

**Олимпиада школьников «Ломоносов»
по механике и математическому моделированию**

Задания заключительного этапа 2019/2020 учебного года для 7 – 8 классов

Вариант 2020-7-8

1. Велосипед, мотоцикл и автомобиль стартовали одновременно в одной точке круговой трассы и поехали в одном направлении. Закончили движение они в тот момент, когда впервые после старта опять оказались в одном и том же месте трассы. За это время автомобиль обогнал велосипедиста 15 раз. Сколько всего было обгонов за это время, если мотоцикл медленнее автомобиля, но быстрее велосипеда?
2. Гаврила прошёл с постоянной скоростью вдоль всей границы парка, имеющего форму невыпуклого восьмиугольника $ABCDEFGH$, за 34 минуты. Он стартовал в точке A , затем последовательно прошёл через точки B, C, D, E, F, G, H и вернулся в точку A . При этом в точках B, C, F, G, H он делал поворот на 90° направо, а в точках D и E – поворот на 90° налево. За какое время он прошёл сторону AB , если на участок EF он затратил 5 минут, а на участок HA – 8 минут?
3. Деталь состоит из двух, одинаковых по массе частей. Плотность одной части равна $2/3$ плотности другой. Глафира взвесила деталь, разделила массу на объём и получила результат 486 кг/м^3 . Можно ли найти плотности обеих частей детали? Если можно, найдите их, если нельзя – обоснуйте невозможность.
4. Гавриле для проведения эксперимента нужно нагреть $V = 1,25 \text{ л}$ жидкости с удельной теплоёмкостью $c = 1000 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ до температуры t в промежутке от 80°C до 90°C . Плотность жидкости $\rho = 0,8 \text{ г/см}^3$. Сможет ли Гаврила определить температуру нагретой жидкости с точностью до $0,5^\circ\text{C}$, если при лабораторной температуре $t_0 = 20^\circ\text{C}$ он будет использовать термометр, теплоёмкость которого равна $C = 10 \text{ Дж/кг}$?
5. Белый медведь вышел из точки A , прошёл 3 км на север, потом 3 км на восток, потом 3 км на юг и оказался снова в точке A . Другой белый медведь вышел из точки B , прошёл 5 км на север, потом 5 км на запад, потом 5 км на юг и оказался снова в точке B .
Найдите максимально возможное расстояние между точками A и B , если допустить, что Земля имеет форму шара радиусом 6370 км и что описанные события произошли севернее экватора.

29 февраля 2020 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов»
по механике и математическому моделированию
Задания заключительного этапа 2019/2020 учебного года для 9 классов

Вариант 2020-9

1. Велосипед, мотоцикл и автомобиль стартовали одновременно в одной точке круговой трассы и поехали в одном направлении. Закончили движение они в тот момент, когда впервые после старта опять оказались в одном и том же месте трассы. За это время автомобиль обогнал велосипедиста 15 раз. Сколько всего было обгонов за это время, если мотоцикл медленнее автомобиля, но быстрее велосипеда?
2. Гаврила прошёл с постоянной скоростью вдоль всей границы парка, имеющего форму невыпуклого восьмиугольника $ABCDEFGH$, за 34 минуты. Он стартовал в точке A , затем последовательно прошёл через точки B, C, D, E, F, G, H и вернулся в точку A . При этом в точках B, C, F, G, H он делал поворот на 90° направо, а в точках D и E – поворот на 90° налево. За какое время он прошёл сторону AB , если на участок EF он затратил 5 минут, а на участок HA – 8 минут?
3. Деталь состоит из двух, одинаковых по массе частей. Плотность одной части равна $\frac{2}{3}$ плотности другой. Глафира взвесила деталь, разделила массу на объём и получила результат 486 кг/м^3 . Можно ли найти плотности обеих частей детали? Если можно, найдите их, если нельзя – обоснуйте невозможность.
4. Два шарика одинакового радиуса сброшены вертикально вниз без начальной скорости с башни высотой 100 м. За то время, которое требовалось бы каждому из них, чтобы достичь поверхности при отсутствии атмосферы, первый пролетел только 50 м, а второй – 25 м. Найдите отношение массы первого шарика к массе второго, считая силу сопротивления движению постоянной величиной.
5. Гавриле для проведения эксперимента нужно нагреть $V = 1,25$ л жидкости с удельной теплоёмкостью $c = 1000 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ до температуры t в промежутке от 80°C до 90°C . Плотность жидкости $\rho = 0,8 \text{ г/см}^3$. Сможет ли Гаврила определить температуру нагретой жидкости с точностью до $0,5^\circ\text{C}$, если при лабораторной температуре $t_0 = 20^\circ\text{C}$ он будет использовать термометр, теплоёмкость которого равна $C = 10 \text{ Дж/кг}$?
6. Белый медведь вышел из точки A , прошёл 3 км на север, потом 3 км на восток, потом 3 км на юг и оказался снова в точке A . Другой белый медведь вышел из точки B , прошёл 5 км на север, потом 5 км на запад, потом 5 км на юг и оказался снова в точке B . Найдите максимально возможное расстояние между точками A и B , если допустить, что Земля имеет форму шара радиусом 6370 км и что описанные события произошли севернее экватора.

29 февраля 2020 г.

Система оценок задач:

Каждая задача оценивается в 20 баллов. Оценка 20 баллов ставится за правильное и полное решение задачи и правильный ответ.

За решение с различными недочетами (недостатки обоснования, неточности и т. д.) ставится 15 баллов. В некоторых задачах ставились также оценки 5 и 10 баллов за частичное продвижение в решении.

Ответы и решения

1. Ответ: 29. Решение. Пусть мотоцикл проехал на M кругов больше, чем велосипедист, а автомобиль – на A кругов больше велосипедиста. Заметим при этом, что путь велосипедиста не обязан равняться целому числу кругов, но разности путей должны быть целыми.

Тогда мотоцикл обогнал велосипедиста $(M - 1)$ раз, автомобиль обогнал мотоциклиста $(A - M - 1)$ раз, автомобиль обогнал велосипедиста $(A - 1)$ раз. И всего обгонов будет

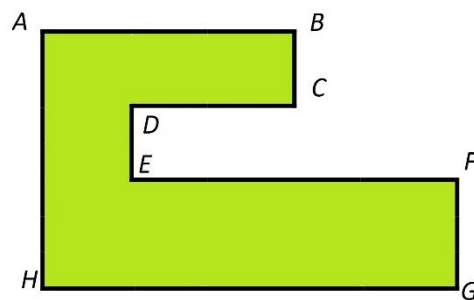
$M - 1 + A - M - 1 + A - 1 = 2A - 3$. При этом по условию $A - 1 = 15$, то есть $A = 16$. Значит, всего обгонов будет $2 \cdot 16 - 3 = 29$.

2. Ответ: 4 минуты. Решение. Получается восьмиугольник, имеющий форму, показанную на рисунке.

По условию, время прохождения отрезка AH равно 8, время прохождения отрезка EF равно 5. Пусть искомое время прохождения отрезка AB равно x , время прохождения отрезка DC равно y . Тогда $HG = 5 + x - y$. Кроме того, $BC + DE + FG = AH = 8$.

Тогда периметр парка равен

$$AB + DC + EF + HG + AH + (BC + DE + FG).$$



Так как скорость движения Гаврилы постоянная, то после деления на скорость получается уравнение для соответствующих времен:

$$34 = x + y + 5 + (5 + x - y) + 8 + 8 \Leftrightarrow 34 = 2x + 26 \Leftrightarrow x = 4.$$

3. Ответ: 405 кг/м^3 и $607,5 \text{ кг/м}^3$. Решение. Обозначим одинаковые массы частей через m , плотности через 2ρ и 3ρ . Тогда первая часть имеет объем $\frac{m}{2\rho}$, а вторая — $\frac{m}{3\rho}$. Значит, масса бруска равна $2m$, а объем равен $\frac{m}{2\rho} + \frac{m}{3\rho} = \frac{5m}{6\rho}$.

Получаем уравнение $\frac{2m \cdot 6\rho}{5m} = 486$, откуда $\rho = 486 \cdot \frac{5}{2 \cdot 6} = \frac{405}{2}$.

Значит, плотности частей равны 405 кг/м^3 и $607,5 \text{ кг/м}^3$ соответственно.

4. Ответ: 3 : 2. Решение. Из второго закона Ньютона:
$$\begin{cases} m_1 a_1 = m_1 g - F, \\ m_2 a_2 = m_2 g - F. \end{cases}$$

Так как $a_1 = \frac{1}{2}g$, $a_2 = \frac{1}{4}g$, то
$$\begin{cases} F = \frac{m_1 g}{2}, \\ F = \frac{3m_2 g}{4}, \end{cases} \text{ то есть } \frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{2}.$$

5. Ответ: не сможет. Решение. Запишем уравнение баланса тепла: $cV\rho(t - t_1) = C(t_1 - t_0)$. Здесь t_1 — температура жидкости, которая установится в жидкости, после опускания в нее термометра. Обозначим $k = \frac{C}{cV\rho} = 0,01$ и выразим разность температур:

$$(t - t_1) = \frac{k(t - t_0)}{k + 1}, \text{ где } 80^\circ\text{C} \leq t \leq 90^\circ\text{C}.$$

Чем больше разность $(t - t_0)$, тем больше погрешность измерения. Максимальная ошибка составит

$$(t - t_1) = \frac{0,01(90 - 20)}{1,01} \approx 0,7^\circ\text{C}.$$

Поэтому делаем вывод о том, что измерить температуру с точностью до $0,5^\circ\text{C}$ Гаврила не сможет.

6. Ответ: $8 + \frac{4}{\pi} \approx 9,3 \text{ км}$.

Решение. Возможная точка старта на Южном полюсе отвергается последним условием. Также невозможно стартовать на 3 км (или соответственно на 5 км) южнее Северного полюса, так как на полюсе движение на восток или запад невозможно.

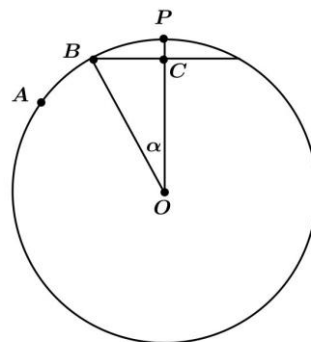
Единственная возможность для первого медведя: стартовать чуть дальше, чем за 3 км до Северного полюса, затем совершить один или несколько полных кругов вокруг полюса суммарной длиной 3 км и вернуться в исходную точку. Если делается ровно n кругов, то $n \cdot 2\pi r = 3$, то есть радиус

круга равен $r = \frac{3}{2\pi n}$. При этом (см. рисунок) $BC = r$, $AB = 3$.

Получается $\sin \alpha = \frac{r}{R}$, где R – радиус Земли. Значит, расстояние

от окружности до полюса BP равно $R\alpha = R \cdot \arcsin\left(\frac{r}{R}\right)$. Тогда

расстояние от точки A до полюса равно $3 + R \cdot \arcsin\left(\frac{3}{2\pi n R}\right)$.



Аналогично точка старта второго медведя находится от Северного полюса на расстоянии

$5 + R \cdot \arcsin\left(\frac{5}{2\pi k R}\right)$ (где k – количество кругов).

Расстояние AB будем максимальным, если медведи приходят к полюсу с разных сторон и при этом

$n = k = 1$. Тогда

$$AB = 3 + R \cdot \arcsin\left(\frac{3}{2\pi R}\right) + 5 + R \cdot \arcsin\left(\frac{5}{2\pi R}\right) = 8 + R \cdot \left(\arcsin\left(\frac{3}{2\pi R}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{2\pi R}\right) \right).$$

Так как при малых α имеет место равенство $\sin \alpha \approx \alpha$, то получаем приближенное значение

$$AB \approx 8 + R \cdot \left(\frac{3}{2\pi R} + \frac{5}{2\pi R} \right) \approx 8 + \frac{4}{\pi} \approx 9,3 \text{ км.}$$

Заметим, что здесь $\sin \alpha$ имеет порядок $\frac{2}{\pi R} < 10^{-4}$. Поэтому данная оценка оказывается очень точ-

ной. Ошибка составляет гораздо менее миллиметра.

Для школьников 7-9 классов оценка точности не требуется.