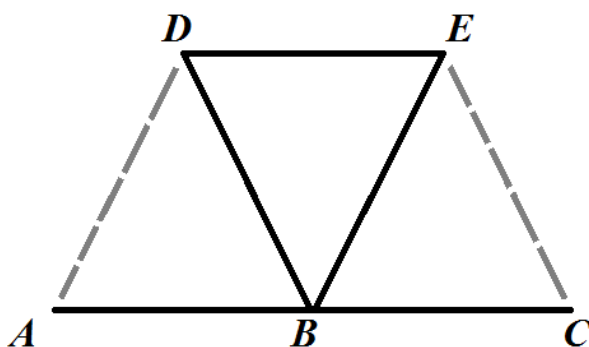


№1 (35 баллов) Робот движется по ровной горизонтальной поверхности по линии (см. траекторию).



Траектория

Траектория представляет собой ломаную линию $ABDEBC$, составленную из отрезков трех равных равносторонних треугольников ABD , BDE и BCE , точка B лежит на отрезке AC .

Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, расстояние между центрами колёс составляет 15 см, радиус колеса робота равен 5 см. Чтобы проехать прямолинейный участок AC каждое из колёс робота должно совершить 20 полных оборотов.

Все повороты робот должен совершать на месте, вращая колёса с одинаковой скоростью в противоположных направлениях. Робот не может ехать назад. При расчетах примите $\pi \approx 3$.

А) (15 баллов) Определите путь, который должен проехать робот, если по заданию всю траекторию нужно проехать 3 раза. Ответ дайте в метрах.

Б) (20 баллов) Определите, чему равен минимальный суммарный угол поворота робота, если робот проехал траекторию **полностью один раз**. Под суммарным углом поворота понимается сумма величин углов поворотов, при этом направление поворотов робота не учитывается. Ответ дайте в градусах.

Ответы и решения

А) Сторона многоугольника равна:

$$AC = 2 \times \pi \times 5 \times 20 \approx 3 \times 200 = 600 \text{ (см)}$$

$$600 \text{ см} = 6 \text{ м}$$

Тогда сторона треугольника будет равна:

$$6 : 2 = 3 \text{ (м)}$$

Периметр многоугольника равен:

$$P = 3 \times 5 = 15 \text{ (м)}$$

Длина трассы равна:

$$L = 15 \times 3 = 45 \text{ (м)}$$

Ответ: 45 м

	Критерий	Баллы
1	Верно посчитана длина пути за 1 оборот колеса	5
2	Верно посчитан количество оборотов, необходимое для преодоления всего пути	5
3	Дан верный ответ	5
	ИТОГО	15

Б) Чтобы начертить данную фигуру за один проезд, стартовать нужно в вершинах А или С. Тогда робот закончит своё движение в точках С или А.

Вариант 1.

Траектория *ABEDBC*

Посчитает сумму углов поворотов:

$$(180^\circ - 120^\circ) + (180^\circ - 60^\circ) + (180^\circ - 60^\circ) + (180^\circ - 120^\circ) = 360^\circ$$

Ответ: 360°

Вариант 2.

Траектория *ABDEBC*:

Посчитает сумму углов поворотов:

$$(180^\circ - 60^\circ) + (180^\circ - 60^\circ) + (180^\circ - 60^\circ) + (180^\circ - 60^\circ) = 480^\circ$$

Ответ: 480°

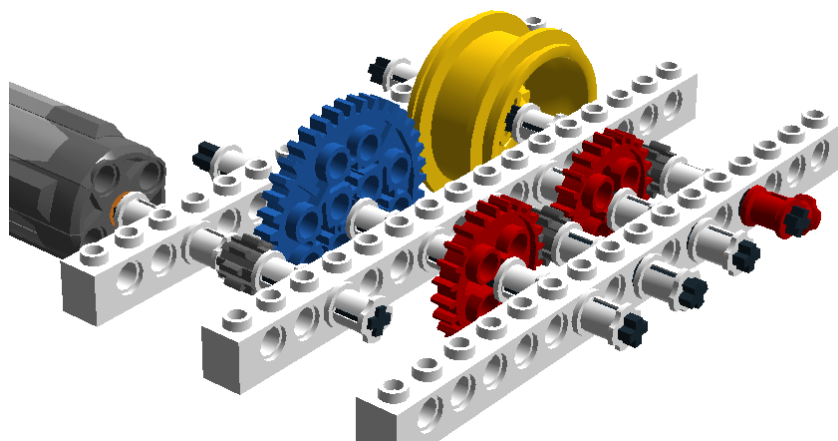
	Критерий	Баллы
1	Найдена градусная мера всех поворотов	10
2	Найденная мера углов минимальна	10
	ИТОГО	20

№2 (20 баллов) На робототехническом полигоне стоит тележка на 4-х колёсах. Радиус колёс тележки равен 5 см. На тележке укреплена бутылка с водой, в нижней части которой расположен кран. Если открыть кран, то из него через равные промежутки времени на полигон будут падать капли.

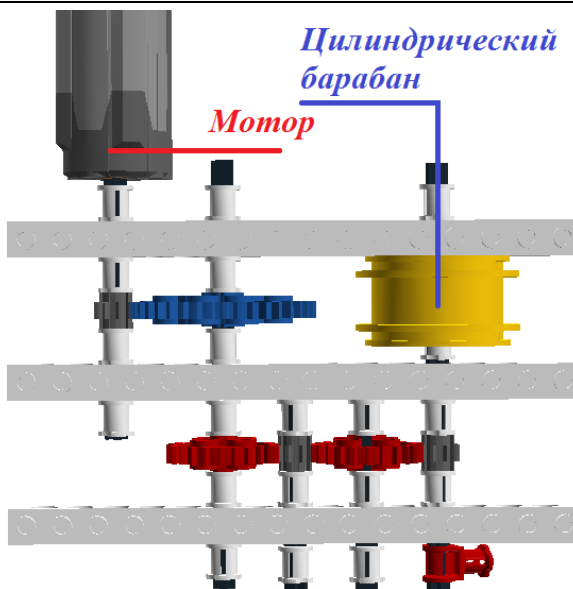
Катя привязала к тележке длинную тонкую прочную нерастяжимую нить. Если потянуть за нить, то тележка поедет. Другой конец нити Катя прикрепила к цилиндрическому барабану.

У Кати в наборе есть шестерёнки трёх типов. У большой шестерни – 40 зубьев, у средней – 24 зуба, у маленькой – 8 зубьев. Радиус барабана равен 15 мм.

Катя собрала следующую передачу (см. передачу, вид № 1, и передачу, вид № 2).



Передача, вид № 1



Передача, вид № 2

Катя запускает программу, и ось мотора начинает вращаться со скоростью 10 оборотов в минуту. Одновременно с запуском программы Катя открывает кран. За две минуты из крана падают 3 капли. Считайте, что капли достигают полигона мгновенно.

Определите, какое расстояние будет между двумя соседними каплями. При расчётах примите $\pi \approx 3$. Считайте, что нить наматывается на барабан равномерно в один слой. Ответ дайте в сантиметрах.

Ответы и решения

Поскольку нитка прикреплена к самой тележке, то ее перемещение определяется только радиусом барабана и скоростью его вращения.

Определим длину окружности барабана:

$$l = 2 \times \pi \times r \approx 2 \times 3 \times 15 \text{ мм} = 90 \text{ мм}$$

$$90 \text{ мм} = 9 \text{ см}$$

Определим скорость барабана. За одну минуту ведомая ось первой ступени сделает

$$10 \times 8 : 40 = 2 \text{ (об.)}$$

За одну минуту ось, на которой закреплен барабан, сделает

$$2 \times 24 : 8 = 6 \text{ (об.)}$$

То есть, один оборот барабан делает за

$$60 : 6 = 10 \text{ (с)}$$

Определим временной промежуток между падением капель:

$$2 \times 60 \div 3 = 40 \text{ (с)}$$

Значит, за время между падением капель, тележка успеет проехать:

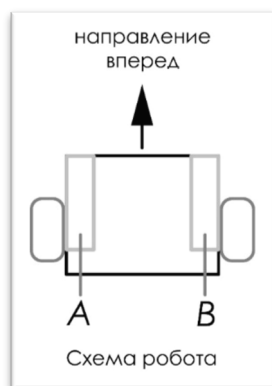
$$40 : 10 \times 9 = 36 \text{ (см)}$$

Ответ: расстояние между соседними каплями равно 36 см.

	Критерий	Баллы
1	Верно посчитана длина пути за 1 оборот колеса	5
2	Верно посчитана длина окружности барабана	5
3	Дан верный ответ	10
	ИТОГО	20

№3 (20 баллов) Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, радиус каждого из колёс робота равен 6 см. Расстояние между центрами колёс робота равно 18 см.

Левым колесом управляет мотор *A*, правым колесом управляет мотор *B*. Колёса напрямую подсоединены к моторам (см. *схему робота*).



Робот повернулся на месте. Известно, что ось мотора *A* повернулась на 180° по часовой стрелке, а ось мотора *B* повернулась на 180° против часовой стрелки.

Определите, градусную меру угла, на который повернулся робот. Ответ дайте в градусах, при необходимости округлив ответ до целых. Определите, в каком направлении – направо или налево – поворачивал робот.

Ответы и решения

№3

Посчитаем длину обода колеса:

$$2 \times \pi \times 6 = 12\pi$$

Определим, какое расстояние проехало каждое из колёс робота:

$$12\pi \times 180^\circ : 360^\circ = 6\pi$$

Определим, на какой угол повернулся робот:

$$6\pi \times 360^\circ : 18\pi = 120^\circ$$

Раз мотор *A* повернулся по часовой стрелке, то он вращал колесо назад.

Раз мотор *B* повернулся против часовой стрелки, то он вращал колесо вперёд.

Получается, левое колесо робота вращается назад, а право вперёд. Тогда робот повернётся справа налево.

Ответ: робот повернётся налево на 120° .

	Критерий	Баллы
1	Верно посчитана длина пути за 1 оборот колеса	5
2	Верно посчитана длина окружности вращения робота	5
3	Дан верный ответ на какой угол повернулся робот	5
4	Дан ответ в каком направлении повернулся робот	5
	ИТОГО	20

№4 (25 баллов) Робот-чертёжник наносит изображение квадрата $ABCD$ на баннер. Даша, наблюдает за движением робота и заполняет таблицу.

№ участка	Что делает робот	Линейная скорость робота (см/с)	Время проезда (с)	Длина участка (см)
1	Едет по отрезку AB		10	300
2	Поворачивается в вершине B		10	0
3	Едет по отрезку BC		15	
4			10	0
5	Едет по отрезку CK		10	
6	Едет по отрезку KD			
7	Поворачивается в вершине D			0
8	Едет по отрезку DA		15	

Часть данных Даша не успела занести в таблицу.

Известно, что на поворот в каждой из трёх вершина робот потратил одно и то же время. На каждом из отрезков пути скорость робота постоянна. K – середина CD . После подсчета средней путевой скорости робота по всему пути оказалось, что она равна 12 см/с.

Определите, с какой скоростью ехал робот на участке KD .

Ответы и решения

№4 Заполним пропуски в таблице:

№ участка	Что делает робот	Линейная скорость робота (см/с)	Время проезда (с)	Длина участка (см)
1	Едет по отрезку AB	30	10	300
2	Поворачивается в вершине B	0	10	0
3	Едет по отрезку BC	20	15	300
4	Поворачивается в вершине C	0	10	0
5	Едет по отрезку CK	15	10	150

6	Едет по отрезку KD			150
7	Поворачивается в вершине D	0	10	0
8	Едет по отрезку DA	20	15	300

Составим уравнение, зная, что средняя скорость на всем пути равна 12 см/с, обозначив время проезда по отрезку KD за x :

$$300 + 300 + 300 + 300 = 12 \times (10 + 10 + 15 + 10 + 10 + 10 + 15 + x)$$

$$1200 = 12 \times (80 + x)$$

$$100 = 80 + x$$

$$x = 20(\text{с})$$

Тогда скорость робота на отрезке KD равна:

$$150 : 20 = 7,5 (\text{см/с})$$

Ответ: 7,5 см/с

	Критерий	Баллы
1	Верно заполнена таблица	15
2	Верно записано уравнение	10
3	Дан верный ответ	10
	ИТОГО	35

№1 (20 баллов) Человек ездит на одноколёсном велосипеде по кругу. При этом точка контакта колеса с опорой K перемещается вдоль окружности радиуса $R = 2$ м с постоянной линейной скоростью $V = 2$ м/с. Во время движения велосипедист наклонен точно в сторону центра круга. При этом отрезок $KC = 50$ см, соединяющий точку K с центром масс C человека, образует с горизонтальной плоскостью постоянный угол $\alpha = 60^\circ$. Найти скорость, с которой перемещается центр масс C человека.

Ответ и решение:

Время T , в течение которого велосипедист совершает один полный оборот по кругу, равно

$$T = \frac{2\pi R}{V}.$$

Радиус r окружности, вдоль которой движется центр масс C велосипедиста, равен

$$r = R - l \cos \alpha.$$

Длина этой окружности равна

$$2\pi r = 2\pi(R - l \cdot \cos \alpha).$$

Центр масс C совершает оборот по кругу в течение того же времени T , поэтому скорость v движения центра масс C равна

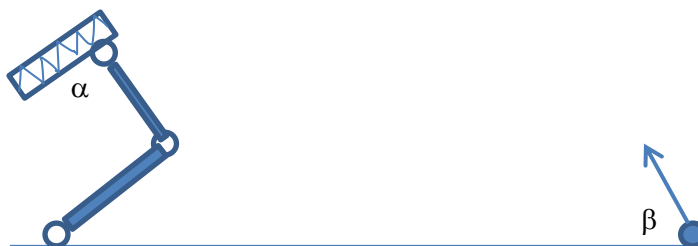
$$v = \frac{2\pi(R - l \cdot \cos \alpha)}{T} = \frac{V 2\pi(R - l \cdot \cos \alpha)}{2\pi R} = V \left(1 - \frac{l}{R} \cdot \cos \alpha \right).$$

$$v = 2 \times \left(1 - \frac{0,5}{2} \times \cos(60^\circ) \right) = 2 \times \left(1 - \frac{1}{8} \right) = 1,75 \text{ (м/с)}$$

Ответ: $v = 1,75$ м/с.

№2 (30 баллов) Робот ловит шарик, вылетающий из точки, расположенной на расстоянии $s = 2$ м на той же высоте, что и основание робота. Шарик вылетает со скоростью 5 м/с под углом 60° относительно горизонта.

Ловушка для шарика представляет собой трубу, в которую шарик залетит только если верхний конец ловушки окажется на траектории движения шарика, а направление движения в точности совпадает с направлением трубы. В какой точке относительно своего основания робот должен поместить верхнюю точку ловушки, если имеется требование, что она должна располагаться под углом 45° к горизонту? В ответе укажите координаты точки. Ускорение силы тяжести принять 10 м/с², сопротивлением воздуха пренебречь.



Ответ и решение:

Начальная скорость шарика

$$(V_x, V_y) = (V \cos \beta, V \sin \beta)$$

Текущая скорость

$$v_x = V_x, \quad v_y = V_y - gt$$

Текущая координата

$$x_t = s - V_x t, \quad y_t = V_y t - \frac{gt^2}{2}$$

Угол касательной к траектории

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{V_y - gt}{V_x}$$

Отсюда находится время встречи

$$t_1 = \frac{V_x \operatorname{tg} \alpha + V_y}{g}$$

Далее координаты, при заданных значениях углов

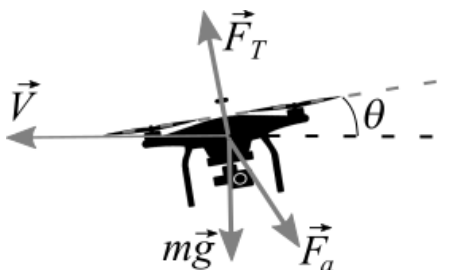
$$V_x = \frac{1}{2} V, \quad V_y = \frac{\sqrt{3}}{2} V, \quad t_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \frac{V}{g}, \quad x_1 = s - \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \frac{V^2}{g}, \quad y_1 = \frac{V^2}{4g}$$

$$x_1 = 2 - \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \times \frac{25}{10} \approx 0,29 \text{ (м)}$$

$$y_1 = \frac{25}{4 \times 10} = 0,625 \text{ (м)}$$

Ответ $x_1 = 0,29 \text{ м}, y_1 = 0,625 \text{ м}$

№3 (30 баллов) Квадрокоптер массой $m = \sqrt{2}$ кг летит по горизонтали с постоянной скоростью $V = 5$ м/с. Его корпус наклонен к горизонту, так что угол между плоскостью, в которой расположены винты, составляет с горизонтом угол θ .



Суммарная сила тяги F_T , развиваемая винтами квадрокоптера, в каждый момент времени направлена перпендикулярно плоскости винтов. На квадрокоптер действует также сила сопротивления среды F_a , направленная против вектора скорости центра масс и равная cV^2 (где $c = 0,2$ кг/м – некоторый коэффициент, который мы для простоты будем считать постоянным).

Найти тягу, создаваемую винтами квадрокоптера при таком движении, а также угол θ . Ускорение силы тяжести принять 10 м/с².

Ответ и решение:

Спроектируем силы на горизонталь и вертикаль, учитывая, что движение равномерное и вращения нет:

$$0 = -F_a + F_T \sin \theta$$

$$0 = -mg + F_T \cos \theta$$

Отсюда:

$$F_T = \sqrt{c^2 V^4 + m^2 g^2}$$

$$\theta = \arctg \frac{cV^2}{mg}$$

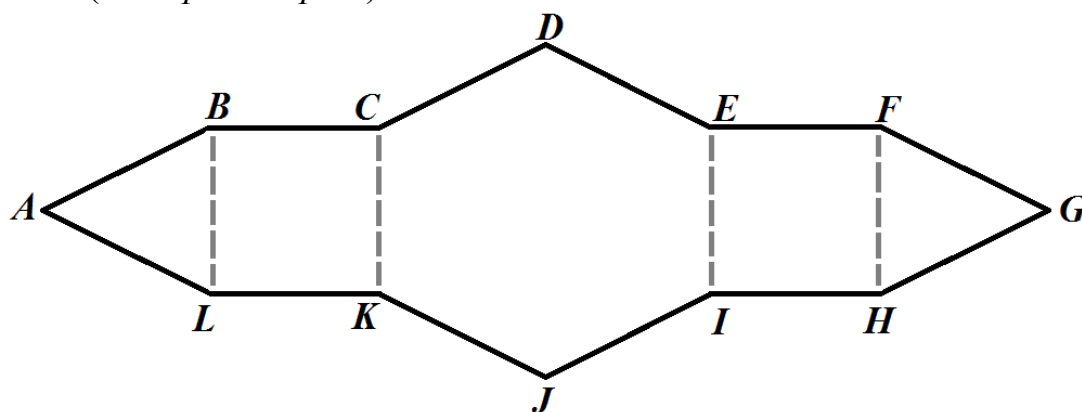
Посчитаем

$$F_T = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 \times 5^4 + 2 \times 100} = \sqrt{25 + 200} = 15(\text{Н})$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{0,2 \times 25}{\sqrt{2} \times 10}\right) = \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \approx 19,47^\circ$$

Ответ: $F_T = 15$ Н, $\theta \approx 19,47^\circ$

№4 (25 баллов) Робот движется по ровной горизонтальной поверхности по линии (см. *траекторию*).



Траектория

Траектория представляет собой многоугольник $ABCDEFGHIJKL$, составленный из отрезков двух равносторонних треугольников ABL и FHG , двух квадратов $BCKL$ и $EFHI$ и правильного шестиугольника $CDEIJK$.

Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, расстояние между центрами колёс составляет 15 см, радиус колеса робота равен 5 см. Чтобы проехать прямолинейный участок AB каждое из колёс робота должно совершить 10 полных оборотов.

Все повороты робот должен совершать на месте, вращая колёса с одинаковой скоростью в противоположных направлениях. Робот не может ехать назад. При расчетах примите $\pi \approx 3$.

А) (10 баллов) Определите путь, который должен проехать робот, если по заданию всю траекторию нужно проехать 5 раз. Ответ дайте в метрах.

Б) (15 баллов) Определите, чему равен минимальный суммарный угол поворота робота, если робот проехал по многоугольнику $ABCDEFGHIJKL$ полностью один раз. Под суммарным углом поворота понимается сумма величин углов поворотов, при этом направление углов поворотов робота не учитывается. Ответ дайте в градусах.

Ответ и решение:

А) Сторона многоугольника равна:

$$AB = 2 \times \pi \times 5 \times 10 \approx 3 \times 100 = 300 \text{ (см)}$$

$$300 \text{ см} = 3 \text{ м}$$

Периметр многоугольника равен:

$$P = 3 \times 12 = 36 \text{ (м)}$$

Длина трассы равна:

$$L = 36 \times 5 = 180 \text{ (м)}$$

Ответ: 180 м

Б) Чтобы суммарный угол поворота был минимален, нужно стартовать из вершины угла, градусная мера которого наименьшая. Соответственно, нужно стартовать из вершин A или G .

Посчитаем величину угла правильного шестиугольника:

$$\frac{(6 - 2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$$

Если поворот происходит в вершине угла, градусная мера которого меньше 180° , то величина угла поворота будет равна разности 180° и величины угла.

Если поворот происходит в вершине угла, градусная мера которого больше 180° , то величина угла поворота будет равна разности величины угла и 180° .

Суммарный угол поворота робота можно вычислить следующим образом:

$$30^\circ + 30^\circ + 60^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 120^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 60^\circ + 30^\circ + 30^\circ = 480^\circ$$

Ответ: 480°