется в 2 раза. Определите кпд тепловой машины.

Решение. Параметры состояний таковы: (p_0, nv_0) , (p_0, v_0) , (np_0, v_0) , $n = 2$. Работа газа за цикл $A = 1/2(n - 1)^2 p_0 v_0$.

На участке 1 – 2 тепло забирается из системы, на 2 – 3 подводится $(3/2)(n - 1)p_0 v_0$. Необходимо найти на участке 3 – 1 точку B , в которой прекращается теплоподвод. Уравнение процесса 3 – 1: $p = np_0 - p_0(v - v_0)/v_0 = (n + 1)p_0 - vp_0/v_0$, $T = pv/R = ((n + 1)p_0 v - v^2 p_0/v_0)/R$. Найдем количество теплоты, которое получил газ при расширении от состояния 3 до объема v :

$$Q(v) = \frac{3}{2} \left((n + 1)p_0 v - \frac{p_0}{v_0} v^2 - np_0 v_0 \right) + \frac{1}{2} \left((n + 1)p_0 - \frac{p_0}{v_0} v + np_0 \right) (v - v_0) = \frac{5}{2}(n + 1)p_0 v - 2\frac{p_0}{v_0} v^2 - \frac{5n + 1}{2} p_0 v_0.$$

$Q(v)$ – квадратичная функция, имеющая максимум при $v = 5(n + 1)v_0/8$. При $n \geq 5/3$ он лежит на отрезке $[v_0, nv_0]$. Таким образом, в рассматриваемом случае тепло, подведенное в систему, вычисляется по формуле:

$$Q_+ = \left[\frac{3}{2}(n - 1) + \frac{(5n - 3)^2}{32} \right] p_0 v_0$$

Окончательно ответ:

$$\eta = \frac{16(n - 1)^2}{48(n - 1) + (5n - 3)^2} = \frac{16}{97}$$

Ответ 16/97

Вариант 192 Одноатомный идеальный газ является рабочим телом тепловой машины. Сначала происходит изобарическое расширение из состояния 1 в состояние 2, потом изохорическое охлаждение в состояние 3, цикл замыкается процессом 3-1, в котором давление есть линейная функция объема. Температуры в состояниях 1 и 3 одинаковы, давление в цикле изменяется в 2 раза. Определите кпд тепловой машины.

Решение. Параметры состояний таковы: (np_0, v_0) , (np_0, nv_0) , (p_0, nv_0) , $n = 2$. Работа газа за цикл $A = 1/2(n - 1)^2 p_0 v_0$.

На участке 1 – 2 подводится тепло в систему в количестве $5/2(n - 1)np_0 v_0$, на 2 – 3 тепло отводится. Необходимо найти на участке 3 – 1 точку B , в которой начинается теплоподвод. Уравнение процесса 3 – 1: $p = np_0 - p_0(v - v_0)/v_0 = (n + 1)p_0 - vp_0/v_0$, $T = pv/R = ((n + 1)p_0 v - v^2 p_0/v_0)/R$. Найдем количество теплоты, которое получил газ при сжатии от состояния 3 до объема v :

$$Q(v) = \frac{3}{2} \left((n + 1)p_0 v - \frac{p_0}{v_0} v^2 - np_0 v_0 \right) + \frac{1}{2} \left((n + 1)p_0 - \frac{p_0}{v_0} v + p_0 \right) (v - nv_0) = \frac{5}{2}(n + 1)p_0 v - 2\frac{p_0}{v_0} v^2 - \frac{n(n + 5)}{2} p_0 v_0.$$

$Q(v)$ – квадратичная функция, имеющая максимум при $v_1 = 5(n + 1)v_0/8$. При $n \geq 5/3$ он лежит на отрезке $[v_0, nv_0]$, так как $Q(nv_0) = 0$, тепло подается в систему при $v_1 \leq v \leq nv_0$. Таким образом, в рассматриваемом случае тепло, подведенное в систему, вычисляется по формуле:

$$Q_+ = \left[\frac{5}{2}(n - 1) + \frac{(3n - 5)^2}{32} \right] p_0 v_0$$

Окончательно ответ:

$$\eta = \frac{16(n - 1)^2}{80n(n - 1) + (3n - 5)^2} = \frac{16}{161}$$

Ответ 16/161

Вариант 3 Аналогично 191 **Ответ 4/15**

Вариант 4 Аналогично 192 **Ответ 4/31**

5. Так как требуется, чтобы камень не задел заданный отрезок, искомый интервал скоростей имеет вид $v > v_0$. Назовем v_0 — минимальной скоростью.

Подбирая место броска и угол наклона начальной скорости к горизонту можно сделать так, чтобы траектория проходила через две любые заданные точки, не лежащие на одной вертикали. Из закона сохранения энергии следует, что случаю минимальной скорости будет отвечать траектория, проходящая через оба угла здания.

Пусть камень, проходя через верхнюю часть здания имеет скорость v_1 , направленную под углом β к горизонту. Геометрическое место точек, через которые проходят всевозможные траектории, описываются неравенством

$$y \leq \frac{v_1}{2g} - \frac{gx^2}{2v_1^2}$$

в системе координат с началом в верхней части здания и осями x y , направленными горизонтально в сторону уклона и вертикально (парабола безопасности).

Наименьшему значению v_1 соответствует случай

$$-ltg\alpha = \frac{v_1}{2g} - \frac{gl^2}{2v_1^2}$$

При этом траектория проходит через две вершины здания и в силу выпуклости параболы не пересекает крышу. Отсюда

$$v_1^2 = gl \left(\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} - \operatorname{tg} \alpha \right) = gl \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

По закону сохранения энергии, минимальная скорость камня на поверхности земли составляет

$$v_0 = \sqrt{g \left(2H + l \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \right)}$$

Ответ $V > \sqrt{g \left(2H + l \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \right)}$

6. В безветренный день белый медведь оказался на отколившейся от айсберга небольшой льдине посреди стоячей воды. Спасатели с зависшего над льдиной вертолета отметили, что животное ходит по окружности диаметром 9,5 метров. Каково же было их удивление, когда потом на фотографии они увидели цепочку следов медведя и диаметр этой траектории оказался равен 10 метров. Оцените массу льдины, считая, что масса медведя 600 кг.

Ответ: 11,4 т. **Решение.** При наблюдении с вертолета был измерен диаметр траектории в системе отсчета, связанной с землей, а цепочка следов показывает диаметр траектории относительно льдины. Эти траектории не совпадают, так как льдина вместе с животным движутся относительно общего центра масс.

В силу закона сохранения импульса центр масс системы покоятся. Расстояние от медведя до центра масс r определяется формулой

$$mr = M(R - r),$$

где R – расстояние от центра масс льдины до медведя, m – масса животного, а M – масса льдины.

Отсюда

$$M = \frac{mr}{R-r} = \frac{md}{D-d},$$

где D и d известные по условию диаметры цепочки следов и траектории медведя в неподвижной относительно земли системе отсчета. Подстановка чисел дает ответ 11400 кг.

Ответ к варианту 192: 9500 кг = 9,5 т.

Ответ к варианту 193: 9000 кг = 9 т.

Ответ к варианту 194: 7500 кг = 7,5 т.

**Олимпиада школьников Ломоносов–2019
по механике и математическому моделированию**

Вариант 1978

1. Трактор тащит на полозьях очень длинную трубу. Гаврила прошел вдоль всей трубы с постоянной скоростью в направлении движения трактора и насчитал 210 шагов. Когда он пошел в обратном направлении с той же скоростью, количество шагов оказалось равным 100. Чему равна длина трубы, если шаг Гаврилы равен 80 см? Ответ округлите до ближайшего целого числа метров. Скорость трактора постоянна.

2. Какое наибольшее целое количество литров воды можно нагреть до температуры кипения с помощью количества теплоты, полученной от сгорания твердого топлива, если за первые 5 минут горения из топлива получается 480 кДж, а за каждую следующую пятиминутку на 25% меньше, чем за предыдущую. Начальная температура воды 20°C , температура кипения 100°C , удельная теплоемкость воды 4,2 кДж/кг·К.

3. Трехступенчатая ракета-носитель состоит из ступеней цилиндрической формы. Все эти цилинды подобны друг другу. Длина средней ступени в два раза меньше суммы длин первой и третьей ступеней. В заправленном состоянии масса средней ступени в $13/6$ раз меньше суммарной массы заправленных первой и третьей ступеней. Найдите отношение длин первой и третьей ступени. Массами двигателей, приборов и самих оболочек ступеней можно пренебречь.

4. В некоторой точке берега широкой и бурной реки на расстоянии 100 м от моста Гаврила и Глафира установили сирену, подающую звуковые сигналы через равные промежутки времени. Вторую такую же сирену взяла с собой Глафира, которая села на велосипед и расположилась на том же берегу в начале моста. Гаврила сел в моторную лодку, находящуюся у берега посередине между первой сиреной и началом моста. Экспериментаторы стартуют одновременно, скорости велосипеда и моторной лодки относительно воды равны 20 км/ч и направлены перпендикулярно берегу. Оказалось, что звуковые сигналы от обеих сирен приходят к Гавриле одновременно. Определите, на каком расстоянии от точки старта будет находиться Гаврила, когда удалится от берега на расстояние 40 м. Ответ округлите до ближайшего целого числа метров. Берег реки прямолинейный, скорость течения в каждой точке направлена вдоль берега.

5. В безветренный день белый медведь оказался на отколотшейся от айсберга небольшой льдине посреди стоячей воды. Спасатели с зависшего над льдиной вертолета с помощью приборов определили, что животное ходит по окружности диаметром 8,5 метров. Каково же было их удивление, когда потом на фотографии они увидели цепочку следов медведя и диаметр этой траектории оказался равен 9 метров. При этом все измерения и расчеты были правильными. Предложите свое объяснение этого «парадокса».

**Олимпиада школьников Ломоносов–2019
по механике и математическому моделированию**

Вариант 199

1. Трактор тащит на полозьях очень длинную трубу. Гаврила прошел вдоль всей трубы с постоянной скоростью в направлении движения трактора и насчитал 210 шагов. Когда он пошел в обратном направлении с той же скоростью, количество шагов оказалось равным 100. Чему равна длина трубы, если шаг Гаврилы равен 80 см? Ответ округлите до ближайшего целого числа метров. Скорость трактора постоянна.

2. Какое наибольшее целое количество литров воды можно нагреть до температуры кипения с помощью количества теплоты, полученной от сгорания твердого топлива, если за первые 5 минут горения из топлива получается 480 кДж, а за каждую следующую пятиминутку на 25% меньше, чем за предыдущую. Начальная температура воды 20°C , температура кипения 100°C , удельная теплоемкость воды 4,2 кДж/кг·К.

3. Трехступенчатая ракета-носитель состоит из ступеней цилиндрической формы. Все эти цилиндры подобны друг другу. Длина средней ступени в два раза меньше суммы длин первой и третьей ступеней. В заправленном состоянии масса средней ступени в $13/6$ раз меньше суммарной массы заправленных первой и третьей ступеней. Найдите отношение длин первой и третьей ступени. Массами двигателей, приборов и самих оболочек ступеней можно пренебречь.

4. В некоторой точке берега широкой и бурной реки на расстоянии 100 м от моста Гаврила и Глафира установили сирену, подающую звуковые сигналы через равные промежутки времени. Вторую такую же сирену взяла с собой Глафира, которая села на велосипед и расположилась на том же берегу в начале моста. Гаврила сел в моторную лодку, находящуюся у берега посередине между первой сиреной и началом моста. Экспериментаторы стартуют одновременно, скорости велосипеда и моторной лодки относительно воды равны 20 км/ч и направлены перпендикулярно берегу. Оказалось, что звуковые сигналы от обеих сирен приходят к Гавриле одновременно. Определите, на каком расстоянии от точки старта будет находиться Гаврила, когда удалится от берега на расстояние 40 м. Ответ округлите до ближайшего целого числа метров. Берег реки прямолинейный, скорость течения в каждой точке направлена вдоль берега.

5. В безветренный день белый медведь оказался на отколившейся от айсберга небольшой льдине посреди стоячей воды. Спасатели с зависшего над льдиной вертолета с помощью приборов определили, что животное ходит по окружности диаметром 8,5 метров. Каково же было их удивление, когда потом на фотографии они увидели цепочку следов медведя и диаметр этой траектории оказался равен 9 метров. При этом все измерения и расчеты были правильными. Предложите свое объяснение этого «парадокса».

Решения и ответы

1. Трактор тащит на полозьях очень длинную трубу. Гаврила прошел вдоль всей трубы в направлении движения трактора и насчитал 210 шагов. Когда он пошел в обратном направлении, количество шагов оказалось равным 100. Чему равна длина трубы, если шаг Гаврилы равен 80 см? Ответ округлите до ближайшего целого числа метров.

Решение. Пусть длина трубы равна x (метров), и за 1 шаг Гаврилы длиной a (м) труба перемещается на расстояние y (м). Тогда, если m и n — количество шагов Гаврилы в том и другом направлении, получаем два уравнения: $x = m(a - y)$, $x = n(a + y)$. Отсюда $\frac{x}{m} + \frac{x}{n} = 2a$, и $x = \frac{2amn}{m+n}$. При данных числовых значениях получаем $x = \frac{2 \cdot 0,8 \cdot 210 \cdot 100}{210+100} = \frac{3360}{31} \approx 108,39$ (м).

Ответ. 108 м.

2. Какое наибольшее целое количество литров воды можно нагреть до температуры кипения с помощью количества теплоты, полученной от сгорания твердого топлива, если за первые 5 минут горения из топлива получается 480 кДж, а за каждую следующую пятиминутку на 25% меньше, чем за предыдущую. Начальная температура воды 20° С, температура кипения 100° С, удельная теплоемкость воды 4,2 кДж.

Ответ. 5 литров

Решение. Количество теплоты, необходимое для нагрева массы m воды в условиях задачи, определяется соотношением $Q = 4200(100 - 20)m = 336m$ кДж. С другой стороны, если за первые 5 минут получено количество теплоты $Q_0 = 480$ кДж. Тогда всего (правда за бесконечное время) будет получено $Q = 4Q_0$ количество теплоты. Тогда масса m определится из соотношения $m = \frac{4Q_0}{336} \approx 5,7$

То есть, целое количество литров воды, нагретой до 100 градусов, равно 5.

3. Трехступенчатая ракета-носитель состоит из ступеней цилиндрической формы. Все эти цилиндры подобны друг другу. Длина средней ступени в два раза меньше суммы длин первой и третьей ступеней. В заправленном состоянии масса средней ступени в $13/6$ раз меньше суммарной массы заправленных первой и третьей ступеней. Найдите отношение длин первой и третьей ступени. Массами двигателей, приборов и самих оболочек ступеней можно пренебречь.

Ответ: $\frac{7}{5}$

Решение. Масса заправленной ступени пропорциональна третьей степени линейного размера $l_2 = \frac{1}{2}(l_1 + l_3)$, $l_2^3 = \frac{6}{13}(l_1^3 + l_3^3)$. Решая эту систему, получаем $\frac{l_1}{l_3} = \frac{7}{5}$ или $\frac{l_1}{l_3} = \frac{5}{7}$. Из инженерных соображений выбираем первый ответ, поскольку первая ступень обычно больше третьей.

4. В некоторой точке берега широкой и бурной реки на расстоянии 100 м от моста Гаврила и Глафира установили сирену, подающую звуковые сигналы через равные промежутки времени. Вторую такую же сирену взяла с собой Глафира, которая села на велосипед и расположилась на том же берегу в начале моста. Гаврила сел в моторную лодку, находящуюся у берега посередине между первой сиреной и началом моста. Экспериментаторы стартуют одновременно, скорости велосипеда и моторной лодки относительно воды равны 20 км/ч и направлены перпендикулярно берегу. Оказалось, что звуковые сигналы от обеих сирен приходят к Гавриле одновременно. Определите, на каком расстоянии от точки старта будет находиться Гаврила, когда удалится от берега на расстояние 40 м. Ответ округлите до ближайшего целого числа метров. Берег реки прямолинейный, скорость течения в каждой точке направлена вдоль берега.

Решение. Введем систему координат, ось x которой направлена вдоль берега, начало координат в точке старта Гаврилы. Сирена на берегу имеет координаты $(L, 0)$, $L = 50$ м, Глафира едет вдоль прямой $x = -L$. Так как экспериментаторы находятся на одинаковом расстоянии от берега, то равенство времен, которые нужны для прохождения звукового сигнала дает условие на координаты Гаврилы (x, y) :

$$x + L = \sqrt{(x - L)^2 + y^2}$$

или

$$y^2 = 4xL,$$

откуда

$$x = \frac{y^2}{4L}$$

что описывает параболу.

По условию известно значение $y = 40$ м. Расстояние от Гавриы до места старта найдем по теореме Пифагора:

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^4}{16L^2} + y^2} = \frac{y\sqrt{y^2 + 16L^2}}{4L} = 8\sqrt{26}$$

Так как $40,5^2 < (8\sqrt{26})^2 < 41^2$, ближайшее целое число метров 41.

Ответ 41.

5. В безветренный день белый медведь оказался на отколившейся от айсберга небольшой льдине посреди стоячей воды. Спасатели с зависшего над льдиной вертолета с помощью приборов определили, что животное ходит по окружности диаметром 8,5 метров. Каково же было их удивление, когда потом на фотографии они увидели цепочку следов медведя и диаметр этой траектории оказался равен 9 метров. При этом все измерения и расчеты были правильными. Предложите свое объяснение этого “парадокса”.

Решение. С помощью приборов и по фотографии измерялись разные вещи. Цепочка следов показывает радиус траектории медведя в системе отсчета, связанной с льдиной, а приборы спасателей — радиус траектории в системе отсчета, связанной с землей. Различие в данных показывает, что первая система отсчета движется относительно второй. Так как льдина находится в стоячей воде и ветер отсутствует, она начинает двигаться относительно земли, когда медведь по ней ходит. Когда он отталкивается лапами от поверхности льда, на льдину действует сила, которая приводит ее в движение. В результате и медведь и центр льдины в системе отсчета, связанной с землей, движутся по окружностям вокруг неподвижной точки — общего центра масс.

Различие результатов измерений будет тем больше, чем больше отношение массы медведя к массе льдины. Так как в нашем случае разница на порядок меньше радиуса траектории, можно сделать вывод о том, что льдина всего на один порядок тяжелее медведя.

Возможны и другие объяснения “парадокса”. Если они были обоснованы физическими законами, и было показано, что они могут приводить к указанным в условии различиям в показаниях, решение оценивалось полным баллом.

Критерии оценок

Полное и правильное решение любой задачи оценивалось в 20 баллов.

Идейно верное решение с недочетами (вычислительные ошибки, небольшие недостатки в обоснованиях) оценивались в 15 баллов.

Решения, содержащие верный ход рассуждений, значительные продвижения, но не приведшие к правильному ответу из-за существенных ошибок, оценивались в 5 баллов.

Засчитывался результат 5 лучших задач.