

№1 (20 баллов) Перед соревнованиями участникам раздали анкеты, в которых в одном из вопросов нужно было выбрать, каким из перечисленных языков программирования владеет респондент. После обработки ответов оказалось, что все участники знают хотя бы один из трех языков программирования – Си, Бейсик и Питон. Си знают 90% опрошенных, Бейсик – 80%, а Питон – 70%. Каким может быть процент опрошенных, знающих все три языка программирования?

А) Определите наименьший возможный процент.

Б) Определите наибольший возможный процент.

Ответ:

А) 40%;

Б) 70%;

Решение:

А) Количество обучающихся, которые не знают Си, равно $100\% - 90\% = 10\%$, тех, кто не знает Бейсик – 20%, тех, кто не знает Питон – 30%.

Соответственно, процент тех, кто не знает три языка программирования, не может превышать

$$10\% + 20\% + 30\% = 60\%$$

Значит, все три языка программирования знают, как минимум,

$$100\% - 60\% = 40\%$$

Б) Составим уравнение, воспользовавшись формулой включения-исключения для трех множеств:

Пусть $x\%$ обучающихся, которые знают ровно два языка программирования, тогда

$$|A| + |B| + |C| - x\% - 2 \times |A \cap B \cap C| = |A \cup B \cup C|$$

$$2 \times |A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - x\% - |A \cup B \cup C|$$

$$2 \times |A \cap B \cap C| \leq |A| + |B| + |C| - |A \cup B \cup C|$$

$$2 \times |A \cap B \cap C| \leq 90\% + 80\% + 70\% - 100\%$$

$$2 \times |A \cap B \cap C| \leq 140\%$$

$$|A \cap B \cap C| \leq 70\%$$

Значит, обучающихся, которые владеют всеми тремя языками программирования, может быть 70%.

Олимпиада Ломоносов по Робототехнике

Очный этап

10-11 классы В2

№	Критерии проверки	Баллы
Пункт А		
1	Приведено полностью верное решение	10
2	В логически верном решении содержится одна арифметическая ошибка	5
3	Дан верный ответ без решения (40%)	5
4	Участник не приступил к решению или же решение содержит более одной ошибки	0
Пункт Б		
5	Приведено полностью верное решение	10
6	В логически верном решении содержится одна арифметическая ошибка	5
7	Дан верный ответ без решения (70%)	5
8	Участник не приступил к решению или же решение содержит более одной ошибки	0

№2 (15 баллов) На одном острове живут только мудрецы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

Группа из 30 островитян встала в круг. Каждый из них говорит: «Человек слева от меня и человек справа от меня - лжецы».

Каково максимально возможное количество лжецов находится в кругу?

Ответ: 20

Решение:

Если каждый человек в кругу – лжец, то все утверждения верны, что невозможно. Поэтому должен быть хотя бы один мудрец.

Чтобы достичь максимального количества лжецов, мы должны, по крайней мере, поместить двух лжецов рядом друг с другом:

Л - Л

Но, тогда мудрецы с каждой стороны мы должны добавить по мудрецу:

М – Л – Л – М

Чтобы высказывания мудрецов были истинными, они должны быть окружены лжецами с обеих сторон:

Л – М – Л – Л – М – Л

Мы можем продолжить наши рассуждения дальше и получим, что между двумя мудрецами будут находиться два лжеца.

Л – Л – М – Л – Л – М – Л – Л – М – Л - ...

Следовательно, в группе из трех человек на одного мудреца будут приходиться два лжеца. Значит, в кругу может быть максимум 20 лжецов:

$$30 : 3 \times 2 = 20$$

№	Критерии проверки	Баллы
1	Приведено полностью верное решение	15
2	Приведено верное решение, но допущена одна арифметическая ошибка в вычислениях	8
3	Дан верный ответ без решения (20 лжецов)	5
4	Участник не приступил к решению или допустил более одной ошибки в решении	0

№3 (20 баллов) Робот находится на наклонной плоскости в точке В (см. *схему полигона*). Он должен попасть снарядом в цель, которая находится у основания наклонной плоскости в точке А. Расстояние АВ равно 5 м. Угол наклона плоскости к горизонту равен $\alpha = 30^\circ$, стрельба происходит под углом α к горизонту.

Сопротивлением воздуха пренебрегите. Ускорение свободного падения в расчетах примите $g \approx 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

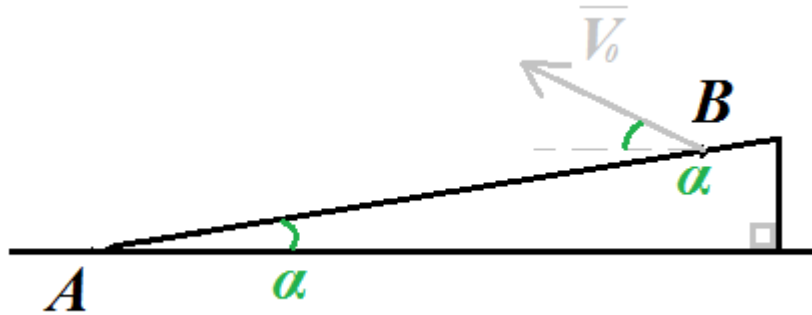


Схема полигона

А) Определите, чему должна быть равна начальная скорость снаряда V_0 , чтобы он приземлился в точке А?

Б) Определите время полета снаряда.

Ответ:

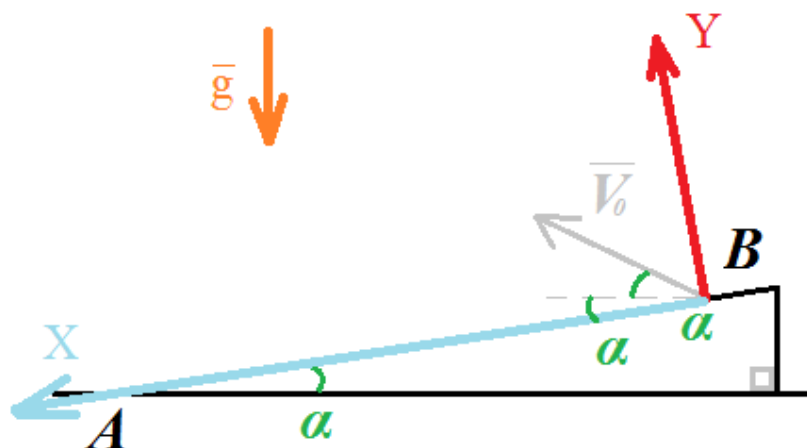
$$\text{А) } V_0 = \sqrt{\frac{Lg \cos(\alpha)}{2 \sin(2\alpha)}} = \sqrt{\frac{5 \times 10 \times \cos(30^\circ)}{2 \sin(60^\circ)}} = \sqrt{\frac{5 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{5 \times 10}{2}} = \sqrt{25} = 5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$\text{Б) } t = \sqrt{\frac{2L}{g} \times \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \sqrt{\frac{2 \times 5}{10} \times \frac{\sin 60^\circ}{\cos 30^\circ}} = \sqrt{\frac{2 \times 5}{10} \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{10}{10}} = 1 \text{ с}$$

Решение:

Выберем систему координат.

Удобно разместить начало отсчета в точке старта снаряда, ось ОУ направить перпендикулярно поверхности наклонной плоскости, а ось ОХ вдоль наклонной плоскости:



Запишем уравнение радиус-вектора снаряда:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}$$

Спроецируем данное уравнение на выбранные оси.

На ось ОХ:

$$x = 0 + V_0 t \cos(2\alpha) + \frac{g t^2 \sin \alpha}{2} \quad (1)$$

На ось ОУ:

$$y = 0 + V_0 t \sin(2\alpha) - \frac{g t^2 \cos \alpha}{2} \quad (2)$$

Чтобы определить время полета, приравняем уравнение координаты Y (2) к нулю:

$$V_0 t_{\pi} \sin(2\alpha) - \frac{g t_{\pi}^2 \cos \alpha}{2} = 0$$

Данное уравнение имеет два корня:

Значение $t_{\pi} = 0$ – это момент начала движения.

А время полета будет равно:

$$t_{\pi} = \frac{2V_0 \sin(2\alpha)}{g \cos \alpha} \quad (3)$$

Поскольку мы не знаем начальную скорость, но знаем дальность полета, то подставим выражение (3) в уравнение для координаты X и получим:

$$L = V_0 \left(\frac{2V_0 \sin(2\alpha)}{g \cos \alpha} \right) \cos(2\alpha) + \frac{g \sin \alpha}{2} \left(\frac{2V_0 \sin(2\alpha)}{g \cos \alpha} \right)^2$$

Из данного уравнения мы определим V_0 :

$$V_0 = \sqrt{\frac{Lg \cos(\alpha)}{2 \sin(2\alpha)}} \quad (4)$$

Теперь, подставив выражение для начальной скорости (4) в выражение для времени полета (3), можно найти выражение для времени полета снаряда:

$$t_{\pi} = \frac{2 \sin(2\alpha)}{g \cos \alpha} \sqrt{\frac{Lg \cos(\alpha)}{2 \sin(2\alpha)}}$$

Упростив данное выражение, получим:

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g} \times \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

Подсчитаем значения искомых величин:

$$V_0 = \sqrt{\frac{Lg \cos(\alpha)}{2 \sin(2\alpha)}} = \sqrt{\frac{5 \times 10 \times \cos(30^\circ)}{2 \sin(60^\circ)}} = \sqrt{\frac{5 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{5 \times 10}{2}} = \sqrt{25} = 5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g} \times \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \sqrt{\frac{2 \times 5}{10} \times \frac{\sin 60^\circ}{\cos 30^\circ}} = \sqrt{\frac{2 \times 5}{10} \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{10}{10}} = 1 \text{ с}$$

Олимпиада Ломоносов по Робототехнике

Очный этап

10-11 классы В2

№	Критерии проверки	Баллы
1	Приведено полностью верное решение	20 баллов
2.1	Верно записано уравнение изменения координаты X снаряда	+2 балла
2.2	Верно записано уравнение изменения координаты Y снаряда	+2 балла
2.3	Верно указано условие, при котором из уравнений для координат можно получить уравнение для определения время полета снаряда	+2 балла
2.4	Верно выражено время полета через начальную скорость снаряда $t_{\pi} = \frac{2V_0 \sin(2\alpha)}{g \cos \alpha}$	+2 балла
2.5	Верно определено выражение для подсчета начальной скорости снаряда $V_0 = \sqrt{\frac{Lg \cos(\alpha)}{2 \sin(2\alpha)}}$	+4 балла
2.6	Верно определено выражение для подсчета времени полета снаряда $t = \sqrt{\frac{2L}{g}} \times \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(\alpha)}$	+4 балла
2.7	Верно подсчитано значение начальной скорости ($5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$)	+2 балла
2.8	Верно посчитано значение времени полета снаряда (1 с)	+2 балла
2.9	В ходе верного логически решения была допущена одна ошибка	-2 балла
3	Дан верный ответ на пункт А без решения ($5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$)	5 баллов
4	Дан верный ответ на пункт Б без решения (1 с)	5 баллов
5	Участник не приступил к решению	0 баллов

№4 (15 баллов) Какова должна быть линейная скорость робота для того, чтобы он мог ехать по внутренней поверхности кругового цилиндра по горизонтальной окружности. Высота цилиндра равна H , диаметр цилиндра равен D , масса робота равна m , коэффициент трения между шинами робота и внутренней поверхностью цилиндра равен μ .

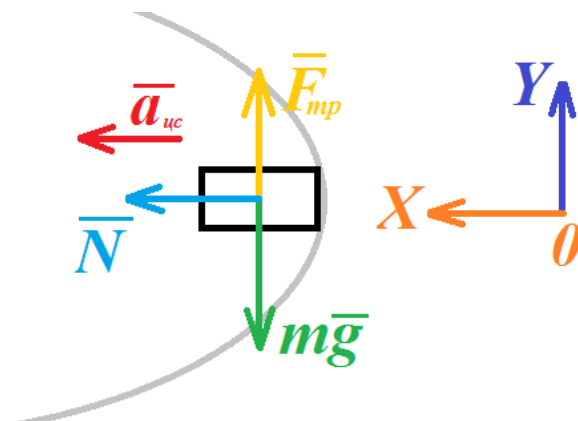
Ответ:

$$V \geq \sqrt{\frac{gD}{2\mu}}$$

Решение:

Найдем наименьшую линейную скорость, которая будет удовлетворять условию задачи, тогда ответом на вопрос задачи будет скорость, равная и выше найденного значения.

Сделаем рисунок



Запишем уравнение сил, действующих на робота:

$$\vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + m\vec{g} = m\vec{a}_{\text{цс}}$$

Спроецируем уравнение на оси координат.

$$OX: N + 0 + 0 = ma_{\text{цс}} \quad (1)$$

$$OY: 0 + F_{\text{тр}} - mg = 0 \quad (2)$$

Так как

$$F_{\text{тр}} = \mu N$$

то мы можем найти соотношение между ускорением свободного падения и центростремительным ускорением:

$$\mu a_{\text{цс}} = g \quad (3)$$

Так как

$$a_{\text{цс}} = \frac{V^2}{R} \quad (4) \quad \text{и} \quad R = \frac{D}{2} \quad (5)$$

Подставим (4) и (5) в выражение (3) и получим

$$\mu \frac{V^2}{\frac{D}{2}} = g$$

Выразим скорость робота

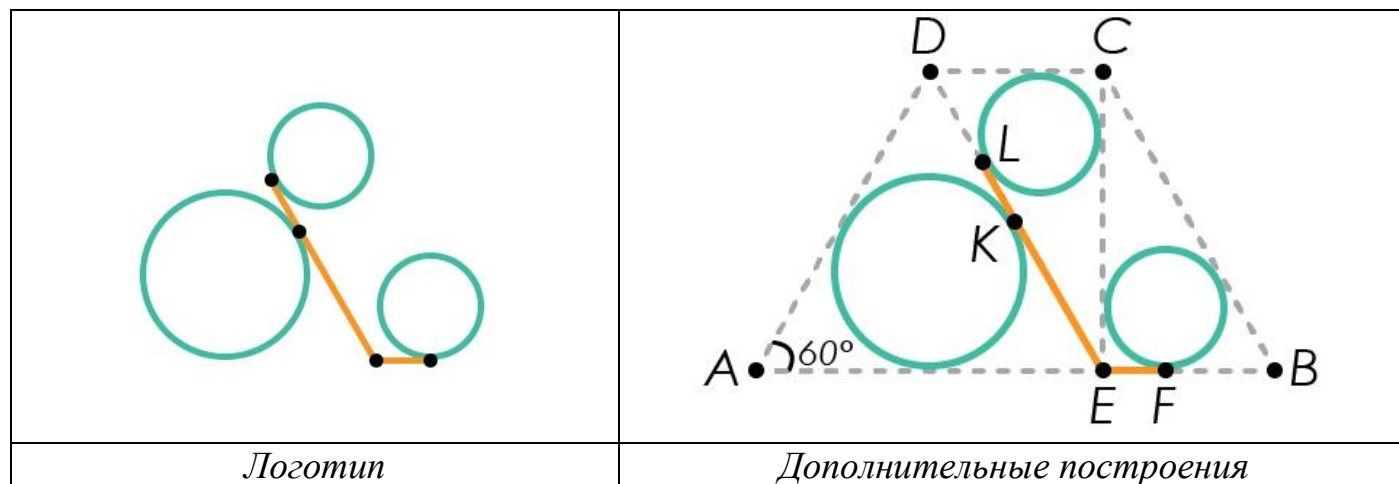
$$V = \sqrt{\frac{gD}{2\mu}}$$

Значит, искомая линейная скорость будет выше или равна найденной:

$$V \geq \sqrt{\frac{gD}{2\mu}}$$

№	Критерии проверки	Баллы
1	Приведено полностью верное решение	15 баллов
2.1	Верно сделан рисунок	+2 балла
2.2	Верно записано уравнение сил, действующих на робота $\vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + m\vec{g} = m\vec{a}_{\text{цс}}$	+2 балла
2.3	Верно спроецировано уравнение на ось ОХ	+2 балла
2.4	Верно спроецировано уравнение на ось ОУ	+2 балла
2.5	Верно указана связь силы трения и силы реакции опоры	+2 балла
2.6	Получено верное выражение для минимальной линейной скорости: $V = \sqrt{\frac{gD}{2\mu}}$	+3 балла
2.7	Верно указаны все решения: $V \geq \sqrt{\frac{gD}{2\mu}}$	+2 балла
3	Дан верный ответ без решения $V \geq \sqrt{\frac{gD}{2\mu}}$	5 баллов
4	Участник не приступил к решению	0 баллов

№5 (30 баллов) Робот движется по гладкой горизонтальной поверхности и наносит на нее изображение (см. *логотип*) при помощи кисти, закрепленной в центре колесной базы. Робот оснащен двумя отдельно управляемыми колесами, длина колесной базы составляет 40 см, диаметр колеса робота 10 см, максимальная скорость вращения моторов 2 об/с.



Робот должен изобразить фигуру, состоящую из трех окружностей и двух отрезков (см. *логотип*). Чтобы определить их положение, необходимо провести ряд вспомогательных построений.

Известно, что в трапеции $ABCD$ (см. *дополнительные построения*) с основаниями AB и CD ($AB > CD$), боковая сторона $AD = 4$ м, $\angle A = 60^\circ$. Из вершины D провели прямую, параллельную стороне CB , которая пересекла нижнее основание AB в точке E . Затем провели отрезок CE . В треугольники ADE , DCE и ECB вписаны окружности.

Точка F – это точка касания окружности, вписанной в треугольник BCE , стороны BE .

Точка K – это точка касания окружности, вписанной в треугольник ADE , стороны DE .

Точка L – это точка касания окружности, вписанной в треугольник DCE , стороны DE .

Известно, что в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, а также вокруг трапеции $ABCD$ можно описать окружность.

Из-за крепления кисти робот не может двигаться назад. Все развороты робот должен совершать на месте, то есть все развороты робота – танковые.

При расчетах примите $\pi \approx 3,14$.

А) Определите, чему равна длина самопересекающейся линии, с помощью которой можно начертить данный логотип. Ответ дайте в метрах.

Б) Определите, за какое минимальное время робот начертит данную фигуру. Ответ дайте в секундах.

Ответ:

$$A) \frac{LE + ED + 2\pi R + 2 \times 2\pi r}{\pi dw} = 2\sqrt{3} + 4\pi \frac{4\sqrt{3} - 3}{3} = 2\sqrt{3} + 4 \times 3,14 \times \frac{4\sqrt{3} - 3}{3} \approx 19,9 \text{ м}$$

$$B) \frac{LE + ED}{\pi dw} + \frac{\pi D_{\text{база}}}{\pi dw} \times \frac{60^\circ}{360^\circ} + \frac{2\pi(R + \frac{D_{\text{база}}}{2}) + 2 \times 2\pi(r + \frac{D_{\text{база}}}{2})}{\pi dw} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{0,628} + \frac{1}{3} + \frac{16\sqrt{3} - 8,4}{0,6} \approx 38 \text{ с}$$

№	Критерии проверки	Баллы
1	Приведено полностью верное решение	30
Пункт А		
2.1	Доказано, что трапеция ABCD – равнобедренная	+2 балла
2.2	Доказано, что треугольник ADE – равнобедренный	+2 балла
2.3	Доказано, что основание DC = 2 м	+2 балла
2.4	Подсчитана длина отрезка CE = 2√3 м	+2 балла
2.5	Верно подсчитан радиус большей окружности R = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ м	+2 балла
2.6	Верно посчитан радиус меньших окружностей r = √3 – 1 м	+2 балла
2.7	Верно определена длина отрезка EF = r = √3 – 1 м	+2 балла
2.8	Верно определена длина отрезка $LE = \frac{4 + 2\sqrt{3} - 2}{2} = 1 + \sqrt{3} \text{ м}$	+2 балла
2.9	Верно подсчитана длина самопересекающейся линии, с помощью которой можно начертить логотип: $L = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 + 2\pi \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 \times 2\pi(\sqrt{3} - 1) =$ $= 2\sqrt{3} + 4\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - 1 \right) = 2\sqrt{3} + 4\pi \frac{4\sqrt{3} - 3}{3} =$ $= 2\sqrt{3} + 4 \times 3,14 \times \frac{4\sqrt{3} - 3}{3} \approx 19,9 \text{ м}$	+2 балла
2.10	Приведено логически верное решение, но допущена одна ошибка в вычислениях	-2 балла
Пункт Б		
3.1	Правильно определена длина обода колеса $\pi d = \pi \times 0,1 = 3,14 \times 0,1 = 0,314 \text{ м} = 31,4 \text{ см}$	+1 балл
3.2	Правильно определена максимальная скорость движения робота $\pi dw = 0,314 \times 2 = 0,2\pi = 0,628 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 62,8 \frac{\text{см}}{\text{с}}$	+1 балл

3.3	Верно определено время проезда по прямым участкам: $\frac{LE + ED}{\pi dw} = \frac{2\sqrt{3}}{0,2\pi} = \frac{2\sqrt{3}}{0,628} \approx 5,52 \text{ с}$	+2 балла
3.4	Верно определен минимально необходимый угол поворота робота 60°	+1 балл
3.5	Верно определено время, необходимое для разворота робота на месте: $\frac{\pi D_{\text{база}}}{\pi dw} \times \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{D_{\text{база}}}{6dw} = \frac{0,4}{6 \times 0,1 \times 2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ с}$	+2 балла
3.6	Верно определено время, которое робот потратит на проезд по дугам окружностей: $\frac{2\pi(R + \frac{D_{\text{база}}}{2}) + 2 \times 2\pi(r \frac{D_{\text{база}}}{2})}{\pi dw} = \frac{2R + 4r + 3D_{\text{база}}}{dw} =$ $= \frac{2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} + 4 \times (\sqrt{3} - 1) + 3 \times 0,4}{0,1 \times 2} =$ $= \frac{4\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 12 + 3,6}{0,6} = \frac{16\sqrt{3} - 8,4}{0,6} \approx 32,19 \text{ с}$	+3 балла
3.7	Правильно определено минимальное время, за которое робот начертит данную фигуру (38 с) $\frac{LE + ED}{\pi dw} + \frac{\pi D_{\text{база}}}{\pi dw} \times \frac{60^\circ}{360^\circ} + \frac{2\pi(R + \frac{D_{\text{база}}}{2}) + 2 \times 2\pi(r + \frac{D_{\text{база}}}{2})}{\pi dw} =$ $= \frac{2\sqrt{3}}{0,628} + \frac{1}{3} + \frac{16\sqrt{3} - 8,4}{0,6} \approx 38 \text{ с}$	+2 балла
3.8	В ходе логически верного решения была допущена одна арифметическая ошибка	-2 балла
4	Приведено логически верное решение для не оптимального варианта прохождения трассы	25
5	Дан верный ответ на пункт А без решения (≈19,9 м)	5
6	Дан верный ответ на пункт Б без решения (38 с)	5
7	Участник не приступил к решению	0