Количество баллов за каждую задачу									
Класс/№ задачи	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
5-6 классы	10	10	15	15	15	15	20		
7-8 классы	10	10	10	10	10	15	15	20	
9 класс	10	10	10	10	10	10	10	15	15

Задача 1.

В-1

Во сколько раз второе из чисел $\frac{x}{2}$, $2x-3$, $\frac{18}{x}+1$ больше первого, если известно, что оно во столько же раз меньше третьего? Ответ округлить до двух знаков после запятой.

Ответ: $\frac{52}{25}=2{,}08$

Решение. Из условия $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}$ получаем $a_1a_3=a_2^2$ или $\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{18}{x}+1\right)=(2x-3)^2$. Отсюда $8x^2-25x=0$. При $x=0$ нарушается ОДЗ, а при $x=\frac{25}{8}$ получаем $a_1=\frac{25}{16}$, $a_2=\frac{13}{4}$ и $\frac{a_2}{a_1}=\frac{52}{25}$.

В-2

Во сколько раз второе из чисел $\frac{x}{2}$, $3x-2$, $\frac{8}{x}+1$ больше первого, если известно, что оно во столько же раз меньше третьего? Ответ округлить до двух знаков после запятой.

Ответ: 3,12

В-3

Во сколько раз второе из чисел $\frac{x}{2}$, $2x-5$, $\frac{50}{x}+3$ больше первого, если известно, что оно во столько же раз меньше третьего? Ответ округлить до двух знаков после запятой.

Ответ: $\frac{92}{43}\approx 2{,}14$

В-4

Во сколько раз второе из чисел $\frac{x}{2}$, $3x-5$, $\frac{50}{x}+3$ больше первого, если известно, что оно во столько же раз меньше третьего? Ответ округлить до двух знаков после запятой.

Ответ: $\frac{22}{7}\approx 3{,}14$

Задача 2.

В-1

В то время, как на водопой отправился находящийся в 6 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 1,5 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 32 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 2 минуты и 24 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 28,8

Решение. Пусть x — скорость черепахи, а y — скорость 1-го львенка. Тогда скорость 2-го львенка равна $1{,}5y$. Весь путь до водопоя для 1-го львенка составил $6y$, а для черепахи — $32x$. Значит, сначала расстояние между ними было $6y-32x$, а первое происшествие произошло после начала движения через $(6y-32x)/(y-x)$ минут. Второе происшествие произошло после начала движения через $32x/(x+1{,}5y)$ минут. Поэтому

$$\frac{32x}{x+1{,}5y}-\frac{6y-32x}{y-x}=2{,}4 \text{ откуда } 2{,}4x^2+75{,}2xy-12{,}6y^2=0,$$

или $63\,(y/x)^2-376\,(y/x)-12=0$. Это квадратное уравнение относительно y/x имеет корни разных знаков. Положительный равен 6. Таким образом, $y=6x$ и время черепахи до водопоя после 2-го происшествия равно

$$32-\frac{32x}{x+1{,}5y}=32-\frac{32x}{x+9x}=32-3{,}2=28{,}8 \text{ мин.}$$

В-2

В то время, как на водопой отправился находящийся в 5 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 1,5 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 33 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 3 минуты и 54 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 29,7

В-3

В то время, как на водопой отправился находящийся в 6 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 2 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 33 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 42 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 30,8

В-4

В то время, как на водопой отправился находящийся в 5 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 2 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 36 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 2 минуты и 34 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 33,6

Задача 3.

В-1

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = \sqrt{13}$.

Ответ: 12

Решение. Пусть $AB = c$, $BE = AD = 2a$. Так как треугольник ABD равнобедренный (биссектриса перпендикулярна основанию, $AB = BD = c$, $BC = 2c$), то по формуле для длины биссектрис (где $\angle ABC = \beta$) $2a = \frac{4c^2}{3c}\cos\frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \frac{3a}{2} = c\cos\frac{\beta}{2}$. Рассмотрим треугольник ABF (где F — середина отрезка AD и точка пересечения биссектрисы и медианы). Имеем $a = c\sin\frac{\beta}{2}$, $c = \frac{a}{\sin\frac{\beta}{2}}$. Значит, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{2}{3}$ и $\cos\frac{\beta}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\beta = \frac{12}{13}$. Площадь треугольника ABC равна $S_{ABC} = c^2\sin\beta = \frac{12}{13}c^2$.

В-2

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = \sqrt{26}$.

Ответ: 24

В-3

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $BE = AD = 4$.

Ответ: 12

В-4

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $BE = AD = 6$.

Ответ: 27

Задача 4.

В-1

Маша плотно уложила 165 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Ответ: 45

Решение. Решим задачу в общем виде для $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ шаров. В основании треугольной пирамиды высотой в n рядов лежит n-ое треугольное число шаров $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$. Тогда всего шаров в пирамиде $\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. Можно решать задачу перебором.

В-2

Маша плотно уложила 220 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Ответ: 55

В-3

Маша плотно уложила 286 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Ответ: 66

В-4

Маша плотно уложила 364 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Ответ: 78

Задача 5.

В-1

Числа x, y, z таковы, что $\dfrac{x+\frac{53}{18}y-\frac{143}{9}z}{z}=\dfrac{\frac{3}{8}x-\frac{17}{4}y+z}{y}=1$. Найдите $\dfrac{y}{z}$.

Ответ: $\dfrac{352}{305}\approx 1,15$

Решение. Решим задачу в общем виде: найти $\dfrac{y}{z}$, если числа x, y, z таковы, что $\dfrac{x+Ay-Bz}{z}=\dfrac{Cx-Dy+z}{y}=1$. Воспользуемся тем фактом, что если $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$, то $\dfrac{a+nc}{b+nd}=k$ для любого n, при котором знаменатель не обращается в ноль. Тогда

$$1=\frac{Cx-Dy+z-Cx-CAy+CBz}{y-Cz}=\frac{-(D+CA)y+(CB+1)z}{y-Cz}=\frac{-(D+CA)\frac{y}{z}+(CB+1)}{\frac{y}{z}-C};$$

$$\frac{y}{z}-C=-(D+CA)\frac{y}{z}+(CB+1);\quad \frac{y}{z}=\frac{C+CB+1}{D+CA+1}.$$

В-2

Числа x, y, z таковы, что $\dfrac{x+\frac{53}{18}y-\frac{157}{9}z}{z}=\dfrac{\frac{3}{8}x-\frac{17}{4}y+z}{y}=1$. Найдите $\dfrac{y}{z}$. Ответ округлите до сотых.

Ответ: $\dfrac{76}{61}\approx 1{,}25$

В-3

Числа x, y, z таковы, что $\dfrac{y+\frac{53}{18}z-\frac{121}{2}x}{x}=\dfrac{\frac{3}{8}y-\frac{4}{3}z+x}{z}=1$. Найдите $\dfrac{z}{x}$.

Ответ: 7

В-4

Числа x, y, z таковы, что $\dfrac{z+\frac{53}{18}x-\frac{55}{2}y}{y}=\dfrac{\frac{3}{8}z-\frac{4}{3}x+y}{x}=1$. Найдите $\dfrac{x}{y}$.

Ответ: 3,4

Задача 6.

В-1

Найдите наименьшее значение выражения $4x+9y+\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{y-5}$ при условии, что $x>4$ и $y>5$.

Ответ: 71

Решение. $4x+9y+\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{y-5}=4x-16+\dfrac{4}{4x-16}+9y-45+\dfrac{9}{9y-45}+61\geq 2\sqrt{4}+2\sqrt{9}+61=71$ (неравенство о средних). Равенство достигается при $4x-16=2,\ 9y-45=3$, то есть при $x=\dfrac{9}{2},\ y=\dfrac{16}{3}$.

В-2

Найдите наименьшее значение выражения $9x+4y+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{y-4}$ при условии, что $x>3$ и $y>4$.

Ответ: 53

В-3

Найдите наименьшее значение выражения $4x+9y+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y-2}$ при условии, что $x>1$ и $y>2$.

Ответ: 32

В-4

Найдите наименьшее значение выражения $9x+4y+\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{y-6}$ при условии, что $x>5$ и $y>6$.

Ответ: 79

Задача 7.

В-1

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2ax = 8a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

Ответ: 506,25

Решение. Если x_1 и x_2 корни этого уравнения, то $x_1 + x_2 = -2a$, $x_1x_2 = -8a$. Поэтому $x_1x_2 - 4(x_1 + x_2) = 0$, то есть $(x_1 - 4)(x_2 - 4) = 16$. Пусть, для определённости, $x_1 \leqslant x_2$. Тогда возможны следующие варианты (см. таблицу)

$$\begin{array}{ccrrrrrr}
(x_1-4) & = & -16 & -8 & -4 & 1 & 2 & 4 \\
(x_2-4) & = & -1 & -2 & -4 & 16 & 8 & 4 \\
x_1 & = & -12 & -4 & 0 & 5 & 6 & 8 \\
x_2 & = & 3 & 2 & 0 & 20 & 12 & 8 \\
a & = & 4.5 & 1 & 0 & -12.5 & -9 & -8
\end{array}$$

Исключаем варианты $a = 0$ и $a = -8$, потому что при них корни одинаковы. Остаются значения $a = 4.5, a = 1, a = -9, a = -12.5$.

В-2

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 4ax = 16a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

Ответ: 31,64

В-3

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2ax = -8a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

Ответ: 506,25

В-4

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 4ax = -16a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

Ответ: 31,64

Задача 8.

В-... *(конкретные варианты ниже)*

В прямоугольнике $ABCD$ точка M лежит на стороне BC таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $AMCD$, равен a. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если радиус окружности, вписанной в треугольник ABM, равен b.

Ответ: $\dfrac{4a^3-2a^2b}{a-b}$

Решение. Ясно, что $|AB|=|CD|=2a$. Применяя свойство четырехугольника, описанного около окружности и формулу длины радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, имеем $|MC|+|AD|2a+|AM|$, $2b=2a+|BM|-|AM|$, откуда имеем $|MC|+|AD|+2b=4a+|BM|$, а так как $|AD|=|BM|+|MC|$, то $|MC|=2a-b=|AF|$, (где F — точка касания стороны AB и вписанной в ABM окружности.) Значит, $2a-b+|AD|=2a+|AM|$, $|AM|=|AD|-b$. Кроме того, $|BM|=|BC|-|MC|=|AD|-2a+b$. По теореме Пифагора для треугольника ABM имеем $4a^2+(|AD|-2a+b)^2=(|AD|-b)^2 \Leftrightarrow 8a^2-4ab-(4a-2b)\cdot|AD|=-2b\cdot|AD| \Leftrightarrow |AD|=\dfrac{4a^3-2a^2b}{a-b}$.

В-1

В прямоугольнике $ABCD$ точка M лежит на стороне BC таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $AMCD$, равен 5. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если радиус окружности, вписанной в треугольник ABM, равен 3.

Ответ: 175

В-2

В прямоугольнике $CDEF$ точка K лежит на стороне CD таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $KDEF$, равен 7. Найдите площадь прямоугольника $CDEF$, если радиус окружности, вписанной в треугольник CKF, равен 3.

Ответ: 269,5

В-3

В прямоугольнике $KLMN$ точка P лежит на стороне MN таким образом, что радиус окружности, вписанной в треугольник KPN, равен 6. Найдите площадь прямоугольника $KLMN$, если радиус окружности, вписанной в четырехугольник $KLMP$, равен 10.

Ответ: 700

В-4

В прямоугольнике $EFGH$ точка T лежит на стороне EH таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $FGHT$, равен 9. Найдите площадь прямоугольника $EFGH$, если радиус окружности, вписанной в треугольник EFT, равен 5.

Ответ: 526,5

Задача 9.

В-1

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(111) + A(112) + \ldots + A(218) + A(219)$.

Ответ: 12045

Решение. Наибольшие нечётные делители никаких двух из данных чисел не могут совпасть, так как числа с одинаковыми наибольшими нечётными делителями либо равны, либо отличаются минимум в 2 раза. Значит, наибольшие нечётные делители чисел $111, 112, \ldots, 218, 219$ отличаются друг от друга. Получается, что наибольшие нечётные делители чисел от $n+1$ до $2n$ есть n различных нечётных чисел, которые не превышают $2n$. Следовательно, это числа $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$. Если к набору чисел добавить число 220, то искомая сумма будет равна $1 + 3 + 5 + \ldots + 219 - A(220) = \frac{1+219}{2} \cdot 110 - 55 = 110^2 - 55 = 12045$.

В-2

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(113) + A(114) + \ldots + A(222) + A(223)$.

Ответ: 12537

В-3

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(115) + A(116) + \ldots + A(226) + A(227)$.

Ответ: 12939

В-4

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(117) + A(118) + \ldots + A(230) + A(231)$.

Ответ: 13427

Задача 1.

В-1

Найдите x:

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{x}}}}}=\frac{16}{37}$$

Ответ: $-0{,}25$

Решение. $\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{x}}}}}=\frac{16}{37}\Leftrightarrow 2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{x}}}}=\frac{37}{16}\Leftrightarrow \frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{x}}}}=\frac{5}{16}\Leftrightarrow 3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{x}}}=\frac{16}{5}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow \frac{1}{5+\frac{1}{x}}=1\Leftrightarrow \frac{1}{x}=-4\Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$.

В-2

Найдите x:

$$\frac{1}{6+\frac{1}{7+\frac{1}{8+\frac{1}{9+\frac{1}{x}}}}}=\frac{64}{393}$$

Ответ: $-0{,}125$

В-3

Найдите x:

$$\frac{1}{5+\frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}}}=\frac{17}{89}$$

Ответ: $-0{,}5$

В-4

Найдите x:

$$\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{6+\frac{1}{7+\frac{1}{x}}}}}=\frac{67}{281}$$

Ответ: $-0{,}2$

Задача 2.

В-1

В школьном тесте 5 разделов, каждый из которых содержит одинаковое количество вопросов. Антон правильно ответил на 20 вопросов. При этом процент его верных ответов оказался больше 60, но меньше 70. Сколько всего вопросов было в тесте?

Ответ: 30

Решение. По условию $\frac{60}{100} < \frac{20}{x} < \frac{70}{100}$, то есть $\frac{200}{7} < x < \frac{100}{3}$, значит, $29 \leqslant x \leqslant 33$. Так как число вопросов должно делиться на 5, то $x = 30$.

В-2

В школьном тесте 4 раздела, каждый из которых содержит одинаковое количество вопросов. Антон правильно ответил на 20 вопросов. При этом процент его верных ответов оказался больше 60, но меньше 70. Сколько всего вопросов было в тесте?

Ответ: 32

В-3

В школьном тесте 5 разделов, каждый из которых содержит одинаковое количество вопросов. Антон правильно ответил на 20 вопросов. При этом процент его верных ответов оказался больше 50, но меньше 60. Сколько всего вопросов было в тесте?

Ответ: 35

В-4

В школьном тесте 4 раздела, каждый из которых содержит одинаковое количество вопросов. Антон правильно ответил на 20 вопросов. При этом процент его верных ответов оказался больше 50, но меньше 60. Сколько всего вопросов было в тесте?

Ответ: 36

Задача 3.

В-1

В то время, как на водопой отправился находящийся в 6 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 1,5 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 32 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через какое-то время — второй. Через 28 минут 48 секунд после второго происшествия черепаха дошла до водопоя. Сколько минут прошло между двумя происшествиями, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 2,4

Решение. Примем весь путь черепахи за 1, и пусть x — скорость 1-го львенка. Тогда скорость 2-го львенка равна $1{,}5x$, а скорость черепахи — $1/32$. Весь путь до водопоя для 1-го львенка составил $6x$. Значит, сначала расстояние между ним и черепахой было $6x - 1$, а первое происшествие произошло после начала движения через $(6x-1)/(x-\frac{1}{32})$ мин. Второе происшествие произошло после начала движения через

$$32 - 28{,}8 = \frac{1}{1{,}5x + \frac{1}{32}} \text{ мин., откуда } x = \frac{3}{16}.$$

Поэтому количество минут между происшествиями равно

$$32 - 28{,}8 - \frac{6x-1}{x-\frac{1}{32}} = 3{,}2 - \frac{\frac{18}{16}-1}{\frac{6}{32}-\frac{1}{32}} = 3{,}2 - 0{,}8 = 2{,}4.$$

В-2

В то время, как на водопой отправился находящийся в 5 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 1,5 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 27 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через какое-то время — второй. Через 24 минуты 18 секунд после второго происшествия черепаха дошла до водопоя. Сколько минут прошло между двумя происшествиями, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 2,1

В-3

В то время, как на водопой отправился находящийся в 6 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 2 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 33 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через какое-то время — второй. Через 30 минут 48 секунд после второго происшествия черепаха дошла до водопоя. Сколько минут прошло между двумя происшествиями, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 0,7

В-4

В то время, как на водопой отправился находящийся в 6 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 2 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 39 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через какое-то время — второй. Через 36 минут 24 секунды после второго происшествия черепаха дошла до водопоя. Сколько минут прошло между двумя происшествиями, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 2,1

Задача 4.

В-1

Дан квадрат со стороной 5 см. На четырёх его сторонах расположены вершины второго квадрата; на четырёх сторонах второго квадрата — вершины третьего, и т. д. При каком наименьшем натуральном n сумма площадей первых n квадратов гарантированно будет больше, чем 49 см^2?

Ответ: 6

Решение. Квадрат, вписанный в данный квадрат, имеет наименьшую площадь, если его вершины являются серединами сторон исходного квадрата (это следует, например, из того, что площадь квадрата равна половине квадрата его диагонали). В этом случае площадь вписанного квадрата равна половине площади исходного. Значит, площади квадратов минимальной площади образуют геометрическую прогрессию с первым членом 5 и знаменателем 0,5. Сумма первых её n членов впервые превысит 49 при $n = 6$ (это можно получить перебором либо из формулы для суммы членов геометрической прогрессии).

В-2

Дан квадрат со стороной 7 см. На четырёх его сторонах расположены вершины второго квадрата; на четырёх сторонах второго квадрата — вершины третьего, и т. д. При каком наименьшем натуральном n сумма площадей первых n квадратов гарантированно будет больше, чем 97 см^2?

Ответ: 7

В-3

Дан квадрат со стороной 3 см. На четырёх его сторонах расположены вершины второго квадрата; на четырёх сторонах второго квадрата — вершины третьего, и т. д. При каком наименьшем натуральном n сумма площадей первых n квадратов гарантированно будет больше, чем 17 см^2?

Ответ: 5

В-4

Дан квадрат со стороной 9 см. На четырёх его сторонах расположены вершины второго квадрата; на четырёх сторонах второго квадрата — вершины третьего, и т. д. При каком наименьшем натуральном n сумма площадей первых n квадратов гарантированно будет больше, чем 160 см^2?

Ответ: 7

Задача 5.

В-1

За круглым столом сидят 1001 человек, каждый из которых — рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжёт). Оказалось, что рядом с каждым рыцарем сидит ровно один лжец, а рядом с каждым лжецом найдётся рыцарь. Какое наименьшее количество рыцарей может сидеть за столом?

Ответ: 502

Решение. Из условия следует, что рыцарь не может сидеть между двумя рыцарями или двумя лжецами, а лжец не может сидеть между двумя лжецами. Таким образом, при обходе вокруг стола рыцари будут встречаться нам по двое подряд, а лжецы — по одному или по двое подряд. Из этого следует, что каждому лжецу можно найти в пару по рыцарю (и после этого ещё останутся рыцари, не вошедшие ни в одну пару). Значит, рыцарей за столом больше половины от общего числа сидящих и к тому же чётное число, то есть хотя бы 502.

Пример рассадки 502 рыцарей и 499 лжецов, удовлетворяющий условию: сначала посадим 248 групп вида «рыцарь, рыцарь, лжец, лжец», затем — ещё три группы вида «рыцарь, рыцарь, лжец».

В-2

За круглым столом сидят 2001 человек, каждый из которых — рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжёт). Оказалось, что рядом с каждым рыцарем сидит ровно один лжец, а рядом с каждым лжецом найдётся рыцарь. Какое наибольшее количество лжецов может сидеть за столом?

Ответ: 999

В-3

За круглым столом сидят 3001 человек, каждый из которых — рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжёт). Оказалось, что рядом с каждым рыцарем сидит ровно один лжец, а рядом с каждым лжецом найдётся рыцарь. Какое наименьшее количество рыцарей может сидеть за столом?

Ответ: 1502

В-4

За круглым столом сидят 4001 человек, каждый из которых — рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжёт). Оказалось, что рядом с каждым рыцарем сидит ровно один лжец, а рядом с каждым лжецом найдётся рыцарь. Какое наибольшее количество лжецов может сидеть за столом?

Ответ: 1999

Задача 6.

В-1

Найдите наименьшее натуральное число n, для которого число $n + 2018$ делится на 2020, а число $n + 2020$ делится на 2018.

Ответ: 2034142

Решение. По условию $n + 2018 = 2020m$, $n + 2020 = 2018k$, откуда $1009k - 1010m = 1$. Решение этого диофантова уравнения: $k = -1 + 1010p$, $m = -1 + 1009p$. Поэтому $n + 2018 = 2020(-1 + 1009p) = -2020 + 2020 \cdot 1009p$, откуда $n = -2018 - 2020 + 2020 \cdot 1009p$. Наименьшее натуральное n равно $n = 2020 \cdot 1009 - 2020 - 2018 = 2034142$.

В-2

Найдите наименьшее натуральное число n, для которого число $n + 2019$ делится на 2020, а число $n + 2020$ делится на 2019.

Ответ: 4074341

В-3

Найдите наименьшее натуральное число n, для которого число $n + 2019$ делится на 2021, а число $n + 2021$ делится на 2019.

Ответ: 4076359

В-4

Найдите наименьшее натуральное число n, для которого число $n + 2020$ делится на 2022, а число $n + 2022$ делится на 2020.

Ответ: 2038178

Задача 7.

B-1

Внутри выпуклого 13-угольника расположено 200 точек так, что никакие 3 из этих 213 точек (включая вершины многоугольника) не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники, вершины каждого — какие-нибудь три точки из данных 213 точек. Какое наибольшее число треугольников могло получится?

Ответ: 411

Решение. Если каждая из точек будет вершиной какого-нибудь треугольника, то общая сумма углов будет равна $180^\circ \cdot (13-2) + 360^\circ \cdot 200 = 180^\circ \cdot (11+400) = 180^\circ \cdot 411$. Значит, получается 411 треугольников. Если некоторые точки в разрезании не участвуют, то и число треугольников будет меньше.

B-2

Внутри выпуклого 100-угольника расположено 17 точек так, что никакие три из этих 117 точек (включая вершины многоугольника) не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники, вершинами каждого из которых являются 3 из данных 117 точек. Какое наибольшее количество треугольников может при этом получиться?

Ответ: 132

B-3

Внутри выпуклого 200-угольника расположено 13 точек так, что никакие три из этих 213 точек (включая вершины многоугольника) не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники, вершинами каждого из которых являются 3 из данных 213 точек. Какое наибольшее количество треугольников может при этом получиться?

Ответ: 224

B-4

Внутри выпуклого 17-угольника расположено 100 точек так, что никакие три из этих 117 точек (включая вершины многоугольника) не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники, вершинами каждого из которых являются 3 из данных 117 точек. Какое наибольшее количество треугольников может при этом получиться?

Ответ: 215

Задача 8.

B-1

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(111) + A(112) + \ldots + A(218) + A(219)$.

Ответ: 12045

Решение. Наибольшие нечётные делители никаких двух из данных чисел не могут совпасть, так как числа с одинаковыми наибольшими нечётными делителями либо равны, либо отличаются минимум в 2 раза. Значит, наибольшие нечётные делители чисел $111, 112, \ldots, 218, 219$ отличаются друг от друга. Получается, что наибольшие нечётные делители чисел от $n+1$ до $2n$ есть n различных нечётных чисел, которые не превышают $2n$. Следовательно, это числа $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$. Если к набору чисел добавить число 220, то искомая сумма будет равна $1 + 3 + 5 + \ldots + 219 - A(220) = \frac{1+219}{2} \cdot 110 - 55 = 110^2 - 55 = 12045$.

B-2

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(113) + A(114) + \ldots + A(222) + A(223)$.

Ответ: 12537

B-3

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(115) + A(116) + \ldots + A(226) + A(227)$.

Ответ: 12939

B-4

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(117) + A(118) + \ldots + A(230) + A(231)$.

Ответ: 13427

Задача 1.

В-1

Мама сказала Диме, что он должен съесть 13 ложек каши. Дима сказал своему другу, что съел 26 ложек каши. Дальше каждый ребёнок, рассказывая о подвиге Димы, увеличивал количество съеденной Димой каши в 2 или 3 раза. В результате один из детей рассказал маме Димы о 33696 ложках каши. Сколько всего раз дети, включая Диму, рассказывали о подвиге?

Ответ: 9

Решение. $33696 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 13$. Отсюда следует, что история о подвиге была пересказана 5 раз с удвоением количества каши и 4 раза — с утроением, итого 9 раз.

В-2

Папа уговорил Наташу съесть 11 ложек каши. Наташа сказала своей подруге, что съела 22 ложки каши. Дальше каждый ребёнок, рассказывая о подвиге Наташи, увеличивал количество съеденной ею каши в 2 или 3 раза. В результате один из детей рассказал папе Наташи о 21384 ложках каши. Сколько всего раз дети, включая Наташу, рассказывали о подвиге?

Ответ: 8

В-3

Мама сказала Грише, что он должен съесть 3 ложки каши. Гриша сказал своему другу, что съел 9 ложек каши. Дальше каждый ребёнок, рассказывая о подвиге Гриши, увеличивал количество съеденной Гришей каши в 3 или 5 раз. В результате один из детей рассказал маме Гриши о 18225 ложках каши. Сколько всего раз дети, включая Гришу, рассказывали о подвиге?

Ответ: 7

В-4

Папа уговорил Таню съесть 7 ложек каши. Таня сказала своей подруге, что съела 21 ложку каши. Дальше каждый ребёнок, рассказывая о подвиге Тани, увеличивал количество съеденной ею каши в 2 или 3 раза. В результате один из детей рассказал папе Тани о 27216 ложках каши. Сколько всего раз дети, включая Таню, рассказывали о подвиге?

Ответ: 9

Задача 2.

В-1.

В то время, как на водопой отправился находящийся в 5 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 1,5 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в получасе от него. Через какое-то время все трое встретились в одной точке, после чего продолжили свой путь. Через сколько минут после встречи черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 28

Решение. Примем весь путь черепахи за 1 и пусть x — скорость 1-го львенка. Тогда скорость 2-го львенка равна $1{,}5x$, а скорость черепахи — $1/30$. Весь путь до водопоя для 1-го львенка составил $5x$. Значит, встреча со 2-м львенком произошла через $5x/(x+1{,}5x) = 2$ минуты после начала движения. Столько же времени двигалась до встречи и черепаха. Оставшееся расстояние черепаха прошла за $30 - 2 = 28$ мин.

В-2

В то время, как на водопой отправился находящийся в 7,5 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 2 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в получасе от него. Через какое-то время все трое встретились в одной точке, после чего продолжили свой путь. Через сколько минут после встречи черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 27,5

В-3

В то время, как на водопой отправился находящийся в 7 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 2,5 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в получасе от него. Через какое-то время все трое встретились в одной точке, после чего продолжили свой путь. Через сколько минут после встречи черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 28

В-4

В то время, как на водопой отправился находящийся в 6 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 3 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в получасе от него. Через какое-то время все трое встретились в одной точке, после чего продолжили свой путь. Через сколько минут после встречи черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 38,5

Задача 3.

В-1

Квадрат со стороной 75 мм разрезали двумя параллельными разрезами на три прямоугольника. Оказалось, что периметр одного из этих прямоугольников вдвое меньше суммы периметров двух других. Чему равен этот периметр? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 20

Решение. У трёх прямоугольников одна из сторон одинакова и равна 75 мм. Сумма длин двух таких сторон у одного из прямоугольников равна полусумме длин всех таких сторон у двух других. Значит, другая сторона первого прямоугольника также равна полусумме других сторон двух других прямоугольников. Значит, она равна $75 : 3 = 25$ мм, откуда периметр первого прямоугольника равен $2 \cdot (25 + 75) = 200$ мм $= 20$ см.

В-2

Квадрат со стороной 105 мм разрезали двумя параллельными разрезами на три прямоугольника. Оказалось, что периметр одного из этих прямоугольников вдвое меньше суммы периметров двух других. Чему равен этот периметр? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 28

В-3

Квадрат со стороной 135 мм разрезали двумя параллельными разрезами на три прямоугольника. Оказалось, что периметр одного из этих прямоугольников вдвое меньше суммы периметров двух других. Чему равен этот периметр? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 36

В-4

Квадрат со стороной 165 мм разрезали двумя параллельными разрезами на три прямоугольника. Оказалось, что периметр одного из этих прямоугольников вдвое меньше суммы периметров двух других. Чему равен этот периметр? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 44

Задача 4.

В-1

Найдите наименьшее 12-значное натуральное число, которое делится на 36 и содержит в своей десятичной записи все 10 цифр.

Ответ: 100023457896

Решение. Число делится на 4 и на 9. Так как сумма десяти цифр равна 45 (делится на 9), то к этим десяти цифрам должны быть добавлены такие две цифры, сумма которых равна 0, 9 или 18. Так как нам требуется наименьшее число, то добавим две цифры 0 и поставим число 10002345 в начале требуемого числа (это минимальное возможное «начало» числа). Оставшиеся цифры 6, 7, 8 и 9 нужно расположить так, чтобы число делилось на 4. Значит, последние две цифры должны быть 68, 76 или 96. Минимум — 7896.

В-2

Найдите наименьшее 13-значное натуральное число, которое делится на 75 и содержит в своей записи все 10 цифр.

Ответ: 1000023468975

Решение. Число делится на 3 и на 25. Сумма десяти цифр равна 45, (делится на три), так что три дополнительные цифры записи числа в сумме должны дать $0, 3, 6, \ldots, 27$. Чем старше разряд, тем меньшую цифру лучше в него ставить, поэтому возьмём три ноля и поставим число 10000 в начале требуемого числа. Чтобы число делилось на 25, нужно чтобы в конце числа стояло 25, 50 или 75. Первые два варианта тратят маленькие цифры, которые лучше поставить в разрядах постарше, поэтому выбираем 75 и получаем ответ: 1000023468975.

В-3

Найдите наибольшее 12-значное натуральное число, которое делится на 36 и содержит в своей десятичной записи все 10 цифр.

Ответ: 999876543120

Число делится на 4 и на 9. Так как сумма десяти цифр равна 45 (делится на 9), то к этим десяти цифрам должны быть добавлены такие две цифры, сумма которых равна 0, 9 или 18. Чем старше разряд, тем большую цифру стоит в него ставить, поэтому добавим к десяти цифрам две девятки и начнём число так: 999.... Для делимости на 4 нужно, чтобы последние две цифры образовывали делящееся на 4 число: 00, 04, 08, 12, 16, 20, 24, ... , 96. Из этих вариантов лучше всего 20, потому что он оставляет большие цифры для старших разрядов (у нас всего один ноль, так что 00 отпадает). В итоге получаем число 999876543120.

В-4

Найдите наибольшее 13-значное натуральное число, которое делится на 75 и содержит в своей записи все 10 цифр.

Ответ: 9999876432150

Решение. Число делится на 3 и на 25. Сумма десяти цифр равна 45, (делится на три), так что три дополнительные цифры записи числа в сумме должны дать 0, 3, 6, ... 27. Чем старше разряд, тем большую цифру лучше в него ставить, поэтому возьмём три девятки и начнём число так: 9999.... Чтобы число делилось на 25, нужно, чтобы в конце числа стояло 25, 50 или 75. Пятёрка тратится в любом случае, и лучше всего выбрать 50, чтобы оставить для старших разрядов не 0, а 7 и 2. В итоге получаем число 9999876432150.

Задача 5.

В-1

Птенцы вылупляются в ночь с воскресенья на понедельник. Две недели птенец сидит, раскрыв клюв, третью неделю молча обрастает перьями, а на четвёртую улетает из гнезда. На прошлой неделе в гнезде 20 птенцов сидели, раскрыв клюв, а 14 обрастали перьями, а на этой неделе 15 сидели с раскрытым клювом и 11 обрастали перьями. а) Сколько птенцов сидели с раскрытым клювом на позапрошлой неделе? б) Сколько птенцов будут обрастать перьями на следующей неделе? В ответ запишите произведение этих чисел.

Ответ: 225

Решение. На самом деле птенцов стоит разбить на три категории: однонедельные, двухнедельные и трёхнедельные. С новой неделей каждый птенец переходит в следующую категорию. Значит, если на этой неделе обрастают перьями 11, то на прошлой было 11 двухнедельных, и, следовательно, 9 однонедельных ($9+11=20$). Значит, на этой неделе есть 9 двухнедельных, и именно они будут обрастать перьями на следующей неделе. На прошлой неделе было 11 двухнедельных и 14 трёхнедельных — значит, на позапрошлой было 11 однонедельных и 14 двухнедельных, и именно они раскрывали клюв. Ответом будет $9(11+14)$.

В-2

В мастерской изготавливают деревянных лошадок. Два дня фигурка окрашивается, на третий её покрывают лаком, а на четвёртый — отгружают в магазин. Сегодня окрашиваются 12 фигурок, а лакируются — 7. Вчера же окрашивались 11 фигурок, а лакировались 10. а) Сколько фигурок окрашивалось позавчера? б) Сколько фигурок будут лакировать завтра? В ответ запишите произведение этих чисел.

Ответ: 68

В-3

В огороженном участке Вселенной вспыхивают звёзды. Каждая звезда два миллиардолетия светит ярко, потом миллиард лет светит тускло, а потом и вовсе гаснет. Сегодня в том участке Вселенной 7 ярких и 12 тусклых светил, миллиард лет назад было 16 ярких и 8 тусклых. а) Сколько тусклых звёзд вы там насчитаете через миллиард лет? б) Сколько ярких звёзд там было два миллиарда лет назад? В ответ запишите произведение полученных чисел.

Ответ: 80

В-4

Каждый год на рынке появляются новые модели телефонов. В первый год после выхода модель считают острием прогресса, на второй и третий год модель разжалуется в просто «пристойные», после чего она безнадёжно устаревает. В этом году на острие прогресса — 8 моделей, и 11 пристойных. В прошлом году было 4 модели на острие прогресса и 17 пристойных. а) Сколько моделей было на острие прогресса по меркам позапрошлого года? б) Сколько пристойных моделей будет в следующем году? В ответ запишите произведение полученных чисел.

Ответ: 84

Задача 6.

В-1

В алфавите жителей сказочной планеты АБВ2020 всего три буквы: А, Б и В, из которых составляются все слова. При этом в любом слове не могут соседствовать две одинаковые буквы, а также в любом слове обязательно имеется каждая из трёх букв. Например, слова АВБ, ВАБАВА, БВБВББА являются допустимыми, а слова ВАВ, АБААВА, АВАББ — нет. Сколько 20-буквенных слов в словаре этой планеты?

Ответ: 1572858

Решение. Первая буква может быть любой из трёх, для каждой следующей буквы — выбор из двух вариантов. Получается $3 \cdot 2^{19}$ слов. Но нужно еще вычесть отсюда те слова, которые составлены всего из двух букв, а не из трёх. Таких слов 6. Получается $3 \cdot 2^{19} - 6 = 1572858$ различных слов.

В-2

В алфавите жителей сказочной планеты АБВ2020 всего три буквы: А, Б и В, из которых составляются все слова. При этом в любом слове не могут соседствовать две одинаковые буквы, также в любом слове обязательно имеется каждая из трёх букв. Например, слова АВБ, ВАБАВА, БВБВББА являются допустимыми, а слова ВАВ, АБААВА, АВАББ – нет. Сколько 18-буквенных слов в словаре этой планеты?

Ответ: 393210

В-3

В алфавите жителей сказочной планеты АБВ2020 всего три буквы: А, Б и В, из которых составляются все слова. При этом в любом слове не могут соседствовать две одинаковые буквы, также в любом слове обязательно имеется каждая из трёх букв. Например, слова АВБ, ВАБАВА, БВБВББА являются допустимыми, а слова ВАВ, АБААВА, АВАББ — нет. Сколько 19-буквенных слов в словаре этой планеты?

Ответ: 786426

В-4

В алфавите жителей сказочной планеты АБВ2020 всего три буквы: А, Б и В, из которых составляются все слова. При этом в любом слове не могут соседствовать две одинаковые буквы, также в любом слове обязательно имеется каждая из трёх букв. Например, слова АВБ, ВАБАВА, БВБВББА являются допустимыми, а слова ВАВ, АБААВА, АВАББ — нет. Сколько 17-буквенных слов в словаре этой планеты?

Ответ: 196602

Задача 7.

В-1

За круглым столом сидят 1001 человек, каждый из которых — рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжёт). Оказалось, что рядом с каждым рыцарем сидит ровно один лжец, а рядом с каждым лжецом найдётся рыцарь. Какое наименьшее количество рыцарей может сидеть за столом?

Ответ: 502

Решение. Из условия следует, что рыцарь не может сидеть между двумя рыцарями или двумя лжецами, а лжец не может сидеть между двумя лжецами. Таким образом, при обходе вокруг стола рыцари будут встречаться нам по двое подряд, а лжецы — по одному или по двое подряд. Из этого следует, что каждому лжецу можно найти в пару по рыцарю (и после этого ещё останутся рыцари, не вошедшие ни в одну пару). Значит, рыцарей за столом больше половины от общего числа сидящих и к тому же чётное число, то есть хотя бы 502.

Пример рассадки 502 рыцарей и 499 лжецов, удовлетворяющий условию: сначала посадим 248 групп вида «рыцарь, рыцарь, лжец, лжец», затем — ещё три группы вида «рыцарь, рыцарь, лжец».

В-2

За круглым столом сидят 2001 человек, каждый из которых — рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжёт). Оказалось, что рядом с каждым рыцарем сидит ровно один лжец, а рядом с каждым лжецом найдётся рыцарь. Какое наибольшее количество лжецов может сидеть за столом?

Ответ: 999

В-3

За круглым столом сидят 3001 человек, каждый из которых — рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжёт). Оказалось, что рядом с каждым рыцарем сидит ровно один лжец, а рядом с каждым лжецом найдётся рыцарь. Какое наименьшее количество рыцарей может сидеть за столом?

Ответ: 1502

В-4

За круглым столом сидят 4001 человек, каждый из которых — рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжёт). Оказалось, что рядом с каждым рыцарем сидит ровно один лжец, а рядом с каждым лжецом найдётся рыцарь. Какое наибольшее количество лжецов может сидеть за столом?

Ответ: 1999
