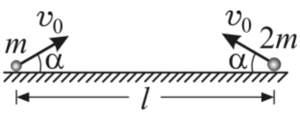
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Олимпиада «Ломоносов 2018/2019» по физике
Отборочный этап для 10-х − 11-х классов

ТУР 1.

1. (17 баллов) Два пластилиновых шарика массами m и $2m$ одновременно бросают навстречу друг к другу с одинаковыми скоростями $v_0 = 5$ м/с, лежащими в одной вертикальной плоскости и образующими с горизонтом углы $\alpha = 30°$. Точки бросания шариков находятся на поверхности земли на расстоянии $l =$ м друг от друга. После соударения шарики слипаются и движутся далее как одно тело. Найдите время τ полета этого тела от момента соударения до момента падения на землю. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ответ приведите в секундах, округлив до сотых.



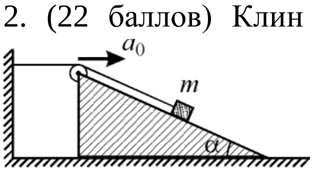
Решение. Столкновение шариков произойдет в воздухе на равных расстояниях от точек бросания. Пренебрегая импульсом силы тяжести за время соударения, по закону сохранения импульса в проекции на вертикальную ось имеем: $mv_y + 2mv_y = 3mv'_y$. Отсюда следует, что вертикальная составляющая скорости шариков после соударения не изменится. Полное время движения шариков от момента бросания до момента падения на землю $t_0 = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, а время движения до соударения $t_1 = \dfrac{l}{2v_0\cos\alpha}$. Искомое время $\tau = t_0 - t_1 = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g} - \dfrac{l}{2v_0\cos\alpha}$.

Ответ: $\tau = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g} - \dfrac{l}{2v_0\cos\alpha}$.

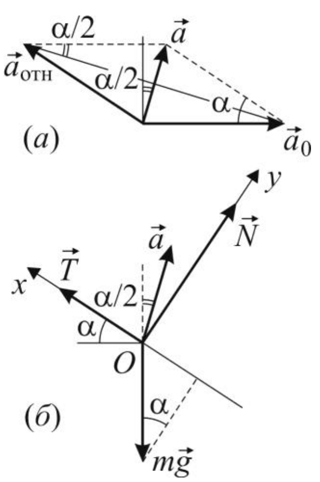
Варьируемый параметр l. Диапазон изменения от 1 до 3 м с шагом 0,2 м. Расчетная формула $\tau = 0{,}5 - 0{,}115 \cdot l$

l	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
τ	0,38	0,36	0,34	0,32	0,29	0,27	0,25	0,22	0,20	0,18	0,15

2. (22 баллов) Клин с углом $\alpha = 30^\circ$ при вершине находится на горизонтальном столе. На поверхности клина располагается брусок массой $m =$ кг, к которому привязана невесомая нерастяжимая нить. Второй конец нити перекинут через блок на клине и прикреплен к неподвижной опоре. При этом отрезок нити от опоры до блока горизонтален, а отрезок нити от блока до бруска параллелен поверхности клина. Найдите модуль T силы натяжения нити, если клин двигают по столу вправо с ускорением $a_0 = 2$ м/с^2. Движение всех тел происходит в плоскости рисунка. Трением можно пренебречь. Ускорение сводного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Ответ приведите в ньютонах, округлив до десятых.



Решение. Ускорение $\vec{a}$ бруска в неподвижной системе отсчета равно $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{\text{отн}}$. При этом относительное ускорение бруска $\vec{a}_{\text{отн}}$ направлено вдоль наклонной поверхности клина вверх и, поскольку длина нити постоянна, по модулю совпадает с a_0. Из рисунка (*а*) видно, что $a = 2a_0 \sin\frac{\alpha}{2}$, а вектор $\vec{a}$ образует с вертикалью угол $\alpha/2$. Силы, действующие на брусок в неподвижной системе отсчета, изображены на рисунке (*б*), где $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{T}$ – сила натяжения нити, $\vec{N}$ – сила реакции наклонной поверхности клина. Записывая уравнение движения бруска в проекции на ось *Ox*, имеем: $ma\sin\frac{\alpha}{2} = T - mg\sin\alpha$. Используя полученное выше выражение для a, а также формулу $2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$, получаем, что $T = mg\sin\alpha + ma_0(1-\cos\alpha)$. Ответ: $T = m\cdot\left(g\sin\alpha + a_0(1-\cos\alpha)\right)$.



Варьируемый параметр m. Диапазон изменения от 1 до 6 кг с шагом 0,5 кг. Расчетная формула $T = 5{,}268\cdot m$.

m	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
T	5,2	7,9	10,5	13,2	15,8	18,4	21,1	23,7	26,3	29,0	31,6

3. (21 баллов) В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде под невесомым подвижным поршнем содержится некоторое количество идеального газа. Газ медленно нагревают так, что он совершает работу $A =$ кДж. Во сколько раз α изменяется при этом среднее число соударений молекул газа с единичной площадкой на стенке сосуда за единицу времени? Начальный объем газа V_0 = 10 л, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Трение между поршнем и стенками сосуда считайте пренебрежимо малым. Ответ округлите до сотых.

Решение. Число соударений молекул с единичной площадкой за единицу времени равно $\bar{Z} = \frac{1}{2}n\overline{|v_x|}$, где n − концентрация молекул, а $\overline{|v_x|}$ − средний модуль проекции скоростей молекул на направление, перпендикулярное стенке. Чтобы оценить $\overline{|v_x|}$, воспользуемся выражением для среднеквадратичной скорости молекул, а именно $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$, где R − универсальная газовая постоянная, T − абсолютная температура, а M − молярная масса газа. Поскольку $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, а в силу хаотичности движения молекул $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$, то $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$ и $\sqrt{\overline{v_x^2}} = \sqrt{\frac{\overline{v^2}}{3}} = \sqrt{\frac{RT}{M}}$. Из соображений размерности ясно, что $\overline{|v_x|}$ отличается от $\sqrt{\overline{v_x^2}}$ только некоторым числовым множителем. Поэтому $\bar{Z} \sim n\sqrt{T}$. Следовательно, искомое отношение числа соударений $\alpha = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_0} = \frac{n_1}{n_0}\sqrt{\frac{T_1}{T_0}} = \frac{V_0}{V_1}\sqrt{\frac{T_1}{T_0}}$, где V_1 и T_1 − объем и температура газа в конечном состоянии, T_0 − начальная температура газа. Работа газа в изобарном процессе $A = p_0(V_1 - V_0) = \nu R(T_1 - T_0)$, где $\nu = \frac{p_0V_0}{RT_0}$ − количество газа. Из этих равенств находим, что

$\frac{V_1}{V_0} = \left(1 + \frac{A}{p_0 V_0}\right)$, $\frac{T_1}{T_0} = \left(1 + \frac{A}{p_0 V_0}\right)$. Подставляя найденные соотношения в формулу для α, получаем, что $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + A/(p_0 V_0)}}$. Ответ: $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + A/(p_0 V_0)}}$.

Варьируемый параметр *A*. Диапазон изменения от 1 до 11 кДж с шагом 1 кДж. Расчетная формула $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + A}}$.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
α	0,71	0,58	0,50	0,45	0,41	0,38	0,35	0,33	0,32	0,30	0,29

4. (23 баллов) В демонстрационной модели генератора переменного тока плоская проволочная рамка площадью S = 0,02 м^2 равномерно вращается в однородном магнитном поле. Ось вращения перпендикулярна вектору магнитной индукции поля, модуль которого равен B = 0,3 Тл. Через токосъёмные контактные кольца к рамке подключают лампочку от карманного фонарика с вольфрамовой нитью накаливания. До какой температуры t нагревается эта нить, если мощность светового излучения лампочки равна $P_{св}$ = Вт? Относительная доля работы тока, преобразованной в это излучение, равна η = 0,9. Сопротивление нити накаливания при температуре 0 ºС равно R_0 = 1 Ом. Температурный коэффициент сопротивления вольфрама считайте равным α = 0,005 К$^{-1}$. Угловая скорость вращения рамки ω = 300 рад/с. Сопротивлением и индуктивностью рамки можно пренебречь. Ответ приведите в градусах по шкале Цельсия, округлив до целых.

Решение. Мощность, выделяющаяся в лампочке, равна $P = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}_0^2}{R}$, где R – сопротивление лампочки, $\mathcal{E}_0 = BS\omega$ –амплитудное значение ЭДС электромагнитной индукции. Сопротивление нити накаливания лампочки при рабочей температуре $R = R_0\left(1 + \alpha(t - 0°\text{C})\right)$. Относительная доля работы тока, преобразованной в световое излучение лампочки, равна $\eta = \frac{P_{св}}{P}$. Решая совместно записанную систему уравнений, получаем, что $t = \frac{\eta \cdot B^2 \cdot S^2 \cdot \omega^2}{2P_{св} R_0 \alpha} - \frac{1}{\alpha}$.

Ответ: $t = \frac{\eta \cdot B^2 \cdot S^2 \cdot \omega^2}{2P_{св} R_0 \alpha} - \frac{1}{\alpha}$.

Варьируемый параметр $P_{св}$. Диапазон изменения от 0,3 до 0,4 Вт с шагом 0,01 Вт. Расчетная формула $t = \left(\frac{291{,}6}{P_{св}} - 200\right)$.

$P_{св}$	0,30	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,36	0,37	0,38	0,39	0,40
t	772	741	711	684	658	633	610	588	567	548	529

5. (17 баллов) Расстояние от предмета до экрана L = см. Какое максимальное увеличение Γ_{max} изображения предмета на экране можно получить с помощью тонкой линзы с фокусным расстоянием F = 10 см? Ответ округлите до сотых.

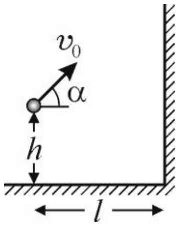
Решение. Обозначим через a и b расстояния от предмета до линзы и от линзы до экрана. По формуле тонкой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$, а по условию $b = L - a$. Из записанных выражений получаем квадратное уравнение относительно a, а именно $a^2 - La + LF = 0$. Корни этого уравнения $a_{1,2} = \frac{L}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4F/L}\right)$. Поэтому $b_{1,2} = \frac{L}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - 4F/L}\right)$. Увеличение, даваемое линзой, $\Gamma = \frac{b}{a}$. Это выражение максимально, если $b = b_{max} = b_2$, $a = a_{min} = a_2$. Следовательно, $\Gamma_{max} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4F/L}}{1 - \sqrt{1 - 4F/L}}$.

Ответ: $\Gamma_{max} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4F/L}}{1 - \sqrt{1 - 4F/L}}$.

Варьируемый параметр L. Диапазон изменения от 50 до 100 см с шагом 5 см. Расчетная формула $\Gamma_{max} = \frac{1 + \sqrt{1 - 40/L}}{1 - \sqrt{1 - 40/L}}$.

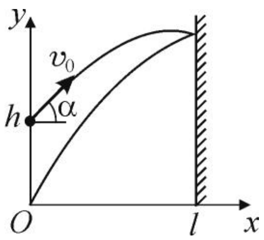
L	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
Γ_{max}	2,62	3,19	3,73	4,27	4,79	5,31	5,83	6,34	6,85	7,36	7,89

ТУР 2.



1. (17 баллов) Мальчик бросает мяч в направлении вертикальной стены так, чтобы мяч, отскочив от стены, упал точно к его ногам. Какова должна быть начальная скорость мяча v_0, если бросок производится с высоты h = 1,5 м под углом α = 45° к горизонту? Расстояние от мальчика до стены l = м. Удар мяча о стену считайте абсолютно упругим, ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с^2. Размером мячика и сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ответ приведите в м/с, округлив до десятых.

Решение. Для того чтобы мяч, отскочив от стены, упал точно к ногам мальчика, траектория мяча должна иметь вид, изображенный на рисунке.

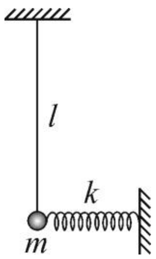


При упругом ударе о неподвижную стенку угол между нормалью к стенке и скоростью мяча перед ударом равен по величине углу между нормалью к стенке и скоростью мяча после удара. Обозначим через t_0 время полета мяча. За это время он проходит по горизонтали путь $2l$. Горизонтальная составляющая скорости мяча равна $v_0 \cos\alpha$ и при полете не меняется по величине, следовательно $v_0 \cos\alpha \cdot t_0 = 2l$. С другой стороны, в момент времени t_0 вертикальная координата мяча должна обратиться в нуль: $h + v_0 \sin\alpha \cdot t_0 - \frac{g t_0^2}{2} = 0$. Исключая из полученных соотношений t_0, находим, что $v_0 = \frac{l}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{2g}{h + 2l\,\mathrm{tg}\,\alpha}}$. **Ответ:** $v_0 = \frac{l}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{2g}{h + 2l\,\mathrm{tg}\,\alpha}}$.

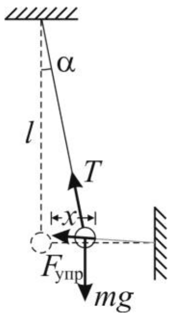
Варьируемый параметр l. Диапазон изменения от 4 до 8 м с шагом 0,4 м. Расчетная формула $v_0 = \frac{6{,}324 \cdot l}{\sqrt{1{,}5 + 2 \cdot l}}$.

l	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0
v_0	8,2	8,7	9,1	9,5	9,9	10,3	10,7	11,1	11,4	11,8	12,1

2. (22 баллов) Небольшой шарик массой $m = 0{,}1$ кг подвешен к потолку на невесомой нерастяжимой нити длиной $l = 1$ м и совершает малые колебания с периодом T_0. После того, как шарик дополнительно соединили с неподвижной стенкой посредством горизонтальной невесомой пружины, период его малых колебаний в плоскости нити и пружины стал равным T_1. При этом пружина в положении равновесия маятника не деформирована. Определите коэффициент жесткости пружины k, если параметр $n = (T_0 - T_1)/T_0 =$. Считайте, что модуль ускорения свободного падения равен $g = 10$ м/с^2, а сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Ответ приведите в Н/м, округлив до десятых.



Решение. Шарик движется под действием сил, модули и направления которых изображены на рисунке, где mg – модуль силы тяжести, T – модуль силы натяжения нити, $F_{упр}$ – модуль силы упругости. Рассмотрим вначале колебания маятника в отсутствие пружины. Уравнение движения шарика при малых углах α отклонения маятника в этом случае имеет вид $ma = -mg\sin\alpha \approx -mg\alpha$. Учитывая, что $\alpha \approx \frac{x}{l}$, где x – горизонтальное смещение шарика, перепишем это уравнение в виде $a = -\frac{g}{l}x$. Оно описывает гармонические колебания шарика на нити с периодом $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. При наличии пружины к силам mg и T добавляется сила упругости, проекция которой на горизонтальное направление приближенно равна $(F_{упр})_x \approx -kx$. Уравнение движения шарика, прикреплённого к стене пружиной, $ma = -\frac{mg}{l}x - kx$, или $a = -\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)x$. Решение этого уравнения представляет собой гармонические колебания с периодом $T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m}}}$. Параметр n, заданный в условии, удобно преобразовать к виду $n = \frac{T_0 - T_1}{T_0} = 1 - \frac{T_1}{T_0} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{kl}{mg}}}$. Отсюда



$$k = \frac{mg}{l} \cdot \frac{n(2-n)}{(1-n)^2}.$$

Ответ: $k = \frac{mg}{l} \cdot \frac{n(2-n)}{(1-n)^2}$.

Варьируемый параметр n. Диапазон изменения от 0,45 до 0,95 с шагом 0,05. Расчетная формула $k = \frac{n(2-n)}{(1-n)^2}$.

n	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
k	2,3	3,0	3,9	5,5	7,2	10,1	15,0	24,0	43,4	99,0	399,0

3. (21 баллов) В прочном горизонтальном цилиндре под поршнем находится смесь азота и гелия при температуре $T = 84$ К и давлении $p = 200$ кПа. Поршень медленно вдвигают в цилиндр, изотермически сжимая смесь. При уменьшении объёма в $n =$ раз на стенках сосуда появляются капельки жидкости. Давление насыщенных паров азота при температуре T равно $p_{н.п.} = 208$ кПа. Пренебрегая массой и объёмом сконденсировавшейся жидкости, определите отношение k числа молекул гелия к числу молекул азота в цилиндре. Критическая температура для паров азота равна T_1 =126 К, для паров гелия T_2 =4,2 К. Ответ округлите до сотых.

Решение. Согласно закону Дальтона давление в цилиндре равно сумме парциальных давлений гелия и азота. Согласно уравнению Менделеева-Клапейрона $p = \frac{\nu_{\text{He}} + \nu_{\text{N2}}}{V} RT$, где V – начальный объём смеси газов, ν_{He} и ν_{N2} – количества молей гелия и азота. При указанной температуре гелий конденсироваться не может, так как находится при температуре, выше критической, а азот может. При изотермическом сжатии в n раз давление азота становится равным давлению его насыщенных паров, а потому давление в цилиндре становится равным $np = \frac{n\nu_{\text{He}}}{V} RT + p_{\text{н.п.}}$. Отсюда $\nu_{\text{He}} = (np - p_{\text{н.п.}})\frac{V}{nRT}$. Поскольку $\nu_{\text{N2}} = \frac{p_{\text{н.п.}}V}{nRT}$, то искомое отношение числа молекул гелия к числу молекул азота в цилиндре $k = \frac{N_{\text{He}}}{N_{\text{N2}}} = \frac{\nu_{\text{He}}}{\nu_{\text{N2}}} = \frac{np}{p_{\text{н.п.}}} - 1$. **Ответ:** $k = \frac{np}{p_{\text{н.п.}}} - 1$.

Варьируемый параметр n. Диапазон изменения от 2 до 4 с шагом 0,2. Расчётная формула $k = 0{,}9615 \cdot n - 1$.

n	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0
k	0,92	1,11	1,31	1,50	1,69	1,88	2,08	2,27	2,46	2,65	2,85

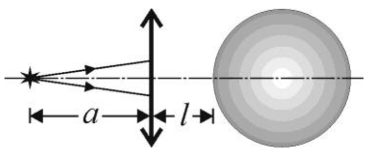
4. (23 баллов) Плоская рамка площадью S = 25 см^2, изготовленная из тонкой проволоки, помещена в однородное магнитное поле с индукцией B = 1 Тл, перпендикулярной плоскости рамки. Если рамку медленно повернуть на 180° вокруг оси, лежащей в её плоскости, то по рамке протечёт заряд $q =$ мКл. Пренебрегая индуктивностью рамки, определите среднюю тепловую мощность $N_{\text{ср}}$, выделяющуюся в рамке при её вращении вокруг той же оси с угловой скоростью ω = 60 рад/с. Ответ выразите в милливаттах, округлив до сотых.

Решение. При повороте рамки изменяется пронизывающий ее магнитный поток Ф, поэтому в рамке возникает электрический ток $I = \frac{1}{R} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, где R – сопротивление рамки. Отсюда получаем связь между изменением магнитного потока $\Delta\Phi$ и протекшим по рамке зарядом $\Delta q = I\Delta t$, а именно $\Delta q = \frac{\Delta\Phi}{R}$. Поскольку $R = \text{const}$, такая же связь справедлива и для конечных приращений заряда и магнитного потока. При повороте рамки на 180° магнитный поток меняется на $\Delta\Phi = 2BS$. Следовательно, $q = \frac{2BS}{R}$, откуда сопротивление рамки $R = \frac{2BS}{q}$. При вращении рамки с угловой скоростью ω и при надлежащем выборе начала отсчёта времени магнитный поток через плоскость рамки меняется по закону $\Phi(t) = BS\sin(\omega t)$. Протекающий по рамке индукционный ток равен $I(t) = \frac{\dot{\Phi}}{R} = \frac{BS\omega}{R}\cos(\omega t)$, где точкой над буквой обозначена производная по времени. Выделяющаяся в рамке мгновенная мощность $N(t) = I^2(t)R$. Учитывая, что среднее значение квадрата гармонической функции за период равно $\frac{1}{2}$, находим искомую среднюю тепловую мощность $N_{\text{ср}} = \frac{BSq\omega^2}{4}$. **Ответ:** $N_{\text{ср}} = \frac{BSq\omega^2}{4}$

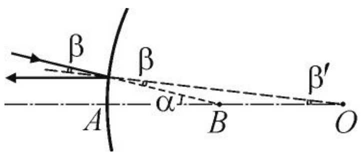
Варьируемый параметр q. Диапазон изменения от 1 до 11 мКл шагом 1 мКл. Расчётная формула $N_{ср} = 2{,}25 \cdot q$.

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$N_{ср}$	2.25	4,50	6,75	9,00	11,25	13,50	15,75	18,00	20,25	22,50	24,75

5. (17 баллов) На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см на расстоянии $a =$ см от нее находится точечный источник, испускающий узкий пучок света. По другую сторону линзы на расстоянии $l = 10$ см от неё расположен зеркальный шар, центр которого лежит на главной оптической оси линзы. Определите радиус шара R, если лучи, отражённые от него собираются в фокусе линзы, ближайшем к источнику. Учтите, что для малых значений аргумента x, заданного в радианах, справедлива приближенная формула $\operatorname{tg} x \approx x$. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до десятых.



Решение. Лучи, отражённые от зеркального шара, соберутся в переднем фокусе линзы, если они параллельны главной оптической оси линзы. Рассмотрим луч, падающий под малым углом β на поверхность зеркального шара (см. рисунок, на котором точка O − центр шара). Согласно закону отражения, угол $\alpha = 2\beta$, а в силу того, что отраженный луч параллелен главной оптической оси системы, $\beta' = \beta$. Из рисунка видно, что $AB \cdot \operatorname{tg}\alpha = AO \cdot \operatorname{tg}\beta$. С учетом малости углов α и β приближенно получаем, что $AB \approx \frac{AO}{2} = \frac{R}{2}$. Следовательно, условие задачи будет выполнено, если изображение источника, создаваемое линзой, находится внутри шара на расстоянии $\frac{R}{2}$ от его поверхности. Используя формулу линзы, находим, что $\frac{a \cdot F}{a - F} = l + \frac{R}{2}$. Отсюда $R = 2\left(\frac{a \cdot F}{a - F} - l\right)$. **Ответ:** $R = 2\left(\frac{a \cdot F}{a - F} - l\right) = 20$ см.



Варьируемый параметр a. Диапазон изменения от 20 до 40 см с шагом 2 см. Расчетная формула $R = 2 \cdot \left(\frac{10 \cdot a}{a - 10} - 10\right)$.

a	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
R	20,0	16,7	14,3	12,5	11,1	10,0	9,1	8,3	7.7	7,1	6,7

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Олимпиада «Ломоносов 2018/2019» по физике
Отборочный этап для 7-х – 9-х классов

ТУР 1.

1. (5 баллов) Одной из характеристик писчей бумаги является ее плотность σ, для измерения которой обычно используется внесистемная единица г/м^2. Какое давление p оказывает на стол лист бумаги плотностью σ = г/м^2? Ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с^2. Ответ приведите в паскалях, округлив до десятых.

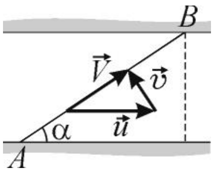
Решение. Сила тяжести, действующая на лист бумаги площадью S, равна $P = \sigma S g$. Давление, оказываемое листом на стол, $p = \dfrac{P}{S}$. **Ответ:** $p = \sigma g$.

Варьируемый параметр σ. Диапазон изменения от 80 до 280 г/м^2 с шагом 20 г/м^2. Расчетная формула $p = 0{,}01\cdot\sigma$.

σ	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280
p	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8

2. (20 баллов) Мальчик переплывает реку, двигаясь по прямой из точки A, находящейся на одном берегу реки, в точку B, находящуюся ниже по течению на противоположном берегу реки, за время t = с. Скорость течения реки u = 1 м/с. Найдите ширину реки h, если известно, что модуль скорости мальчика относительно воды v = 0,8 м/с, а вектор этой скорости перпендикулярен прямой AB. Ответ приведите в метрах, округлив до десятых.

Решение. Скорость мальчика относительно берега $\vec V$ складывается из скорости мальчика относительно воды и скорости течения, т.е. $\vec V = \vec v + \vec u$. При этом вектор $\vec V$ направлен вдоль отрезка AB. По условию задачи вектор $\vec v$ направлен перпендикулярно этому отрезку, поэтому эти три вектора образуют прямоугольный треугольник, как показано на рисунке. Из рисунка видно, что $\sin\alpha = \dfrac{v}{u} = \dfrac{L}{AB}$. Отсюда $L = \dfrac{v}{u} AB$.



Длина отрезка AB равна $V\tau$, причем значение скорости V можно найти по теореме Пифагора. Имеем $AB = V\tau = \sqrt{u^2 - v^2}\cdot\tau$. Окончательно для ширины реки получаем выражение $L = \dfrac{v}{u} AB = \dfrac{v\tau}{u}\sqrt{u^2 - v^2}$. **Ответ:** $L = \dfrac{v\tau}{u}\sqrt{u^2 - v^2}$.

Варьируемый параметр τ. Диапазон изменения от 50 до 150 с с шагом 10 с. Расчетная формула $L = 0{,}48\cdot\tau$.

τ	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
L	24	28,8	33,6	38,4	43,2	48,0	52,8	57,6	62,4	67,2	72,0

3. (25 баллов) С какой минимальной скоростью $v_{\min}$ должен влететь в атмосферу Земли метеорит, состоящий из железа, чтобы полностью расплавиться в воздухе, если на нагрев метеорита расходуется α = % его начальной кинетической энергии? Начальная температура метеорита

$t_0 = –261$ ºC. Удельную теплоёмкость железа считайте равной $c = 460$ Дж/(кг ºС), температуру плавления железа – $t_{пл} = 1539$ ºС, удельную теплоту плавления железа – $\lambda = 270$ кДж/кг. Ответ приведите в м/с, округлив до целых.

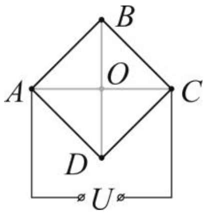
Решение. Метеор нагревается и плавится в результате превращения части его кинетической энергии во внутреннюю энергию. Уравнение теплового баланса имеет вид $\alpha \frac{mv_{\min}^2}{2} = mc(t_{пл} - t_0) + \lambda m$, где m – масса метеорита. Отсюда $v_{\min} = \sqrt{\frac{2c(t_{пл} - t_0) + 2\lambda}{\alpha}}$.

Ответ: $v_{\min} = \sqrt{\frac{2(c(t_{пл} - t_0) + \lambda)\cdot 100\%}{\alpha}}$.

Варьируемый параметр α. Диапазон изменения от 60 до 80 % с шагом 2 %. Расчетная формула $v_{\min} = \frac{14819}{\sqrt{\alpha}}$.

α	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80
$v_{\min}$	1913	1882	1852	1824	1797	1771	1746	1723	1700	1678	1657

4. (25 баллов) Из медной проволоки площадью поперечного сечения $s = 0{,}5$ мм^2 изготовлен контур, имеющий форму квадрата $ABCD$ со стороной $a = 1$ м, а из алюминиевой проволоки того же сечения – его диагонали AC и BD, соединенные в точке O (см. рисунок). Вершины A и C подключены к источнику постоянного напряжения $U =$ В. Найдите мощность N, выделяющуюся в рассматриваемой цепи, если сопротивление подводящих проводов пренебрежимо мало. Удельное сопротивление меди $\rho_м = 0{,}018$ Ом·мм^2/м, удельное сопротивление алюминия $\rho_а = 0{,}028$ Ом·мм^2/м. Ответ приведите в ваттах, округлив до целых.



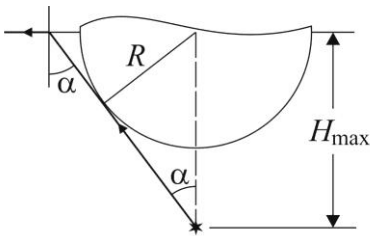
Решение. Из соображений симметрии ясно, что по диагонали BD ток не течет и ее можно удалить из схемы. Используя стандартные формулы для расчета сопротивления последовательно и параллельно соединенных проводников, находим, что сопротивление цепи $R = \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC}}$, где $R_{AB} = \frac{\rho_м a}{s}$, $R_{AC} = \frac{\rho_а a\sqrt{2}}{s}$. Следовательно, $R = \frac{\rho_м \rho_а a\sqrt{2}}{s(\rho_м + \rho_а\sqrt{2})}$. По закону Джоуля–Ленца $N = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2 s(\rho_м + \rho_а\sqrt{2})}{\rho_м\rho_а a\sqrt{2}}$. **Ответ:** $N = \frac{U^2 s(\rho_м + \rho_а\sqrt{2})}{\rho_м\rho_а a\sqrt{2}}$.

Варьируемый параметр U. Диапазон изменения от 1 до 11 В с шагом 1 В. Расчетная формула $N = 40{,}41 \cdot U^2$.

U	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N	40	162	364	647	1010	1455	1980	2586	3273	4041	4890

5. (25 баллов) На поверхности воды плавает непрозрачный шар радиусом $R =$ см, наполовину погруженный в воду. На какой максимальной глубине $H_{\max}$ нужно поместить под центром шара точечный источник света, чтобы ни один световой луч не прошел в воздух? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до десятых.

Решение. Искомое положение источника изображено на рисунке. Оно определяется из условия, что касательные к шару лучи света, испущенные источником, падают на границу раздела "вода – воздух" под предельным углом полного отражения. В этом случае действительно ни один луч от источника не выйдет в воздух, т.к. часть лучей будет перекрыта шаром, а все остальные лучи заведомо испытают полное отражение на границе раздела сред. Если переместить источник на меньшую глубину, свет по-прежнему не выйдет из воды, если же наоборот погрузить источник глубже, чем H_{max}, то найдется часть лучей, которые будут падать на границу под углами, меньшими предельного угла полного отражения, и пройдут в воздух. Минимальный угол α падения луча на границу "вода – воздух" определяется равенством $\sin\alpha = \dfrac{R}{H_{max}}$. Поскольку при полном отражении $\sin\alpha = \dfrac{1}{n}$, то $H_{max} = Rn$.



Варьируемый параметр R. Диапазон изменения от 10 до 30 см с шагом 2 см. Расчетная формула $H_{max} = 1{,}33 \cdot R$.

R	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
H_{max}	13,3	16,0	18,6	21,3	23,9	26,6	29,3	31,9	34,6	37,2	39,9

ТУР 2.

1. (5 баллов) Бревно массой $m =$ кг плавает в воде, не касаясь дна реки. Какой объем V занимает погруженная в воду часть бревна? Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3. Ответ приведите в литрах, округлив до десятых.

Решение. Условие плавания бревна имеет вид $mg = \rho V g$. Отсюда $V = \dfrac{m}{\rho}$. **Ответ:** $V = \dfrac{m}{\rho}$.

Варьируемый параметр m. Диапазон изменения от 5 до 10 кг с шагом 0,5 кг. Расчетная формула $V = m$.

m	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0
V	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0

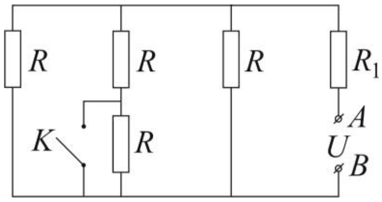
2. (20 баллов) Моторная лодка плывёт по реке вниз по течению. В тот момент, когда лодка проплывала мимо пристани из неё выпал спасательный круг. Рыбак, находившийся в лодке, обнаружил пропажу только спустя $t = 20$ минут. Он сразу же развернул лодку и поплыл в обратном направлении, не изменяя режима работы мотора. Спасательный круг он нашёл на расстоянии $S =$ км от пристани. Определите скорость v течения реки, считая её постоянной. Ответ приведите в км/ч, округлив до сотых.

Решение. Будем решать задачу в системе отсчёта, связанной с водой. В этой системе лодка движется с постоянной по модулю скоростью, определяемой только режимом работы мотора. В системе отсчета, связанной с водой, плот неподвижен, поэтому расстояния, пройденные лодкой относительно воды при движении по течению и против течения одинаковы. Следовательно, времена движения "туда" и "обратно" совпадают. Значит время, прошедшее между моментами потери спасательного круга и его обнаружения, равно $2t$. За это время плот, двигаясь со скоростью течения v, прошел относительно берега расстояние S, т.е. $S = 2vt$. **Ответ:** $v = \frac{S}{2t}$.

Варьируемый параметр S. Диапазон изменения от 1 до 3 км с шагом 0,2 км. Расчётная формула $v = 1{,}5 \cdot S$.

S	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
v	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5

3. (25 баллов) Цепь, изображенная на рисунке, составлена из 4 одинаковых резисторов сопротивлением $R = 7{,}5$ Ом и резистора $R_1 = 1$ Ом. На клеммах AB поддерживается постоянное напряжение $U =$ В. На какую величину ΔI изменится сила тока, текущего через резистор R_1, после замыкания ключа K? Сопротивлением проводов и ключа можно пренебречь. Ответ приведите в амперах, округлив до сотых.



Решение. Когда ключ разомкнут, полное сопротивление цепи равно $R' = R_1 + \frac{2R}{5}$. При замкнутом ключе ток течет в обход резистора, к которому подсоединен ключ, и полное сопротивление цепи становится равным $R'' = R_1 + \frac{R}{3}$. Изменение силы тока, текущего через резистор R_1, определяется как $\Delta I = \frac{U}{R''} - \frac{U}{R'}$. **Ответ:** $\Delta I = \frac{UR}{(3R_1 + R)(5R_1 + 2R)}$.

Варьируемый параметр U. Диапазон изменения от 10 до 30 В с шагом 2 В. Расчетная формула $\Delta I = 0{,}0357 \cdot U$.

U	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
ΔI	0,36	0,43	0,50	0,57	0,64	0,71	0,78	0,86	0,93	1,00	1,07

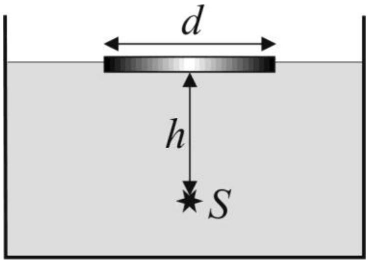
4. (25 баллов) При центральном соударении шарика, движущегося со скоростью $v =$ м/с, с таким же неподвижным шариком последний приобретает скорость $v/2$. Найдите изменение температуры шариков Δt, если удельная теплоемкость вещества, из которого они состоят, $c = 0{,}25$ кДж/(кг·С°). Рассеянием теплоты в окружающую среду можно пренебречь. Ответ приведите в градусах Цельсия, округлив до сотых.

Решение. Обозначим через m массу каждого из шариков, а через u – скорость первоначально двигавшегося шарика, которую он приобретет после соударения. По закону сохранения импульса: $mv = mu + m\frac{v}{2}$, откуда $u = \frac{v}{2}$. Следовательно, после соударения оба шарика движутся с одной скоростью. По закону изменения механической энергии имеем $\frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2}{8} + \frac{mv^2}{8} + Q$. Отсюда находим, что выделившееся при ударе количество теплоты $Q = \frac{mv^2}{4}$. Из уравнения теплового баланса следует равенство $2mc\Delta t = Q$. **Ответ:** $\Delta t = \frac{v^2}{8c}$.

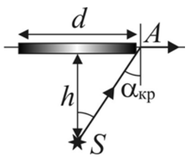
Варьируемый параметр v. Диапазон изменения от 20 до 30 м/с с шагом 1 м/с. Расчетная формула $\Delta t = \dfrac{v^2}{2000}$.

v	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Δt	0,20	0,22	0,24	0,26	0,29	0,31	0,34	0,36	0,39	0,42	0,45

5. (25 баллов) Тонкий круглый деревянный диск плавает в бассейне, наполненном водой. В воде



под диском на глубине $h =$ м находится точечный источник света S, причем центр диска и источник находятся на одной вертикали. Пренебрегая отражением света от стенок и дна бассейна, определите минимальный диаметр диска d, при котором ни один световой луч не выйдет из воды. Показатель преломления воды $n = 1{,}33$. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до целых.



Решение. Условие задачи будет выполнено, если луч SA, идущий от источника в край диска, будет падать на поверхность воды под критическим углом полного внутреннего отражения $\alpha_{кр}$, для которого выполняется условие $\sin\alpha_{кр} = \dfrac{1}{n}$. При падении луча на границу раздела воды и воздуха под таким углом, преломленный луч будет идти по поверхности воды. Лучи, падающие на границу раздела воды и воздуха под бóльшими углами, испытают на этой границе полное отражение и в воздух не выйдут. Из рисунка видно, что

$\sin\alpha_{кр} = \dfrac{d}{2\sqrt{h^2 + \left(\dfrac{d}{2}\right)^2}}$. Таким образом, $\dfrac{d}{\sqrt{4h^2 + d^2}} = \dfrac{1}{n}$. Отсюда $d = \dfrac{2h}{\sqrt{n^2 - 1}}$.

Ответ: $d = \dfrac{2h}{\sqrt{n^2 - 1}}$.

Варьируемый параметр h. Диапазон изменения от 0,5 до 1,5 м с шагом 0,1 м. Расчётная формула $d = 228{,}1 \cdot h$.

h	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
d	114	137	160	182	205	228	251	274	297	319	342

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Олимпиада «Ломоносов 2018/2019» по физике

Заключительный этап для 10 - 11-х классов

Вариант 1

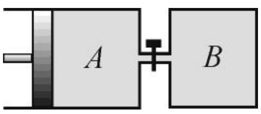
1.10.1. Задача (15 баллов). Вертолёт Ми-171 массой $m = 7 \cdot 10^3$ кг неподвижно завис над поверхностью Земли. Какую мощность N развивает при этом его двигатель, если диаметр винта вертолёта $d = 20$ м. Считайте, что доля мощности двигателя, расходуемая на образование вертикальной струи воздуха, составляет $\eta = 80\%$ от его полной мощности, а скорость воздуха в этой струе примерно одинакова по всему ее сечению. Плотность воздуха $\rho = 1{,}3$ кг/м^3. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

Вопросы (10 баллов). Сформулируйте второй и третий законы Ньютона.

1.10.1. Решение. Масса отбрасываемого за время Δt винтом вертолёта воздуха равна $\Delta m = \dfrac{\rho v \Delta t \cdot \pi d^2}{4}$, где v – скорость струи воздуха от винта. Импульс, переданный воздуху за это время, $\Delta p = \Delta m \cdot v = \dfrac{\rho v^2 \Delta t \cdot \pi d^2}{4}$. Подъёмная сила, действующая на вертолёт, $F = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = \dfrac{\rho v^2 \pi d^2}{4}$. Поскольку вертолёт неподвижен, $F = mg$, откуда получаем, что $v = \sqrt{\dfrac{4mg}{\pi \rho d^2}}$. Энергия, передаваемая воздуху за время Δt, равна $\Delta E = \dfrac{\Delta m v^2}{2} = \dfrac{\pi \rho v^3 d^2 \Delta t}{8}$. Мощность, развиваемая двигателем вертолёта, $N = \dfrac{\Delta E}{\eta \Delta t} = \dfrac{\pi \rho v^3 d^2}{8\eta} = \dfrac{mg}{d\eta}\sqrt{\dfrac{mg}{\pi\rho}}$.

Ответ: $N = \dfrac{100\%}{\eta} \cdot \dfrac{mg}{d}\sqrt{\dfrac{mg}{\pi\rho}} \approx 573$ кВт.

2.6.1. Задача (15 баллов). Цилиндр A соединён с сосудом B короткой трубкой с краном. В исходном состоянии в сосуде и в цилиндре справа от поршня находились равные количества гелия при одинаковой температуре и давлении $p_0 = 1$ атм. Закрыв кран, объём гелия в цилиндре изобарно уменьшили в $n = 3$ раза, а гелий в сосуде нагрели так, что его давление возросло в $k = 3$ раза. Затем, зафиксировав положение поршня, открыли кран. Пренебрегая объемом трубки и теплообменом гелия с окружающими телами, определите установившееся давление p в сосуде. Ответ выразите в атмосферах.

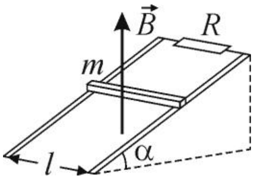


Вопросы (10 баллов). Запишите уравнение Менделеева−Клапейрона (уравнение состояния идеального газа). Какими уравнениями описываются изотермический, изобарный и изохорный процессы?

2.6.1. Решение. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона абсолютная температура T_0, объём V_0 и число молей гелия в сосуде ν удовлетворяют соотношению: $p_0 V_0 = \nu R T_0$, где R –

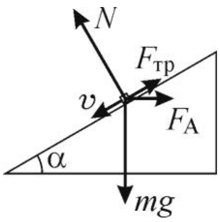
универсальная газовая постоянная. После закрытия крана согласно закону Гей-Люссака температура в цилиндре понизится до $T_A = \dfrac{T_0}{n}$, а согласно закону Шарля температура в сосуде станет равной $T_B = kT_0$. После открывания крана внутренняя энергия гелия не изменяется, т.е. $\dfrac{3}{2}\nu R(T_A + T_B) = \dfrac{3}{2}2\nu RT$, где T – установившаяся температура, причём $pV_0\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 2\nu RT$. Из записанных выражений получаем, что $p = p_0\dfrac{kn+1}{n+1}$. **Ответ:** $p = p_0\dfrac{kn+1}{n+1} = 2{,}5$ атм.

3.1.1. Задача (15 баллов). По двум проводящим длинным шинам, установленным под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, поступательно соскальзывает расположенный перпендикулярно шинам медный брусок массой $m = 100$ г (см. рисунок). Вся система находится в однородном вертикальном магнитном поле, модуль индукции которого равен $B = 0{,}1$ Тл. Сверху шины замкнуты на резистор сопротивлением $R = 0{,}1$ Ом. Коэффициент трения между поверхностями шин и бруска равен $\mu = 0{,}5$, а расстояние между шинами $l = 1$ м. Пренебрегая сопротивлением шин, бруска и мест контакта между ними, найдите тепловую мощность N, выделяющуюся в резисторе при движении бруска с установившейся скоростью. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.



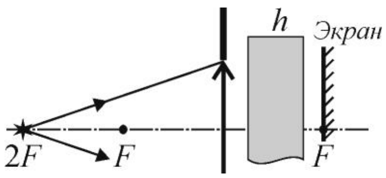
Вопросы (10 баллов). Сформулируйте закон электромагнитной индукции и правило Ленца.

3.1.1. Решение. Брусок движется по шинам под действием сил, модули и направления которых изображены на рисунке, где mg − модуль силы тяжести, N − модуль нормальной составляющей силы реакции шин, $F_{\text{А}}$ − модуль силы Ампера, $F_{\text{тр}}$ − модуль силы трения скольжения. На концах бруска возникает ЭДС индукции, обусловленная действием силы Лоренца на свободные заряды в движущемся проводнике, и по модулю равная $\mathsf{E} = Blv\cos\alpha$. По контуру, образованному шинами, бруском и резистором, начинает течь ток силой $I = \dfrac{\mathsf{E}}{R}$. В результате появляется сила Ампера, действующая на брусок, и по модулю равная $F_{\text{А}} = IBl$. Она нарастает до тех пор, пока скорость движения бруска не перестаёт увеличиваться, достигая значения $v_{\text{уст.}}$. Соответствующее уравнение движения имеет вид $0 = mg\sin\alpha - \mu(mg\cos\alpha + F_{\text{А}}\sin\alpha) - F_{\text{А}}\cos\alpha$. Сила протекающего в контуре тока равна при этом $I = \dfrac{Blv_{\text{уст}}\cos\alpha}{R}$, а сила Ампера: $F_{\text{А}} = \dfrac{B^2l^2v_{\text{уст}}\cos\alpha}{R}$. Подставляя полученное выражение для силы Ампера в уравнение движения, найдем установившуюся скорость движения бруска: $v_{\text{уст}} = \dfrac{mgR}{B^2l^2\cos\alpha}\cdot\dfrac{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}$. Используя это выражение, находим, что сила тока в контуре $I = \dfrac{mg}{Bl}\cdot\dfrac{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}$. Тепловая мощность, выделяющаяся в резисторе, по закону Джоуля−Ленца равна $N = I^2R = \left[\dfrac{mg}{Bl}\cdot\dfrac{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}\right]^2 R$.



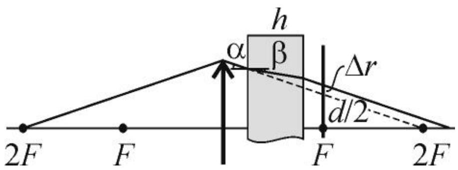
Ответ: $N = \left[\dfrac{mg}{Bl}\cdot\dfrac{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(\cos + \mu\sin\alpha)}\right]^2 R \approx 0{,}039$ Вт ≈ 39 мВт.

4.4.1. Задача (15 баллов). Тонкая собирающая линза плотно вставлена в круглое отверстие в непрозрачной ширме. Точечный источник света располагается на главной оптической оси на удвоенном фокусном расстоянии от нее. При этом на экране, установленном в фокальной плоскости по другую сторону от линзы перпендикулярно ее главной оптической оси, наблюдается светлое пятно диаметра $d = 1$ см. Каким станет диаметр d_1 светлого пятна на экране, если между ним и линзой поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $h = 2$ см с показателем преломления $n = 2$? Фокусное расстояние линзы $F = 10$ см. Учтите, что для малых значений аргумента x, заданного в радианах, справедливы приближенные формулы $\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x$.



Вопросы (10 баллов). Какие линзы называют тонкими? Что такое фокусное расстояние и оптическая сила тонкой линзы?

4.4.1. Решение. Ход одного из крайних лучей, ограничивающих световое пятно на экране, изображен на рисунке. В отсутствие пластинки ход луча показан штриховой линией, а при наличии пластинки − сплошной. Видно, что преломление света на боковых поверхностях пластинки приводит к тому, что луч смещается параллельно самому себе на некоторое расстояние, что вызывает изменение размеров светлого пятна на экране. Как следует из рисунка, $\Delta r = h(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$, где α и β − углы падения и преломления на левой поверхности пластинки, причем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{d}{2F}$. По условию $\frac{d}{2F} = 0{,}05 << 1$, поэтому справедливы приближенные формулы $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$, $\operatorname{tg}\beta \approx \beta$. Кроме того, $\sin\alpha \approx \alpha$, $\sin\beta \approx \beta$ и закон преломления на гранях пластинки принимает вид $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \frac{\alpha}{\beta} \approx n$. Из записанных равенств следует, что $\Delta r \approx \frac{dh}{2F} \cdot \frac{n-1}{n}$. Учитывая, что $d_1 = d + 2\Delta r$, получаем окончательно, что $d_1 = d\left(1 + \frac{h}{F} \cdot \frac{n-1}{n}\right)$. **Ответ:** $d_1 = d\left(1 + \frac{h}{F} \cdot \frac{n-1}{n}\right)$=1,1 см.



Вариант 2

1.10.2. Задача (15 баллов). Вертолёт Ми-171 массой $m = 7 \cdot 10^3$ кг неподвижно завис над поверхностью Земли. Считая, что скорость воздуха в вертикальной струе, создаваемой винтом вертолета, примерно одинакова по всему ее сечению, найдите эту скорость v, если диаметр винта вертолёта $d = 20$ м. Плотность воздуха $\rho = 1{,}3$ кг/м^3. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

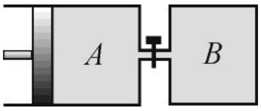
Вопросы (10 баллов). Как связаны изменение импульса материальной точки и импульс силы? Сформулируйте закон сохранения импульса системы материальных точек.

1.10.2. Решение. Масса отбрасываемого за время Δt винтом вертолёта воздуха равна $\Delta m = \frac{\rho v \Delta t \cdot \pi d^2}{4}$, где v – скорость струи воздуха от винта. Импульс, переданный воздуху за это время, $\Delta p = \Delta m \cdot v = \frac{\rho v^2 \Delta t \cdot \pi d^2}{4}$. Подъёмная сила, действующая на вертолёт, $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\rho v^2 \pi d^2}{4}$.

Поскольку вертолёт неподвижен, $F = mg$, откуда получаем, что $v = \sqrt{\frac{4mg}{\pi\rho d^2}}$.

Ответ: $v = \dfrac{2}{d}\sqrt{\dfrac{mg}{\pi\rho}} \approx 13$ м/с.

2.6.2. Задача (15 баллов). Цилиндр A соединён с сосудом B короткой трубкой с краном. В

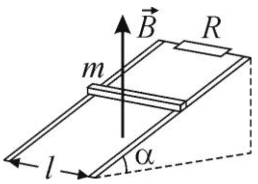


исходном состоянии в сосуде и в цилиндре справа от поршня находились равные количества гелия при одинаковой температуре и давлении. Закрыв кран, объём гелия в цилиндре изобарно уменьшили в $n = 3$ раза, а гелий в сосуде нагрели так, что его давление возросло в $k = 3$ раза. Затем, зафиксировав положение поршня, открыли кран, после чего установившееся давление стало равным $p = 2{,}5$ атм. Пренебрегая объемом трубки и теплообменом гелия с окружающими телами, определите первоначальное давление p_0 в сосуде. Ответ выразите в атмосферах.

Вопросы (10 баллов). Дайте определение идеального газа. Запишите основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа.

2.6.2. Решение. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона абсолютная температура T_0, объём V_0 и число молей гелия в сосуде ν удовлетворяют соотношению: $p_0V_0 = \nu RT_0$, где R – универсальная газовая постоянная. После закрытия крана согласно закону Гей-Люссака температура в цилиндре понизится до $T_A = \dfrac{T_0}{n}$, а согласно закону Шарля температура в сосуде станет равной $T_B = kT_0$. После открывания крана внутренняя энергия гелия не изменяется, т.е. $\dfrac{3}{2}\nu R(T_A + T_B) = \dfrac{3}{2}2\nu RT$, где T – установившаяся температура, причём $pV_0\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 2\nu RT$. Из записанных выражений получаем, что $p_0 = p\dfrac{n+1}{kn+1}$. **Ответ:** $p_0 = p\dfrac{n+1}{kn+1} = 1$ атм.

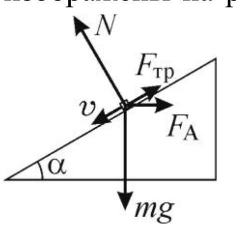
3.1.2. Задача (15 баллов). По двум проводящим длинным шинам, установленным под углом



$\alpha = 30°$ к горизонту, поступательно соскальзывает расположенный перпендикулярно шинам медный брусок массой $m = 100$ г (см. рисунок). Вся система находится в однородном вертикальном магнитном поле, модуль индукции которого равен $B = 0{,}1$ Тл. Сверху шины замкнуты на резистор. Коэффициент трения между поверхностями шин и бруска равен $\mu = 0{,}5$, а расстояние между шинами $l = 1$ м. Пренебрегая сопротивлением шин, бруска и мест контакта между ними, найдите сопротивление резистора R, если в нем при движении бруска с установившейся скоростью выделяется тепловая мощность $N = 40$ мВт. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

Вопросы (10 баллов). Как определяются работа и мощность электрического тока? Сформулируйте закон Джоуля−Ленца.

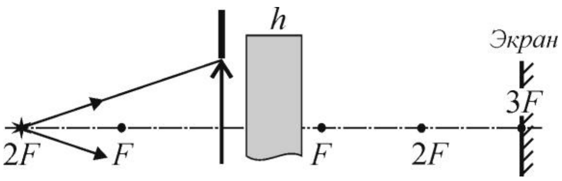
3.1.2. Решение. Брусок движется по шинам под действием сил, модули и направления которых изображены на рисунке, где mg − модуль силы тяжести, N − модуль нормальной составляющей



силы реакции шин, F_A − модуль силы Ампера, $F_{тр}$ − модуль силы трения скольжения. На концах бруска возникает ЭДС индукции, обусловленная действием силы Лоренца на свободные заряды в движущемся проводнике, и по модулю равная $\mathcal{E} = Blv\cos\alpha$. По контуру, образованному шинами, бруском и резистором, начинает течь ток силой $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$. В результате появляется сила

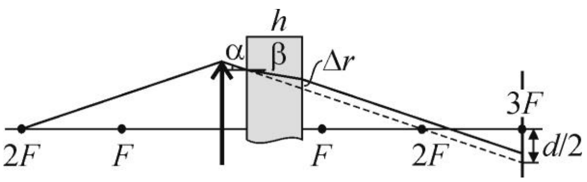
Ампера, действующая на брусок, и по модулю равная $F_A = IBl$. Она нарастает до тех пор, пока скорость движения бруска не перестаёт увеличиваться, достигая значения $v_{уст.}$. Соответствующее уравнение движения имеет вид $0 = mg\sin\alpha - \mu(mg\cos\alpha + F_A \sin\alpha) - F_A\cos\alpha$. Сила протекающего в контуре тока равна при этом $I = \dfrac{Blv_{уст}\cos\alpha}{R}$, а сила Ампера: $F_A = \dfrac{B^2l^2v_{уст}\cos\alpha}{R}$. Подставляя полученное выражение для силы Ампера в уравнение движения, найдем установившуюся скорость движения бруска: $v_{уст} = \dfrac{mgR}{B^2l^2\cos\alpha}\cdot\dfrac{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}$. Используя это выражение, находим, что сила тока в контуре $I = \dfrac{mg}{Bl}\cdot\dfrac{(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}$. Тепловая мощность, выделяющаяся в резисторе, по закону Джоуля−Ленца равна $N = I^2R = \left[\dfrac{mg}{Bl}\cdot\dfrac{(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}\right]^2 R$. Отсюда $R = \left[\dfrac{Bl}{mg}\cdot\dfrac{(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}{(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}\right]^2 N$. **Ответ:** $R = \left[\dfrac{Bl}{mg}\cdot\dfrac{(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}{(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}\right]^2 N \approx 0{,}1$ Ом.

4.4.2. Задача (15 баллов). Тонкая собирающая линза плотно вставлена в круглое отверстие в непрозрачной ширме. Точечный источник света располагается на главной оптической оси линзы на удвоенном фокусном расстоянии от нее. При этом на экране, установленном на утроенном фокусном расстоянии по другую сторону от линзы перпендикулярно ее главной оптической оси, наблюдается светлое пятно диаметра d = 1 см. Каким станет диаметр d_1 светлого пятна на экране, если между ним и линзой поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной h = 2 см с показателем преломления n = 2? Фокусное расстояние линзы F = 10 см. Учтите, что для малых значений аргумента x, заданного в радианах, справедливы приближенные формулы $\sin x \approx \mathrm{tg}\, x \approx x$.



Вопросы (10 баллов). Запишите формулу тонкой линзы. Что такое увеличение, даваемое линзой?

4.4.2. Решение. Ход одного из крайних лучей, ограничивающих световое пятно на экране, изображен на рисунке. В отсутствие пластинки ход луча показан штриховой линией, а при наличии пластинки − сплошной. Видно, что преломление света на боковых поверхностях пластинки приводит к тому, что луч смещается параллельно самому себе на некоторое расстояние, что вызывает изменение размеров светлого пятна на экране. Как следует из рисунка, $\Delta r = h(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta)$, где α и β − углы падения и преломления на левой поверхности пластинки, причем $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{d}{2F}$. По условию $\dfrac{d}{2F} = 0{,}05 << 1$, поэтому справедливы приближенные формулы $\mathrm{tg}\,\alpha \approx \alpha$, $\mathrm{tg}\,\beta \approx \beta$. Кроме того, $\sin\alpha \approx \alpha$, $\sin\beta \approx \beta$ и закон преломления на гранях пластинки принимает вид $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \dfrac{\alpha}{\beta} \approx n$. Из записанных равенств следует, что $\Delta r \approx \dfrac{dh}{2F}\cdot\dfrac{n-1}{n}$.



Учитывая, что $d_1 = d - 2\Delta r$, получаем окончательно, что $d_1 = d\left(1 - \dfrac{h}{F}\cdot\dfrac{n-1}{n}\right)$.

Ответ: $d_1 = d\left(1 - \frac{h}{F} \cdot \frac{n-1}{n}\right) = 0{,}9$ см.

Вариант 3

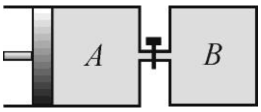
1.10.3. Задача (15 баллов). Вертолёт Ми-171, двигатель которого развивает мощность $N = 570$ кВт, неподвижно завис над поверхностью Земли. Какова масса вертолета m, если диаметр винта вертолёта $d = 20$ м. Считайте, что доля мощности двигателя, расходуемая на образование вертикальной струи воздуха, составляет $\eta = 0{,}8$ от его полной мощности, а скорость воздуха в этой струе примерно одинакова по всему ее сечению. Плотность воздуха $\rho = 1{,}3$ кг/м^3. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

Вопросы (10 баллов). Что такое кинетическая энергия материальной точки? Как связано приращение кинетической энергии материальной точки и работа приложенных к точке сил?

1.10.3. Решение. Масса отбрасываемого за время Δt винтом вертолёта воздуха равна $\Delta m = \frac{\rho v \Delta t \cdot \pi d^2}{4}$, где v – скорость струи воздуха от винта. Импульс, переданный воздуху за это время, $\Delta p = \Delta m \cdot v = \frac{\rho v^2 \Delta t \cdot \pi d^2}{4}$. Подъёмная сила, действующая на вертолёт, $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\rho v^2 \pi d^2}{4}$. Поскольку вертолёт неподвижен, $F = mg$, откуда получаем, что $v = \sqrt{\frac{4mg}{\pi\rho d^2}}$. Энергия, передаваемая воздуху за время Δt, равна $\Delta E = \frac{\Delta m v^2}{2} = \frac{\pi\rho v^3 d^2 \Delta t}{8}$. Мощность, развиваемая двигателем вертолёта, $N = \frac{\Delta E}{\eta \Delta t} = \frac{\pi\rho v^3 d^2}{8\eta} = \frac{mg}{d\eta}\sqrt{\frac{mg}{\pi\rho}}$. Отсюда $m = \frac{\sqrt[3]{(N\eta d)^2 \pi\rho}}{g}$.

Ответ: $m = \frac{\sqrt[3]{(N\eta d)^2 \pi\rho}}{g} \approx 7 \cdot 10^3$ кг.

2.6.3. Задача (15 баллов). Цилиндр A соединён с сосудом B короткой трубкой с краном. В исходном состоянии в сосуде и в цилиндре справа от поршня находились равные количества гелия при одинаковой температуре и давлении $p_0 = 1$ атм. Закрыв кран, объём гелия в цилиндре изобарно уменьшили в $n = 3$ раза, а гелий в сосуде нагрели так, что его давление возросло в некоторое число k раз. Затем, зафиксировав положение поршня, открыли кран. Пренебрегая объемом трубки и теплообменом гелия с окружающими телами, определите k, если установившееся давление стало равным $p = 2{,}5$ атм.



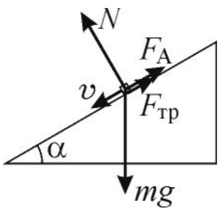
Вопросы (10 баллов). Сформулируйте основные положения молекулярно-кинетической теории. Каковы по порядку величины масса и размер молекул?

2.6.3. Решение. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона абсолютная температура T_0, объём V_0 и число молей гелия в сосуде ν удовлетворяют соотношению: $p_0 V_0 = \nu R T_0$, где R – универсальная газовая постоянная. После закрытия крана согласно закону Гей-Люссака температура в цилиндре понизится до $T_A = \frac{T_0}{n}$, а согласно закону Шарля температура в сосуде станет равной $T_B = kT_0$. После открывания крана внутренняя энергия гелия не изменяется, т.е. $\frac{3}{2}\nu R(T_A + T_B) = \frac{3}{2}2\nu RT$, где T – установившаяся температура, причём $pV_0\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2\nu RT$. Из записанных выражений получаем, что $k = \frac{1}{n}\left(\frac{p}{p_0}(n+1)-1\right)$. **Ответ:** $k = \frac{1}{n}\left(\frac{p}{p_0}(n+1)-1\right) = 3$.

3.1.3. Задача (15 баллов). По двум проводящим длинным шинам, установленным под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, поступательно соскальзывает расположенный перпендикулярно шинам медный брусок массой m = 100 г (см. рисунок).. Вся система находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен к плоскости движения бруска, а модуль равен B = 0,1 Тл. Сверху шины замкнуты на резистор сопротивлением R = 0,2 Ом. Коэффициент трения между поверхностями шин и бруска равен $\mu = 0{,}5$, а расстояние между шинами $l = 1$ м. Пренебрегая сопротивлением шин, бруска и мест контакта между ними, найдите тепловую мощность N, выделяющуюся в резисторе при движении бруска с установившейся скоростью. Ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с^2.

Вопросы (10 баллов). Сформулируйте закон Ампера. Чему равна сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле?

3.1.3. Решение. Брусок движется по шинам под действием сил, модули и направления которых изображены на рисунке, где mg − модуль силы тяжести, N − модуль нормальной составляющей силы реакции шин, $F_А$ − модуль силы Ампера, $F_{тр}$ − модуль силы трения скольжения. На концах бруска возникает ЭДС индукции, обусловленная действием силы Лоренца на свободные заряды в движущемся проводнике, и по модулю равная $\mathcal{E} = Blv$. По контуру, образованному шинами, бруском и резистором, начинает течь ток силой $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$. В результате появляется сила



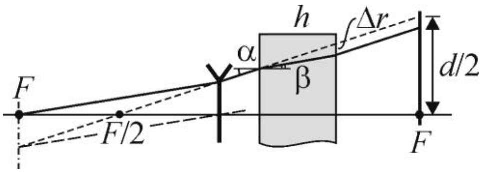
Ампера, действующая на брусок, и по модулю равная $F_А = IBl$. Она нарастает до тех пор, пока скорость движения бруска не перестаёт увеличиваться, достигая значения $v_{уст.}$. Соответствующее уравнение движения имеет вид $0 = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - F_А$. Сила протекающего в контуре тока равна при этом $I = \frac{Blv_{уст}}{R}$, а сила Ампера: $F_А = \frac{B^2l^2v_{уст}}{R}$. Подставляя полученное выражение для силы Ампера в уравнение движения, найдем установившуюся скорость движения бруска: $v_{уст} = \frac{mgR}{B^2l^2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. Используя это выражение, находим, что сила тока в контуре $I = \frac{mg}{Bl}\cdot(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. Тепловая мощность, выделяющаяся в резисторе, по закону Джоуля−Ленца равна $N = I^2R = \left[\frac{mg}{Bl}\cdot(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\right]^2 R$.

Ответ: $N = \left[\frac{mg}{Bl}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\right]^2 R \approx 0{,}09\ \text{Вт} = 90\ \text{мВт}$.

4.4.3. Задача (15 баллов). Тонкая рассеивающая линза плотно вставлена в круглое отверстие в непрозрачной ширме. Точечный источник света располагается на главной оптической оси линзы на фокусном расстоянии от нее. При этом на экране, установленном на фокусном расстоянии по другую сторону от линзы перпендикулярно ее главной оптической оси, наблюдается светлое пятно диаметра $d = 3$ см. Каким станет диаметр d_1 светлого пятна на экране, если между ним и линзой поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $h = 1$ см с показателем преломления $n = 2$? Модуль фокусного расстояния линзы $F = 10$ см. Учтите, что для малых значений аргумента x, заданного в радианах, справедливы приближенные формулы $\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x$.

Вопросы (10 баллов). Приведите примеры построения изображений предмета в собирающей и рассеивающей линзах.

4.4.3. Решение. Ход одного из крайних лучей, ограничивающих световое пятно на экране,



изображен на рисунке. В отсутствие пластинки ход луча показан штриховой линией, а при наличии пластинки − сплошной. Видно, что преломление света на боковых поверхностях пластинки приводит к тому, что луч смещается параллельно самому себе на некоторое расстояние, что вызывает изменение размеров светлого пятна на экране. Как следует из рисунка, $\Delta r = h(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$, где α и β − углы падения и преломления на левой поверхности пластинки, причем $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{d}{3F}$. По условию $\dfrac{d}{3F} = 0{,}1 << 1$, поэтому справедливы приближенные формулы $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$, $\operatorname{tg}\beta \approx \beta$. Кроме того, $\sin\alpha \approx \alpha$, $\sin\beta \approx \beta$ и закон преломления на гранях пластинки принимает вид $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \dfrac{\alpha}{\beta} \approx n$. Из записанных равенств следует, что $\Delta r \approx \dfrac{dh}{3F} \cdot \dfrac{n-1}{n}$. Учитывая, что $d_1 = d - 2\Delta r$, получаем окончательно, что $d_1 = d\left(1 - \dfrac{2h}{3F} \cdot \dfrac{n-1}{n}\right)$.

Ответ: $d_1 = d\left(1 - \dfrac{2h}{3F} \cdot \dfrac{n-1}{n}\right)$=2,9 см.

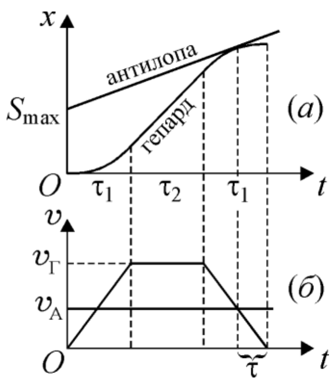
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Олимпиада «Ломоносов 2018/2019» по физике

Заключительный этап для 9-х классов

---

1. (25 баллов) Гепард, заметив антилопу, убегающую от него со скоростью $v_А = 20$ м/с, начинает ее преследовать. Разгоняясь равноускоренно, он за $\tau_1 = 4$ с развивает скорость $v_Г = 30$ м/с, с которой бежит в течение $\tau_2 = 10$ с. Затем, почувствовав перегрев своего тела, гепард прекращает преследование, останавливаясь с тем же по модулю ускорением, что и при разгоне. На каком максимальном расстоянии S_{max} должны находиться друг от друга в начальный момент эти животные, чтобы гепард смог полакомиться пойманной антилопой?
Замечание. Вследствие отсутствия потовых желез на теле и плохого отвода теплоты через шкуру гепард не может развивать максимальную скорость (примерно 110 км/час) в течение длительного времени без опасного для его организма перегрева.

Решение. Поместим начало системы координат в точку старта гепарда, а координатную ось OX направим вдоль прямой, по которой движутся животные. На рисунке изображены графики зависимости координат (рис. *а*) и скоростей (рис. *б*) гепарда и антилопы от времени. Из рис. *а* видно, что гепард догонит антилопу, если расстояние между животными в момент начала погони не превышает S_{max}. В свою очередь, S_{max} находится из условия, что в тот момент, когда гепард догоняет антилопу, одновременно с равенством координат животных достигается и равенство их скоростей (если в этот момент гепард не схватил антилопу, то в последующем он будет от нее отставать).

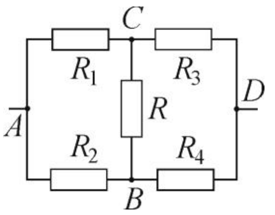


Из рис. *б* видно, что время T движения животных до момента, когда их скорости сравняются, равно: $T = \tau_1 + \tau_2 + (\tau_1 - \tau)$. При этом входящий в это выражение промежуток времени τ может быть найден из отношения: $\dfrac{v_Г}{\tau_1} = \dfrac{v_А}{\tau}$, которое следует из подобия треугольников на графиках $v = v(t)$. Отсюда $\tau = \dfrac{v_А}{v_Г}\tau_1$. Пути, пройденные гепардом и антилопой за время T, равны: $S_Г = v_Г(\tau_1 + \tau_2) - \dfrac{1}{2}v_А\tau$, $S_А = v_А(2\tau_1 + \tau_2 - \tau)$. Начальное расстояние между гепардом и антилопой равно разности их путей: $S_{max} = S_Г - S_А$.

Ответ: $S_{max} = v_Г(\tau_1 + \tau_2) - v_А(2\tau_1 + \tau_2) + \dfrac{1}{2}\dfrac{v_А^2}{v_Г}\tau_1 \approx 86{,}7$ м.

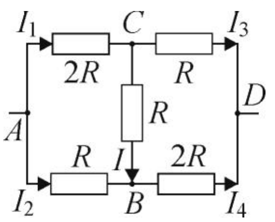
2. (25 баллов) В калориметр с водой, имеющей температуру $t_1 = 8$ °С, помещают кусок льда, причем масса льда равна массе воды. После установления теплового равновесия оказалось, что отношение массы льда к массе воды равно $k = 8/7$. Пренебрегая теплообменом калориметра с окружающей средой, определите начальную температуру t_2 льда. Удельные теплоёмкости льда и воды считайте равными $c_л = 2{,}1$ кДж/(кг·°С) и $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг·°С), соответственно, удельную теплоту плавления льда – $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг, а температуру плавления льда $t_0 = 0$ °С. Ответ приведите в градусах Цельсия.

Решение. Пусть m – первоначальная масса воды, равная первоначальной массе льда. Если m_1 – масса кристаллизовавшейся воды, то после установления теплового равновесия полная масса льда будет $m_л = m + m_1$, а масса оставшейся воды $m_в = m - m_1$. По условию $\frac{m+m_1}{m-m_1} = k$, откуда $m_1 = m\frac{k-1}{k+1}$. Согласно уравнению теплового баланса, $mc_в(t_0 - t_1) + mc_л(t_0 - t_2) - m_1\lambda = 0$. Отсюда $t_2 = \frac{(c_в + c_л)t_0 - c_в t_1 - \lambda(k-1)/(k+1)}{c_л}$. **Ответ:** $t_2 = \frac{(c_в + c_л)t_0 - c_в t_1 - \lambda(k-1)/(k+1)}{c_л} \approx -26{,}5\,°C$.



3. Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке, подключена к источнику постоянного напряжения в точках A и D. Известно, что сила тока через резистор R_2 равна I_2 = 0,6 А. Пренебрегая сопротивлением проводов, определите силу тока I_1, текущего через резистор R_1. Считайте, что $R_1 = R_4 = 2R$, $R_2 = R_3 = R$, где R = 1 Ом.

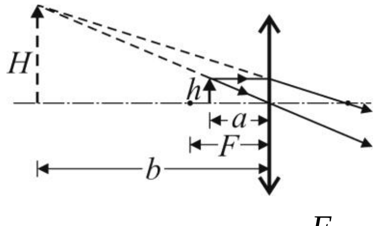
Решение. На рисунке указаны токи, текущие через резисторы. Из этого рисунка, соотношения



между величинами сопротивлений и соображений симметрии следует, что $I_1 = I_4$, $I_2 = I_3$. Для узла C справедливо равенство $I_3 = I_1 - I$, или $I_1 = I_2 + I$. По закону Ома $U_{AB} = I_2 R$, $U_{AC} = I_1 2R$, $U_{CB} = IR$. Кроме того, $U_{AB} = U_{AC} + U_{CB}$. Из записанных равенств находим, что $I_1 = \frac{2}{3}I_2$. **Ответ:** $I_1 = \frac{2}{3}I_2 = 0{,}4$ А.

4. (25 баллов) С помощью тонкой собирающей линзы получено мнимое изображение предмета с увеличением $\Gamma_1 = 20$. Когда, не двигая линзу, сместили предмет параллельно самому себе на расстояние Δa = 4 мм, увеличение изображения предмета стало равным $\Gamma_2 = 25$. Найдите оптическую силу линзы D. Ответ приведите в диоптриях, округлив до сотых.

Решение. Увеличение изображения предмета Γ, определяемое как отношение поперечного



размера изображения H к поперечному размеру предмета h (см. рисунок), равно $\Gamma = \frac{b}{a}$. С учетом того, что изображение мнимое, по формуле тонкой линзы имеем $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$, откуда $b = \frac{aF}{F-a}$.

Следовательно, $\Gamma = \frac{F}{F-a}$. По условию задачи $\Gamma_1 = \frac{F}{F-a_1}$, $\Gamma_2 = \frac{F}{F-a_2}$, $a_2 - a_1 = \Delta a$. Исключая из этих соотношений a_1 и a_2, получаем, что $D = \frac{1}{F} = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\Delta a \cdot \Gamma_1 \cdot \Gamma_2}$. **Ответ:** $D = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\Delta a \cdot \Gamma_1 \cdot \Gamma_2}$ = 2,5 дптр.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

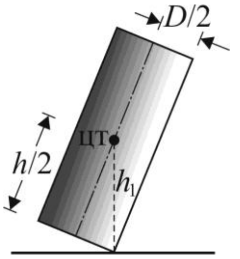
Олимпиада «Ломоносов 2018/2019» по физике

Заключительный этап для 7-х − 8-х классов

---

1. (25 баллов) Сплошной однородный цилиндр высотой h = 8 см и диаметром основания D = 6 см стоит на горизонтальной плоскости. Медленно наклоняя цилиндр, его опрокидывают. Во сколько раз n энергия, выделившаяся при падении цилиндра на стол, превысит минимальную работу, совершенную при его опрокидывании? Ответ округлите до десятых.

1. Решение. Поскольку в начальном, промежуточном и конечном состояниях цилиндра его



кинетическая энергия равна нулю, совершенная при опрокидывании цилиндра работа и выделившаяся при его падении энергия равны соответствующим изменениям его потенциальной энергии. Потенциальная энергия цилиндра относительно стола определяется высотой над столом его центра тяжести, который совпадает с геометрическим центром цилиндра. Начальная потенциальная энергия цилиндра $E_{\Pi 0} = \dfrac{mgh}{2}$, где m – масса цилиндра, g – модуль ускорения свободного падения. Цилиндр начнет опрокидываться при таком угле наклона, при котором вертикаль, проведенная из центра тяжести, выйдет за пределы опоры (см. рисунок). Потенциальная энергия в момент опрокидывания $E_{\Pi 1} = mgh_1 = \dfrac{mg\sqrt{h^2 + D^2}}{2}$. Конечная потенциальная энергия цилиндра $E_{\Pi 2} = \dfrac{mgD}{2}$. Выделившаяся при падении цилиндра энергия $E = E_{\Pi 1} - E_{\Pi 2} = \dfrac{mg}{2}\left(\sqrt{h^2 + D^2} - D\right)$. Работа, затраченная на приведение цилиндра в наклонное положение, $A = E_{\Pi 1} - E_{\Pi 0} = \dfrac{mg}{2}\left(\sqrt{h^2 + D^2} - h\right)$. Из записанных выражений находим, что $n = \dfrac{E}{A} = \dfrac{\sqrt{h^2 + D^2} - D}{\sqrt{h^2 + D^2} - h}$. **Ответ:** $n = \dfrac{\sqrt{h^2 + D^2} - D}{\sqrt{h^2 + D^2} - h} \approx 2$.

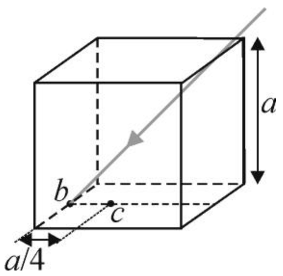
2. (25 баллов) В чайник со свистком налили воду массой m_1 = 1 кг и поставили на электрическую плитку. Через время τ_1 = 6 мин вода закипела и раздался свисток. Какова масса m_2 воды, оставшейся в чайнике после кипения воды, продолжавшегося в течение еще τ_2 = 2 мин? Начальная температура воды t = 20 °С, температура кипения воды $t_к$ = 100 °С. Удельная теплота парообразования воды r = 2,3 МДж/кг, а ее удельная теплоёмкость c = 4,2 кДж/(кг·°С). Теплоемкостью чайника и потерями теплоты за счет рассеяния в окружающую среду можно пренебречь.

Решение. Количество теплоты, необходимое для того чтобы нагреть воду до температуры кипения, $Q_1 = cm_1\,(t_к - t)$, где $t_к$ температура кипения. Количество теплоты, требующееся для превращения воды массой Δm в пар, $Q_2 = r\Delta m$. Количество теплоты, полученное от плитки мощностью N за время τ, равно $N\tau$. Согласно уравнению теплового баланса имеем $N\tau_1 = cm_1\,(t_к - t)$, $N\tau_2 = r\Delta m$. Отсюда $\Delta m = \dfrac{cm_1(t_к - t)\tau_2}{r\tau_1}$ и $m_2 = m_1 - \Delta m = m_1\left(1 - \dfrac{c\tau_2(t_к - t)}{r\tau_1}\right)$.

Ответ: $m_2 = m_1 - \Delta m = m_1\left(1 - \dfrac{c\tau_2(t_к - t)}{r\tau_1}\right) \approx 0{,}95$ кг.

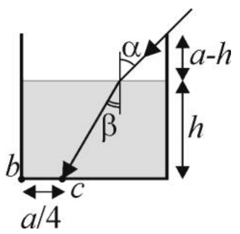
3. (25 баллов) Гальванометр с неизвестным внутренним сопротивлением включили в цепь источника постоянного тока один раз последовательно с резистором сопротивлением $R = 10$ Ом, а второй раз параллельно с ним. При этом в первый раз стрелка гальванометра отклонилась на $X_1 = 2$ деления шкалы, а во второй раз на $X_2 = 4$ деления. Определите по этим данным внутреннее сопротивление гальванометра r, если напряжение на клеммах источника в обоих случаях одно и то же.

Решение. Отклонения стрелки гальванометра X в обоих случаях пропорциональны силе тока I, протекающего по прибору. Применяя закон Ома для соответствующих однородных участков цепи, нетрудно найти, что $I_1 = \dfrac{U}{R+r}$, а $I_2 = \dfrac{U}{r}$, где U – напряжение на клеммах источника. Отношение этих показаний прибора равно $\dfrac{X_2}{X_1} = \dfrac{R+r}{r}$. Отсюда уже легко выразить искомую величину $r = \dfrac{X_1}{X_2 - X_1}R$. **Ответ:** $r = \dfrac{X_1}{X_2 - X_1}R = 10$ Ом.



4. (25 баллов) Непрозрачный сосуд имеет форму куба с длиной ребра $a = 50$ см. Внутрь сосуда параллельно одной из его боковых граней направляют луч света, как показано на рисунке. Луч попадает в точку b, находящуюся на ребре куба. До какого уровня h необходимо заполнить сосуд водой, чтобы луч света попал в точку c, расположенную на дне сосуда на расстоянии $a/4$ от точки b. Показатель преломления воды $n = 1{,}33$. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до целых.

Решение. Поскольку сосуд имеет форму куба, угол падения луча на поверхность воды $\alpha = 45°$. Для того чтобы луч попал в точку c, должно выполняться равенство $h \cdot \mathrm{tg}\beta + a - h = a - a/4$.



Отсюда $h = \dfrac{a}{4(1 - \mathrm{tg}\beta)}$. По закону преломления света: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$. Тогда $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{\sin\beta}{\sqrt{1 - \sin^2\beta}} = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}$. Следовательно, $h = \dfrac{a\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{4(\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \sin\alpha)}$.

Учитывая, что $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, получаем окончательно, что $h = \dfrac{a\sqrt{n^2 - 0{,}5}}{4\sqrt{n^2 - 0{,}5} - 2\sqrt{2}}$.

Ответ: $h = \dfrac{a\sqrt{n^2 - 0{,}5}}{4\sqrt{n^2 - 0{,}5} - 2\sqrt{2}} \approx 34$ см.