

2№1(20 баллов) В 10 классе «А» все обучающиеся знают хотя бы один из трех языков программирования – Си, Паскаль и Питон. Си знают 80% обучающихся, Паскаль – 70%, а Питон – 60%. Каким может быть процент обучающихся, знающих все три языка программирования?

А) Определите наименьший возможный процент обучающихся.

Б) Определите наибольший возможный процент обучающихся.

Ответ:

А) 10%;

Б) 55%;

Решение:

А) Количество обучающихся, которые не знают Си равно $100\% - 80\% = 20\%$, тех, кто не знает Паскаль – 30%, тех, кто не знает Питон – 40%.

Соответственно тех, кто не знает три языка программирования не может превышать

$$20\% + 30\% + 40\% = 90\%$$

Значит, все три языка программирования знают как минимум

$$100\% - 90\% = 10\%$$

Б) Составим уравнение, воспользовавшись формулой включения-исключения для трех множеств:

Пусть $x\%$ обучающихся, которые знают ровно два языка программирования, тогда

$$|A| + |B| + |C| - x\% - 2 \times |A \cap B \cap C| = |A \cup B \cup C|$$

$$2 \times |A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - x\% - |A \cup B \cup C|$$

$$2 \times |A \cap B \cap C| \leq |A| + |B| + |C| - |A \cup B \cup C|$$

$$2 \times |A \cap B \cap C| \leq 80\% + 70\% + 60\% - 100\%$$

$$2 \times |A \cap B \cap C| \leq 110\%$$

$$|A \cap B \cap C| \leq 55\%$$

Значит, обучающихся, которые владеют всеми тремя языками программирования может быть 55%.

Олимпиада Ломоносов по Робототехнике

Очный этап

10-11 классы

№	Критерии проверки	Баллы
Пункт А		
1	Приведено полностью верное решение	10
2	В логически верном решении содержится одна арифметическая ошибка	5
3	Дан верный ответ без решения (10%)	5
4	Участник не приступил к решению или же решение содержит более одной ошибки	
Пункт Б		
5	Приведено полностью верное решение	10
6	В логически верном решении содержится одна арифметическая ошибка	5
7	Дан верный ответ без решения (55%)	5
8	Участник не приступил к решению или же решение содержит более одной ошибки	0

№2 (15 баллов) На одном острове живут только мудрецы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

Группа из 30 островитян встала в круг. Каждый из них говорит: «Двое ближайших слева от меня и двое ближайших справа от меня - лжецы».

Каково максимально возможное количество лжецов находится в кругу?

Ответ: 24

Решение:

Если каждый человек в кругу – лжец, то все утверждения верны, что невозможно. Поэтому должен быть хотя бы один мудрец.

Этот мудрец должен быть окружен двумя лжецами с каждой стороны:

Л - Л - М - Л - Л

Поскольку мы пытаемся разместить как можно больше лжецов, то сколько лжецов может поместиться с обеих сторон? Если мы добавим еще троих, то получим лжеца, который выскажет истинное утверждение. А это невозможно.

Значит, реализуется следующий вариант – два лжеца, а затем мы должны поставить одного мудреца:

Л - Л - М - Л - Л - Л - Л - М

Затем за мудрецом должны следовать два лжеца:

Л - Л - М - Л - Л - Л - Л - М - Л - Л

Таким образом, шаблон Л - Л - М - Л - Л будет повторяться через каждые пятерых островитян. Значит, 4 из 5 человек могут быть лжецами. Это дает нам максимум

$$30 : 5 \times 4 = 6 \times 4 = 24 \text{ лжеца}$$

№	Критерии проверки	Баллы
1	Приведено полностью верное решение	15
2	Приведено верное решение, но допущена одна арифметическая ошибка в вычислениях	8
3	Дан верный ответ без решения (24 лжеца)	5
4	Участник не приступил к решению или допустил более одной ошибки в решении	0

№3 (20 баллов) Робот находится у основания наклонной плоскости в точке А (см. *схема полигона*). Он должен попасть снарядом в цель, которая находится на наклонной плоскости в точке В. Расстояние $AB = 5$ м. Угол наклона плоскости к горизонту равен $\beta = 30^\circ$, стрельба происходит под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту.

Сопротивлением воздуха пренебрегите. Ускорение свободного падения в расчетах примите $g \approx 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

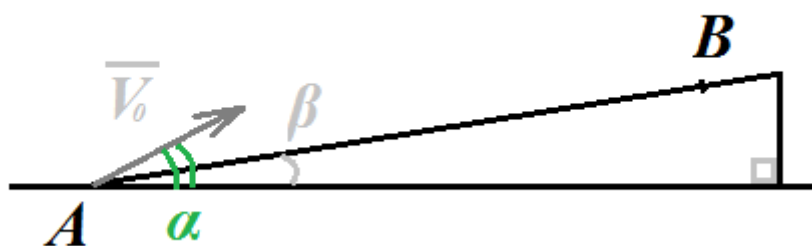


Схема полигона

А) Определите, чему должна быть равна начальная скорость снарядов V_0 , чтобы они приземлялись в точке В?

Б) Определите время полета снаряда.

Ответ:

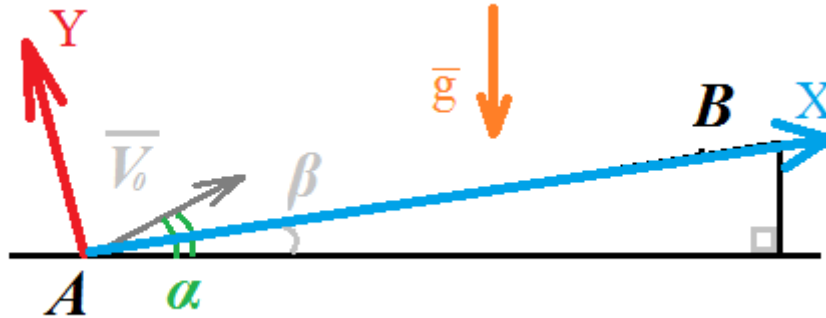
$$\begin{aligned} \text{А) } V_0 &= \sqrt{\frac{L g \cos^2 \beta}{2 \sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha)}} = \sqrt{\frac{5 \times 10 \times \cos^2 30^\circ}{2 \sin(60^\circ - 30^\circ) \cos(60^\circ)}} = \sqrt{\frac{5 \times 10 \times \frac{3}{4}}{2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{5 \times 10 \times 3}{2}} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \approx 8,66 \frac{\text{м}}{\text{с}} \end{aligned}$$

$$\text{Б) } t = \sqrt{\frac{2L \sin(\alpha - \beta)}{g \cos(\alpha)}} = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times \sin 30^\circ}{10 \times \cos 60^\circ}} = \sqrt{\frac{10 \times \frac{1}{2}}{10 \times \frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{10}{10}} = 1 \text{ с}$$

Решение:

Выберем систему координат.

Удобно разместить начало отсчета в точке старта снаряда, ос OY направить перпендикулярно поверхности наклонной плоскости, а ос OX вдоль наклонной плоскости:



Запишем уравнение радиус-вектора снаряда:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}$$

Спроецируем данное уравнение на выбранные оси.

На ось OX :

$$x = 0 + V_0 t \cos(\alpha - \beta) - \frac{g t^2 \sin \beta}{2} \quad (1)$$

На ось OY :

$$y = 0 + V_0 t \sin(\alpha - \beta) - \frac{g t^2 \cos \beta}{2} \quad (2)$$

Чтобы определить время полета, приравняем уравнение координаты Y (2) к нулю:

$$V_0 t_{\pi} \sin(\alpha - \beta) - \frac{g t_{\pi}^2 \cos \beta}{2} = 0$$

Данное уравнение имеет два корня:

Значение $t_{\pi} = 0$ – это момент начала движения.

А время полета будет равно:

$$t_{\pi} = \frac{2V_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta} \quad (3)$$

Поскольку мы не знаем начальную скорость, но знаем дальность полета, то подставим выражение (3) в уравнение для координаты X и получим:

$$L = V_0 \left(\frac{2V_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta} \right) \cos(\alpha - \beta) - \frac{g \sin \beta}{2} \left(\frac{2V_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta} \right)^2$$

Из данного уравнения мы определим V_0 :

$$V_0 = \sqrt{\frac{L g \cos^2 \beta}{2 \sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha)}} \quad (4)$$

Теперь, подставив выражение для начальной скорости (4) в выражение для времени полета (3), можно найти выражение для времени полета снаряда:

$$t_{\text{п}} = \frac{2 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta} \sqrt{\frac{L g \cos^2 \beta}{2 \sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha)}}$$

Упростив данное выражение, получим:

$$t = \sqrt{\frac{2L \sin(\alpha - \beta)}{g \cos(\alpha)}}$$

Подсчитаем значения искомых величин:

$$\begin{aligned} V_0 &= \sqrt{\frac{L g \cos^2 \beta}{2 \sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha)}} = \sqrt{\frac{5 \times 10 \times \cos^2 30^\circ}{2 \sin(60^\circ - 30^\circ) \cos(60^\circ)}} = \sqrt{\frac{5 \times 10 \times \frac{3}{4}}{2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{5 \times 10 \times 3}{2}} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \approx 8,66 \frac{\text{м}}{\text{с}} \end{aligned}$$

$$t = \sqrt{\frac{2L \sin(\alpha - \beta)}{g \cos(\alpha)}} = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times \sin 30^\circ}{10 \times \cos 60^\circ}} = \sqrt{\frac{10 \times \frac{1}{2}}{10 \times \frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{10}{10}} = 1 \text{ с}$$

Олимпиада Ломоносов по Робототехнике

Очный этап

10-11 классы

№	Критерии проверки	Баллы
1	Приведено полностью верное решение	20 баллов
2.1	Верно записано уравнение изменения координаты X снаряда	+2 балла
2.2	Верно записано уравнение изменения координаты Y снаряда	+2 балла
2.3	Верно указано условие, при котором из уравнений для координат можно получить уравнение для определения время полета снаряда	+2 балла
2.4	Верно выражено время полета через начальную скорость снаряда $t_{\pi} = \frac{2V_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta}$	+2 балла
2.5	Верно определено выражение для подсчета начальной скорости снаряда $V_0 = \sqrt{\frac{L g \cos^2 \beta}{2 \sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha)}}$	+4 балла
2.6	Верно определено выражение для подсчета времени полета снаряда $t = \sqrt{\frac{2L \sin(\alpha - \beta)}{g \cos(\alpha)}}$	+4 балла
2.7	Верно подсчитано значение начальной скорости ($\approx 8,66 \frac{\text{м}}{\text{с}}$)	+2 балла
2.8	Верно посчитано значение времени полета снаряда (1 с)	+2 балла
2.9	В ходе верного логически решения была допущена одна ошибка	-2 балла
3	Дан верный ответ на пункт А без решения ($\approx 8,66 \frac{\text{м}}{\text{с}}$)	5 баллов
4	Дан верный ответ на пункт Б без решения (1 с)	5 баллов
5	Участник не приступил к решению	0 баллов

№4 (15 баллов) Абсолютно твёрдый стержень длиной R может вращаться вокруг проходящей через один из его концов вертикальной оси. В оси вращения к стержню приложены силы, препятствующие его вращению. Момент этих сил относительно вертикальной оси $Q=const$. Стержень не имеет массы, но на его другом конце крепится материальная точка массы m . В начальный момент времени стержень покоится. Ударив по материальной точке молоточком, можно мгновенно, не сдвинув стержень с места, придать ему угловую скорость ω . Какова должна быть эта скорость ω , чтобы стержень после удара совершил не менее n оборотов вокруг своей оси?

Ответ:

$$\omega \geq \frac{2}{R} \sqrt{\frac{\pi n Q}{m}}$$

Решение:

Кинетическая энергия стержня после удара по нему молоточком равна

$$T = \frac{1}{2} m (\omega R)^2 \quad (1)$$

Работа A момента Q сил сопротивления вращению стержня за n его оборотов вокруг своей оси равна

$$A = 2\pi n Q \quad (2)$$

Условие, при котором стержень совершит не менее n оборотов вокруг своей оси, имеет вид:

$$T \geq A$$

Подставим в данное неравенства выражения (1) и (2):

$$\frac{1}{2} m (\omega R)^2 \geq 2\pi n Q$$

Выразим из данного неравенства угловую скорость:

$$(\omega R)^2 \geq \frac{4\pi n Q}{m}$$

$$\omega \geq \frac{2}{R} \sqrt{\frac{\pi n Q}{m}}$$

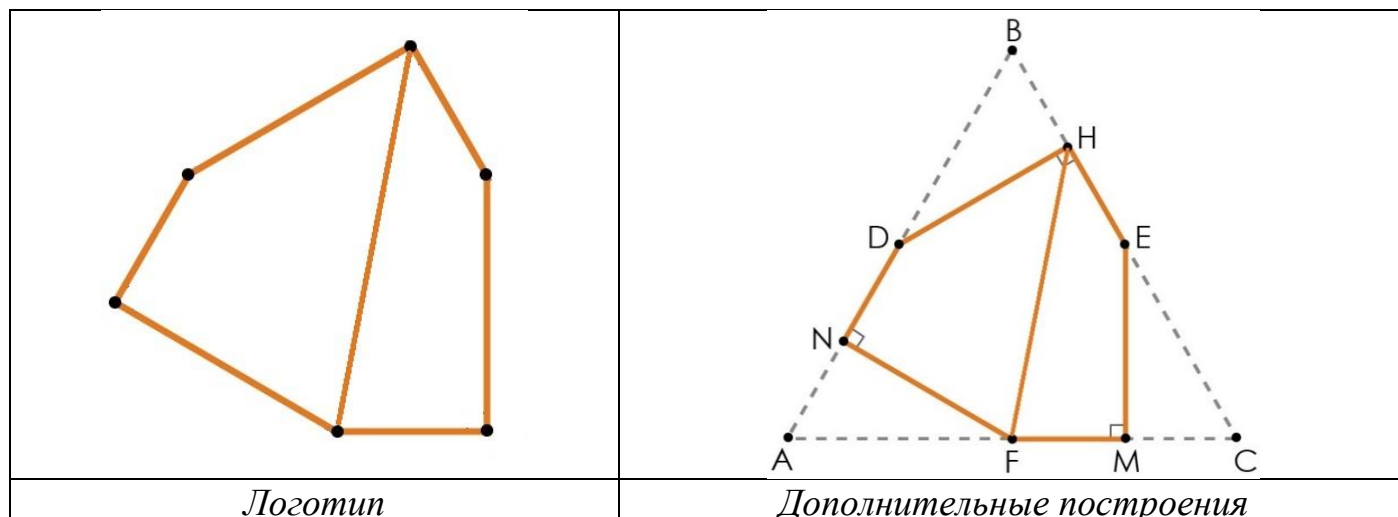
Олимпиада Ломоносов по Робототехнике

Очный этап

10-11 классы

№	Критерии проверки	Баллы
1	Приведено полностью верное решение	15 баллов
2.1	Правильно определена кинетическая энергия стержня после удара $T = \frac{1}{2} m(\omega R)^2$	+3 балл
2.2	Правильно определена работа A момента Q сил сопротивления вращению стержня за n его оборотов вокруг своей оси равна $A = 2\pi nQ$	+4 балл
2.3	Правильно определено условие, при котором стержень совершит не менее n оборотов вокруг своей оси, имеет вид: $T \geq A$	+3 балла
2.4	Получено верное выражение для угловой скорости: $\omega \geq \frac{2}{R} \sqrt{\frac{\pi n Q}{m}}$	+5 баллов
3	Дан верный ответ без решения $\omega \geq \frac{2}{R} \sqrt{\frac{\pi n Q}{m}}$	5 баллов
4	Участник не приступил к решению	0 баллов

№5 (30 баллов) Робот движется по гладкой горизонтальной поверхности и наносит на нее изображение (см. *логотип*) при помощи кисти, закрепленной в центре колесной базы. Робот оснащен двумя отдельно управляемыми колесами, расстояние между центрами колес составляет 50 см, диаметр каждого из двух колес равен 10 см, максимальная скорость вращения моторов 2 об/с.



Робот должен изобразить фигуру, состоящую из семи отрезков (см. *логотип*). Чтобы определить их положение, необходимо провести ряд вспомогательных построений.

Известно, что в правильный треугольник ABC (см. *дополнительные построения*) $AB = 4$ м. D – середина стороны AB, E – середина BC, F – середина AC. Из точки D на сторону BC опустили перпендикуляр DH. Из точки E на сторону AC опустили перпендикуляр EM. Из точки F на сторону AB опустили перпендикуляр FN. В образовавшемся шестиугольнике проведена диагональ HF.

Робот стартует из точки H. Из-за крепления кисти робот не может двигаться назад. Все развороты робот должен совершать на месте, то есть все развороты робота – танковые.

При расчетах примите $\pi \approx 3,14$.

А) Определите, чему равна длина траектории. Ответ дайте в метрах.

Б) Определите, за какое минимальное время робот начертит данную фигуру. Ответ дайте в секундах.

Ответ:

А) $L = 3 + 3\sqrt{3} + \sqrt{7} \approx 10,84$ м

Б) $t = \frac{3 + 3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{3,14 \times 0,1 \times 2} + \frac{(90^\circ + 30^\circ) \times 2 + 131^\circ + 30^\circ}{360^\circ} \times \frac{3,14 \times 0,5}{3,14 \times 0,1 \times 2} \approx 20$ с

Олимпиада Ломоносов по Робототехнике

Очный этап

10-11 классы

№	Критерии проверки	Баллы
1	Приведено полностью верное решение	30
Пункт А		
2.1	Доказано, что углы $\angle NFA = \angle BDH = \angle MEC = 30^\circ$	+2 балла
2.2	Верно вычислены длины отрезков $DN = HE = MF = 1 \text{ м}$	+2 балла
2.3	Верно определены длины отрезков $DH = EM = NF = \sqrt{3} \text{ м}$	+2 балла
2.4	Верно определена длина отрезка $HF = \sqrt{7} \text{ м}$	+3 балла
2.5	Верно определена длина траектории $L = 3 + 3\sqrt{3} + \sqrt{7} \approx 10,84 \text{ м}$	+2 балла
2.6	Приведено логически верное решение, но допущена одна ошибка в вычислениях	-2 балла
Пункт Б		
3.1	Правильно определена длина обода колеса $\pi d = \pi \times 0,1 = 3,14 \times 0,1 = 0,314 \text{ м} = 31,4 \text{ см}$	+1 балл
3.2	Правильно определена максимальная скорость движения робота $\pi dw = 0,314 \times 2 = 0,2\pi = 0,628 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 62,8 \frac{\text{см}}{\text{с}}$	+1 балл
3.3	Верно определены углы $\angle FHC$ и $\angle HFC$: Из треугольника FHC $\frac{HF}{\sin \angle HCF} = \frac{FC}{\sin \angle FHC} = \frac{HC}{\sin \angle HFC}$ $\sin \angle FHC = \frac{FC}{HF} \times \sin \angle HCF = \frac{2}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{7}}$ $\angle FHC = \arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right) \approx 41^\circ$ $\angle HFC = 180^\circ - (60^\circ + 41^\circ) = 79^\circ$	+5 баллов
3.4	Верно определены углы $\angle DHF$ и $\angle NFH$: $\angle DHF = 180^\circ - (90^\circ + 41^\circ) = 49^\circ$ $\angle NFH = 180^\circ - (30^\circ + 79^\circ) = 71^\circ$	+3 балла
3.5	При расчете суммарного угла поворота робота, участник использует не величины углов многоугольника, а величины углов, дополняющих углы многоугольника до 180°	+3 балла
3.6	Верно определен минимально необходимый суммарный угол поворота робота $(90^\circ + 30^\circ) \times 2 + 131^\circ + 30^\circ = 401^\circ$	+3 балла

Олимпиада Ломоносов по Робототехнике

Очный этап

10-11 классы

3.7	Верно определено время, которое робот потратит, чтобы проехать по линиям трассы $\frac{3 + 3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{3,14 \times 0,1 \times 2} \approx 17,26 \text{ с}$	+1 балл
3.8	Верно определено время, которое робот потратит на развороты $\frac{(90^\circ + 30^\circ) \times 2 + 131^\circ + 30^\circ}{360^\circ} \times \frac{3,14 \times 0,5}{3,14 \times 0,1 \times 2} \approx 2,78 \text{ с}$	+1 балл
3.9	Правильно определено минимальное время, за которое робот начертит данную фигуру (20 с)	+1 балл
3.10	В ходе логически верного решения была допущена одна арифметическая ошибка	-2 балла
4	Приведено логически верное решение для не оптимального варианта прохождения трассы	25
5	Дан верный ответ на пункт А без решения (≈10,84 м)	5
6	Дан верный ответ на пункт Б без решения (20 с)	5
7	Участник не приступил к решению	0