

Олимпиада Ломоносов 2020-2021 учебный год

Робототехника. Заочный этап

10-11 класс

Задача 1. (10 баллов)

Робот едет по прямолинейной трассе. Первую половину времени он ехал со скоростью 1,2 м/мин, а вторую – со скоростью в 3 см/с. Длина третьей части трассы равна 6 метрам. Определите, за какое время робот проехал первую половину трассы. Ответ дайте в минутах. В ответ запишите только число.

Ответ: 7

Решение:

Определим, чему равна длина всей трассы:

$$6 \text{ м} = 600 \text{ см}$$

$$600 \times 3 = 1800 \text{ (см)}$$

Для удобства переведем скорость из метров в минуту в сантиметры в секунду:

$$1,2 \text{ м/мин} = 1,2 \times 100 : 60 = 2 \text{ см/с}$$

Составим уравнение движения, обозначив за x половину времени движения робота:

$$2x + 3x = 1800$$

$$5x = 1800$$

$$x = 360 \text{ (с)}$$

Определим длину половины трассы:

$$1800 : 2 = 900 \text{ (см)}$$

Определим расстояние, которое проехал робот за первую половину времени:

$$2 \times 360 = 720 \text{ (см)}$$

Поскольку робот проехал меньше половины трассы за половину времени, определим, какое расстояние осталось преодолеть роботу:

$$900 - 720 = 180 \text{ (см)}$$

Определим, за сколько времени робот проедет оставшееся расстояние с возросшей скоростью:

$$180 : 3 = 60 \text{ (с)}$$

Определим время движения робота в минутах:

$$360 + 60 = 420 \text{ (с)}$$

$$420 : 60 = 7 \text{ (мин.)}$$

Ответ: 7 минут

Задача 2. (15 баллов)

Информационная панель робототехнического полигона содержит восемнадцать ярких светодиодов, каждый из которых можно включать и выключать отдельно. На панели находятся светодиоды трех цветов (см. *Схему расположения светодиодов*).

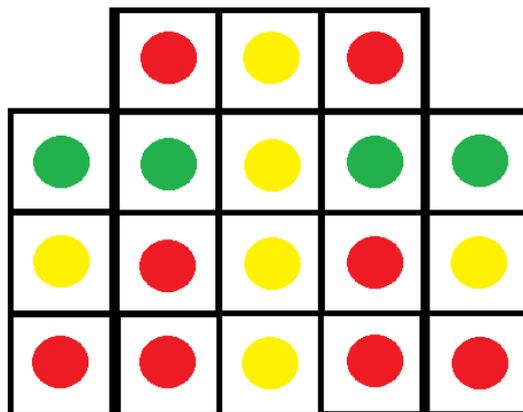


Схема расположения светодиодов

Данную панель решили использовать для жеребьевки. В начале соревнования все светодиоды были выключены. Затем на панели случайным образом зажгли три светодиода. Определите, сколько бит информации содержит сообщение, если на панели горят светодиоды всех трех цветов. Результат округлите до сотых. В ответ запишите только число.

Ответ: 4,67

Решение:

Найдем количество информации, содержащейся в сообщении, воспользовавшись вероятностным подходом.

Вероятность того, что на табло горит три светодиода и все они разных цветов будет равна:

$$P = \frac{4}{18} \times \frac{6}{17} \times \frac{8}{16} = \frac{2}{51}$$

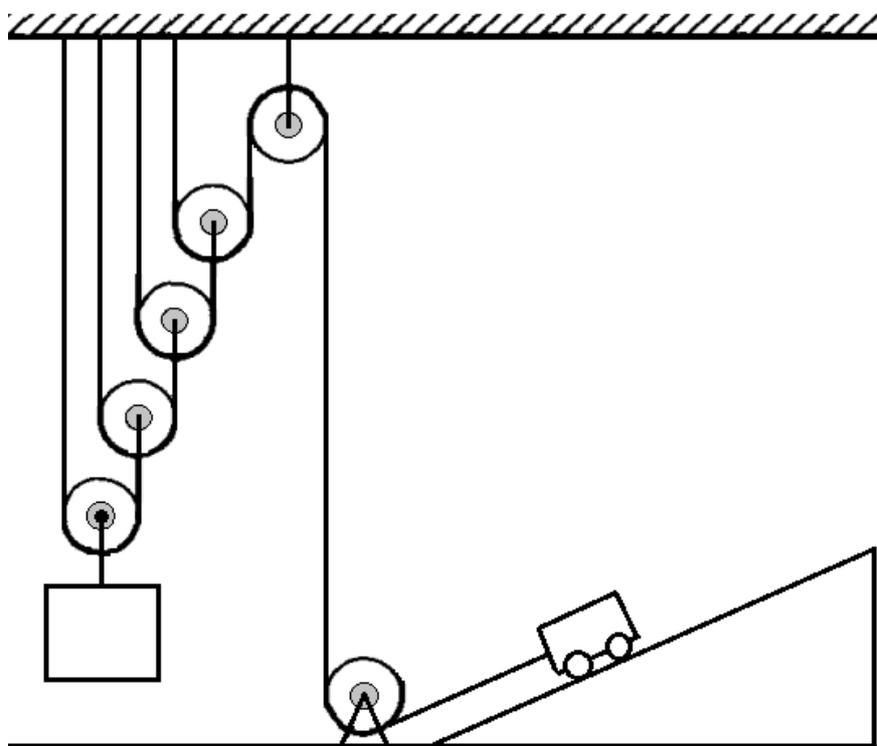
Воспользовавшись формулой, можно получить аналогичный результат:

$$i = \log_2 \left(\frac{1}{P} \right) = \log_2 \left(\frac{1}{\frac{2}{51}} \right) = \log_2(25,5) \approx 4,67 \text{ бита}$$

Ответ: 4,67 бита.

Задача 3. (15 баллов)

Робот, поднимаясь равномерно и прямолинейно по наклонной плоскости, поднимает груз с помощью системы блоков (полиспаста).



Масса робота равна $m=3$ кг, масса груза равна $M=32$ кг, коэффициент трения равен $\mu = 0,3$. Угол при основании наклонной плоскости равен $\alpha=30^\circ$. Скорость робота равна 3 см/с. Массой блоков и силой трения в осях блоков можно пренебречь.

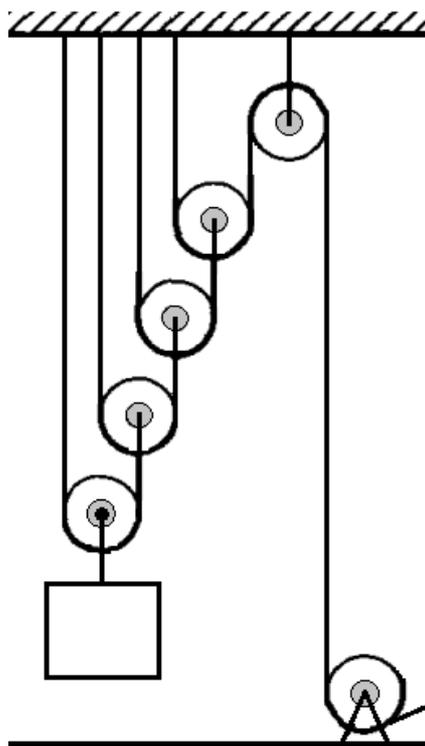
Считайте, что мощность робота не ограничивает время движения, сопротивлением воздуха можно пренебречь. Определите, какова сила тяги, развиваемая моторами робота. Ускорение свободного падения примите равным $9,81$ м/с². Ответ дайте в ньютонах. Результат округлите до целых. В ответ запишите только число.

Ответ: 42

Решение:

Систему, представленную в задаче, можно разделить на две: блоки+ груз и робот на наклонной плоскости. Эти две системы связывает нить. В осях блоков нет трения, масса блоков считается нулевой.

Рассмотрим сначала систему блоков.

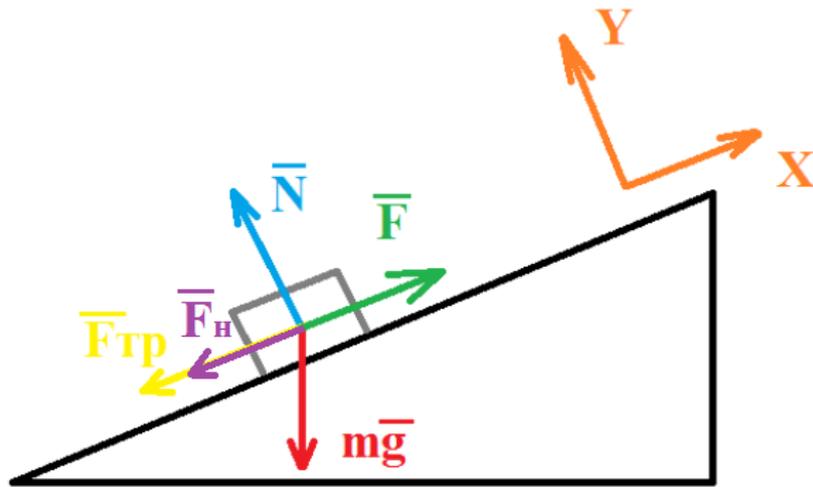


Мы знаем, что каждый из подвижных блоков, установленных соответствующим образом, уменьшает в два раза силу, необходимую для поднятия груза. А каждый из неподвижных блоков меняет направление приложения силы.

Поскольку трения в осях блоков нет, блоки невесомы, то логично предположить, что нить невесома и не растяжима, соответственно, она сила натяжения нити до блока равна силе натяжения нити после блока.

Соответственно, поскольку в системе 4 подвижных блока, то сила, которую нужно приложить для поднятия груза, будет в $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ раз меньше, чем без них. Поскольку груз и робот должны двигаться равномерно и прямолинейно, то сила натяжения нити, прикрепленной к роботу, будет равна $F_H = \frac{1}{16} Mg$.

Рассмотрим робота, поднимающегося равномерно и прямолинейно по наклонной плоскости:



Запишем уравнение сил, приложенных к роботу:

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_H = m\vec{a}$$

Поскольку робот поднимается по наклонной плоскости с постоянной скоростью, то ускорение робота равно 0.

Запишем уравнение сил в проекциях на оси координат:

$$OX: 0 - mg \sin \alpha + F - F_{\text{тр}} - F_H = 0$$

$$OY: N - mg \cos \alpha + 0 + 0 = 0$$

Получаем, что

$$N = mg \cos \alpha$$

Поскольку

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$$

То мы получаем, что

$$\begin{aligned} F &= F_{\text{тр}} + mg \sin \alpha + F_H = \mu mg \cos \alpha + mg \sin \alpha + \frac{1}{16} Mg = \\ &= g \left(m(\mu \cos \alpha + \sin \alpha) + \frac{1}{16} M \right) \end{aligned}$$

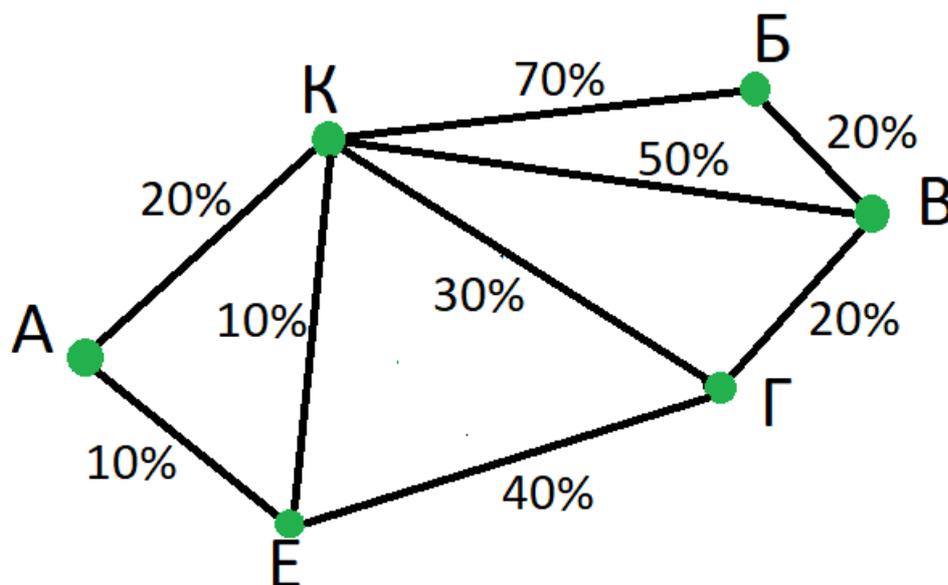
Подставим значения и подсчитаем:

$$F = g \left(m(\mu \cos \alpha + \sin \alpha) + \frac{1}{16} M \right) = 9,81 \left(3 \left(0,3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{32}{16} \right) \approx 42 \text{ Н}$$

Ответ: 42 ньютона.

Задача 4. (20 баллов)

Складской робот перемещается между точками склада. При перемещении между различными точками робот тратит разное количество энергии. Потеря энергии на каждом отрезке указана в процентах от текущего заряда аккумулятора робота перед выходом на этот отрезок маршрута.



Робот должен попасть из точки А в точку Б с минимальной потерей энергии. Движение робот начинает с полным зарядом аккумулятора.

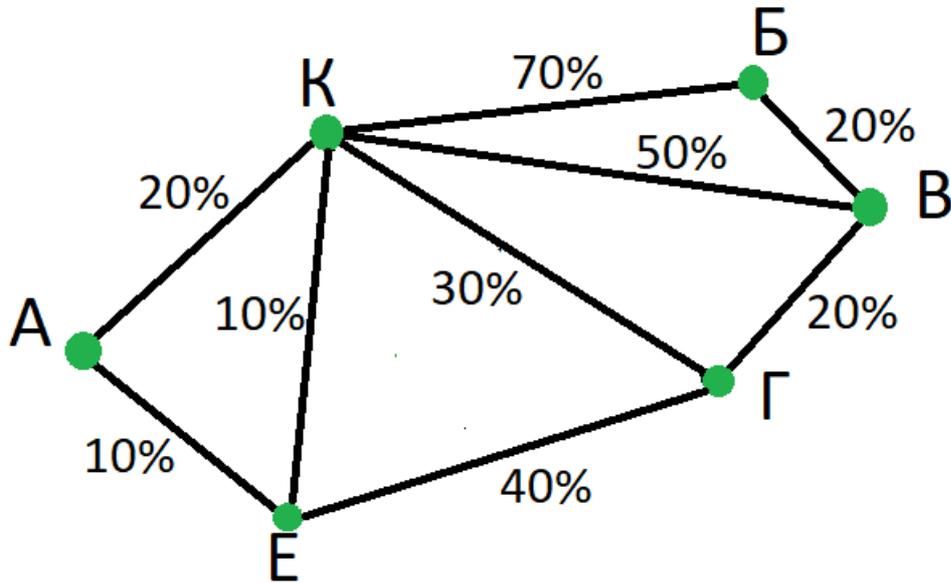
- (10 баллов)** Укажите по какому маршруту роботу нужно ехать. В ответ запишите последовательность букв без пробелов и разделителей, например АБВГД.
- (10 баллов)** Какой максимальный заряд аккумулятора удастся при этом сохранить. Ответ укажите в процентах от начального заряда аккумулятора. В ответ запишите только число. Результат укажите с точностью до тысячных.

Ответ:

- АЕКГВБ
- 36,288

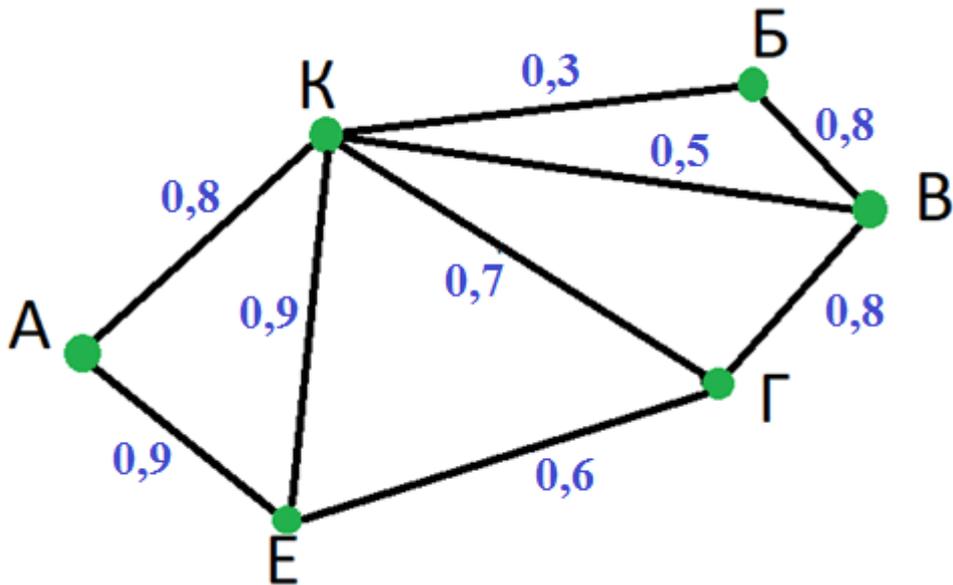
Решение:

Рассмотрим предложенный граф, изучим веса на ребрах и построим алгоритм поиска наиболее выгодного пути.



На ребрах графа указан процент от текущего заряда аккумулятора, который потеряет робот при переходе от вершины к вершине в любом направлении.

Для удобства решения заменим веса на ребрах графа на часть заряда, которая останется от того заряда аккумулятора, с которым робот начал движение по ребру.



Рассмотрим принцип оптимизации прохождения по ребрам. Если по двум ребрам можно дойти дешевле, чем по одному ребру, то будем выбирать более дешевый путь.

Из К в Б выгоднее пройти через В, чем напрямую:

$$0,3 < 0,4 = 0,5 \times 0,8$$

Из К в В выгоднее пройти через Г, чем напрямую:

$$0,5 < 0,56 = 0,7 \times 0,8$$

Из Е в Г выгоднее дойти через вершину К:

$$0,6 < 0,63 = 0,9 \times 0,7$$

Из А в К дешевле дойти не напрямую, а через вершину Е, так как

$$0,8 < 0,81 = 0,9 \times 0,9$$

Таким образом, выгоднее всего идти по маршруту

А-Е-К-Г-В-Б

Тогда максимальный остаточный заряд будет равен:

$$0,9 \times 0,9 \times 0,7 \times 0,8 \times 0,8 = 0,36288$$

Переведем в проценты:

$$0,36288 \times 100 \% = 36,288\%$$

Ответ:

1. АЕКГВБ.

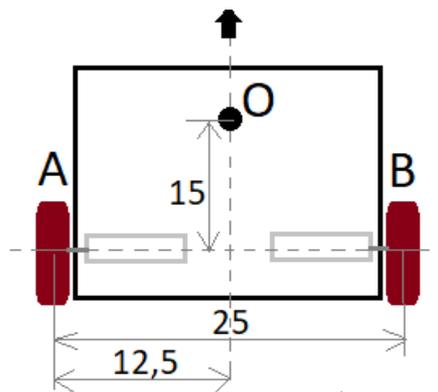
2. 36,288 %.

Задача 5. (30 баллов)

Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, радиусы колёс робота равны. Левым колесом управляет мотор А, правым колесом управляет мотор В. Колёса напрямую подсоединены к моторам. Длина обода колеса равна 7 см. Расстояние между центрами колес робота равно 25 см. В точке О закреплен маркер, которым робот может наносить изображение.

Робот описывает колесом В окружность радиуса 1 м таким образом, что колесо А оказывается внутри окружности. За треть минуты ось мотора А делает 10 оборотов.

1. (10 баллов) Определите, сколько оборотов в минуту делает мотор В. При расчетах примите $\pi \approx 3$. В ответ запишите только число.
2. (20 баллов) Определите время, которое робот потратит на рисование маркером дуги окружности длиной 1 м при описанном выше движении робота. При расчетах примите $\pi \approx 3$. Ответ запишите в секундах. Ответ округлите до целых. В ответ запишите только число.



Ответ:

1. 40
2. 24

Решение:

Поскольку радиус окружности, которую должен описать робот внешним колесом В, больше расстояния между центрами колес, то оба мотора А и В будут работать.

Моторы должны работать так, чтобы колеса робота описывали концентрические окружности в любой момент времени, при этом обе окружности должны быть закончены в одно и то же время.

Колесо А опишет окружность радиуса $100 - 25 = 75$ см за

$$\frac{2\pi \times (100 - 25) \text{ см}}{7 \text{ см} \times (10 \text{ об} \div (\frac{1}{3} \times 60 \text{ с}))} = \frac{2\pi \times 75 \text{ об}}{7 \times 10 \div 20 \text{ с}} = \frac{2\pi \times 150 \text{ об}}{7 \text{ с}}$$

Обозначим скорость вращения мотора В за w . Тогда время начертания окружности колесом В будет равно:

$$\frac{2\pi \times 100 \text{ см}}{7 \text{ см} \times w}$$

Составим уравнение, приравняв время описывания окружностей колесами А и В:

$$\frac{2\pi \times 150}{7} = \frac{2\pi \times 100}{7 \times w}$$

$$w = \frac{100}{150} = \frac{2}{3} \left(\frac{\text{об}}{\text{с}} \right)$$

$$w = \frac{2 \text{ об}}{3 \text{ с}} = \frac{2}{3} \times 60 = 40 \left(\frac{\text{об}}{\text{мин}} \right)$$

Точка О будет двигаться по окружности, радиус которой равен:

$$R' = \sqrt{\left(a - \frac{L}{2}\right)^2 + (b)^2}$$

где $a=100$ см, $b = 15$ см, $L=25$ см

Окружности, которые описывают колеса робота и точка О, являются концентрическими. Значит, при движении робота описанным образом, дуги окружностей, по которым движутся колеса и точка О, будут иметь одинаковую градусную меру.

Определим градусную меру дуги окружности, описанной точкой О:

$$2\pi R' \times \frac{\alpha}{360^\circ} = l_o$$

$$\alpha = \frac{l_o \times 360^\circ}{2\pi R'}$$

Определим время, за которое колесо А начертит дугу окружности, градусная мера которой равна α :

$$t = \frac{2\pi(a - L) \times \frac{\alpha}{360^\circ}}{wC} = \frac{2\pi(a - L) \times \frac{l_o \times 360^\circ}{2\pi R'}}{wC} = \frac{l_o(a - L)}{wCR'} = \frac{l_o(a - L)}{wC \sqrt{\left(a - \frac{L}{2}\right)^2 + (b)^2}}$$

При расчетах учтем, что

$$w = 30 \frac{\text{об}}{\text{мин}} = 0,5 \frac{\text{об}}{\text{с}}$$

$$t = \frac{l_o (a - L)}{wC \sqrt{\left(a - \frac{L}{2}\right)^2 + (b)^2}} = \frac{100 \times (100 - 25)}{0,5 \times 7 \times \sqrt{\left(100 - \frac{25}{2}\right)^2 + (15)^2}} \approx 24(\text{с})$$

Ответ:

1. 40 оборотов в минуту.
2. 24 секунды.