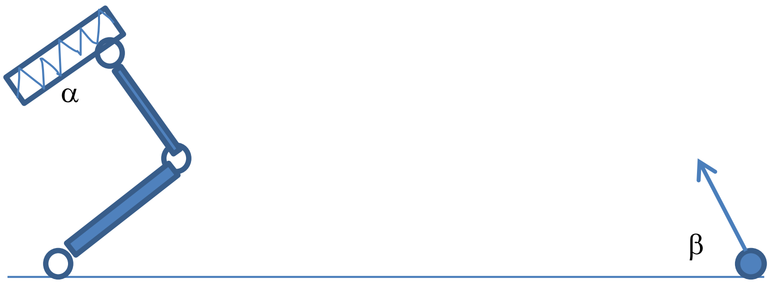
№1 (10 баллов) Велосипедист ездит на одноколёсном велосипеде по кругу. Точку контакта обода колеса с опорной горизонтальной поверхностью обозначим через K, центр масс человека вместе с велосипедом – через C, а радиус окружности, по которой движется центр масс C, – через r = 1,5 м. Пусть при этом центр масс C движется с постоянной линейной скоростью $V = 2.5$ м/с. При расчётах примите g = 9,81 м/с^2.

Найти угол α между отрезком KC и горизонтальной опорной плоскостью, предполагая, что вся масса m человека вместе с велосипедом сосредоточена в их центре масс C.

№2 (25 баллов) Робот ловит шарик, вылетающий их точки, расположенной на расстоянии s = 3 м на той же высоте, что и основание робота. Шарик массой 0,2 кг вылетает со скоростью 6 м/с под углом 60° относительно горизонта.

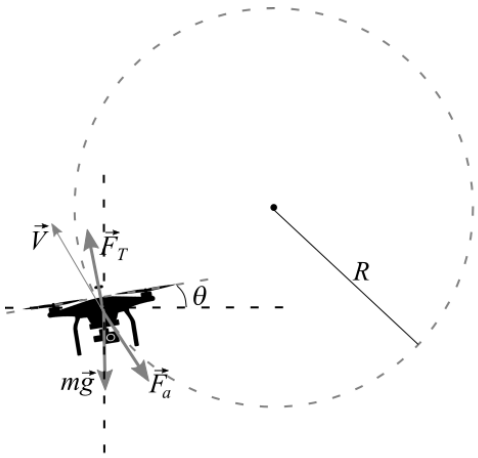
Ловушка для шарика представляет собой трубу с пружиной внутри, в которую шарик залетит только если верхний конец ловушки окажется на траектории движения шарика, а направление движения в точности совпадает с направлением трубы. Пружина в ловушке закреплена внизу, в ненапряженном состоянии ее свободный конец находится на уровне верхнего конца трубы, жесткость пружины 100 Н/м.

В какой точке относительно своего основания робот должен поместить верхнюю точку ловушки, если имеется требование, что она должна располагаться под углом 45° к горизонту? В ответе приведите координаты точки. На какое расстояние сожмется пружина в ловушке? Ускорение силы тяжести принять 10 м/с^2, трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

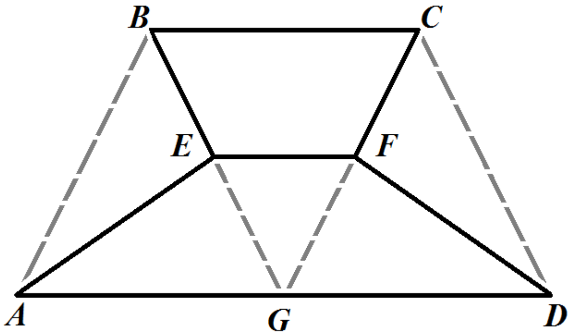


№3 (45 баллов) Квадрокоптер летает в вертикальной плоскости так, что его центр масс равномерно движется со скоростью $\boldsymbol{V}$ вдоль окружности радиуса $\boldsymbol{R}$. Суммарная сила тяги F_T, развиваемая винтами квадрокоптера, в каждый момент времени направлена перпендикулярно плоскости винтов. На квадрокоптер действует сила сопротивления среды F_a, направленная против вектора скорости центра масс и равная $\boldsymbol{cV^2}$ (где $\boldsymbol{c}$ – некоторый коэффициент, который мы для простоты будем считать постоянным). В начальный момент времени квадрокоптер находится в нижней точке траектории.

Найти максимальную и минимальную тягу, создаваемую винтами квадрокоптера при таком движении, а также зависимость угла θ наклона плоскости винтов квадрокоптера к горизонту от времени. Приведите решение данной задачи в общем виде.



№4 (20 баллов) Робот движется по ровной горизонтальной поверхности по линии (см. *траекторию*).



Траектория

Траектория представляет собой самопересекающуюся замкнутую ломаную *AEBCFD.* Известно, что треугольники *ABG, GCD, BGC* – равносторонние, точка *E* – середина *BG*, точка *F* – середина *CG*, точки *A, G, D* лежат на одной прямой.

Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, расстояние между центрами колёс составляет 27 см, диаметр колеса робота 20 см. Чтобы проехать прямолинейный участок *AD* каждое из колёс робота должно совершить 10 полных оборотов.

Все повороты робот должен совершать на месте, вращая колёса с одинаковой скоростью в противоположных направлениях. Робот не может ехать назад. При расчетах примите $\pi \approx 3$.

А) (10 баллов) Определите путь, который должен проехать робот, если по заданию всю траекторию нужно проехать 4 раза. Ответ дайте в метрах.

Б) (10 баллов) Определите, чему равен минимальный суммарный угол поворота робота, если робот проехал по данной замкнутой самопересекающейся ломаной линии **полностью один раз**. Под суммарным углом поворота понимается сумма величин углов поворотов, при этом направление углов поворотов робота не учитывается. Ответ дайте в градусах.

Ответы и решения

№1

Обозначим через l длину отрезка KC. Момент M_1 относительно точки контакта K силы тяжести mg, приложенной к центру масс C, равен

$$M_1 = mg \cdot l \cos\alpha.$$

Если центр масс C человека вместе с велосипедом движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью V, то к центру масс приложена центробежная сила

$$F = \frac{mV^2}{r}.$$

Момент M_2 этой силы относительно точки контакта K направленный в другую, по сравнению с моментом силы тяжести, сторону, равен

$$M_2 = F \cdot l \sin\alpha = \frac{mV^2}{r} \cdot l \sin\alpha.$$

Приравнивая величины M_1 и M_2, получаем, что

$$mgl\cos\alpha = \frac{mV^2}{r} \cdot l \sin\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{gr}{V^2}.$$

$$\boldsymbol{\alpha = \mathrm{arctg}\frac{gr}{V^2}}.$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{9{,}81 \times 1{,}5}{2.5 * 2.5}\right) = arctg(2{,}3544) \approx 66{,}98°$$

Ответ: α = 66,98°

№2

Начальная скорость шарика $(V_x, V_y) = (V\cos\beta, V\sin\beta)$

Текущая скорость $v_x = V_x,\quad v_y = V_y - gt$

Текущая координата $x_t = s - V_x t,\quad y_t = V_y t - \dfrac{gt^2}{2}$

Угол касательной к траектории $tg\alpha = -\dfrac{V_y - gt}{V_x}$

Отсюда находится время встречи $t_1 = \dfrac{V_x tg\alpha + V_y}{g}$ и далее координаты.

При заданных значениях углов

$$V_x = \frac{1}{2}V,\ V_y = \frac{\sqrt{3}}{2}V,\ t_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\frac{V}{g},\ x_1 = s - \frac{1+\sqrt{3}}{4}\frac{V^2}{g},\ y_1 = \frac{V^2}{4g}$$

Численный ответ $x_1 = 0.54$м, $y_1 = 0.9$м.

Для расчета сжатия пружины r записываем равенство для потенциальной энергии в конце и кинетической в начале

$$mg(y_t - \frac{\sqrt{2}}{2}r) + C\frac{r^2}{2} = m\frac{V^2}{2}.$$

При значениях $m = 0.2,\ C = 100,\ V = 6$ имеем квадратное уравнение

$$50r^2 - \sqrt{2}r - 1.8 = 0$$

Решение $r = 0.2$ м с точностью два знака после десятичной точки.

$$x_1 = 3 - \frac{1+\sqrt{3}}{4} \times \frac{36}{10} \approx 0{,}54(\text{м})$$

$$y_1 = \frac{36}{4 \times 10} = 0{,}9\ (\text{м})$$

Ответ: $x_1 = 0.54$м, $y_1 = 0.9$м, $r = 0.2$ м

№3 Обозначим угол между вектором V и восходящей вертикалью через φ. Спроектируем уравнения движения центра масс квадрокоптера на касательную и нормаль к траектории:

$$ma_\tau = 0 = -F_a - mg\cos\varphi + F_T\cos(\varphi-\theta)$$
$$ma_n = \frac{mV^2}{R} = -mg\sin\varphi + F_T\sin(\varphi-\theta) \qquad (1)$$

Отсюда получаем:

$$F_T^2 = \left(mg\cos\varphi + cV^2\right)^2 + \left(\frac{mV^2}{R} + mg\sin\varphi\right)^2 =$$
$$= m^2g^2 + \left(\frac{m^2}{R^2} + c^2\right)V^4 + 2\frac{m^2V^2g}{R}\sin\varphi + 2mgcV^2\cos\varphi =$$
$$= m^2g^2 + \left(\frac{m^2}{R^2} + c^2\right)V^4 + 2mgV^2\sqrt{\frac{m^2}{R^2} + c^2}\,\sin(\varphi+\Phi),$$
$$\Phi = \operatorname{arctg}\frac{Rc}{m}$$

Следовательно,

$$F_{T\min} = \sqrt{m^2g^2 + \left(\frac{m^2}{R^2} + c^2\right)V^4 + 2mgV^2\sqrt{\frac{m^2}{R^2} + c^2}},$$
$$F_{T\max} = \sqrt{m^2g^2 + \left(\frac{m^2}{R^2} + c^2\right)V^4 - 2mgV^2\sqrt{\frac{m^2}{R^2} + c^2}}$$

Из (1) имеем:

$$cV^2\sin(\varphi-\theta) + mg\cos\varphi\sin(\varphi-\theta) - \frac{mV^2}{R}\cos(\varphi-\theta) - mg\sin\varphi\cos(\varphi-\theta) = 0 \Rightarrow$$
$$cV^2\sin\varphi\cos\theta - cV^2\cos\varphi\sin\theta - mg\sin\theta - \frac{mV^2}{R}\cos\varphi\cos\theta - \frac{mV^2}{R}\sin\varphi\sin\theta = 0 \Rightarrow$$
$$cV^2\sin\varphi - cV^2\cos\varphi\operatorname{tg}\theta - mg\operatorname{tg}\theta - \frac{mV^2}{R}\cos\varphi - \frac{mV^2}{R}\sin\varphi\operatorname{tg}\theta = 0 \Rightarrow$$
$$\operatorname{tg}\theta = V^2\frac{cR\sin\varphi - m\cos\varphi}{cV^2R\cos\varphi + mgR + mV^2\sin\varphi}$$

Угол φ поворота вектора скорости центра масс меняется равномерно, причем в начальный момент он равен $\pi/2$, значит,

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{Vt}{R}$$

Следовательно, учитывая, что угол θ при нормальном полете квадрокоптера не превышает по модулю $\pi/2$, находим:

$$\operatorname{tg}\theta = V^2\frac{cR\cos\frac{Vt}{R} - m\sin\frac{Vt}{R}}{cV^2R\sin\frac{Vt}{R} + mgR + mV^2\cos\frac{Vt}{R}}$$

№4

А) Вычислим длину AD:

$$AD = \pi \times 20 \times 10 \approx 3 \times 200 = 600\ (\text{см})$$

$$600\ \text{см} = 6\ \text{м}$$

Длина ломаной равна:

$$P = 6 + 3 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 13{,}5 + 3\sqrt{3}\ (\text{м})$$

Длина трассы равна:

$$L = \left(13{,}5 + 3\sqrt{3}\right) \times 4 = 54 + 12\sqrt{3}\ (\text{м})$$

Ответ: $54 + 12\sqrt{3}$ м

Б)

Проведя вычисления, можно посчитать градусные меры всех углов трапеции.

Вариант 1.

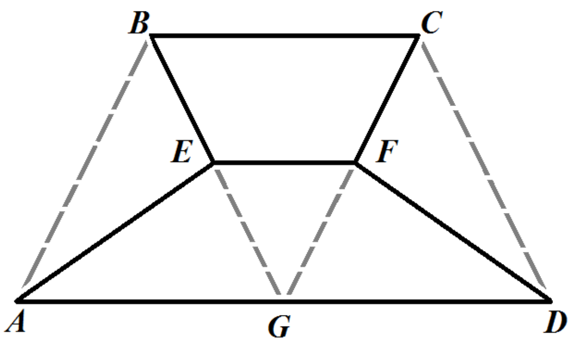
Обходить можно так:

E-B-C-F-E-A-D-F

Если поворот происходит в вершине угла, градусная мера которого меньше 180°, то величина угла поворота будет равна разности 180° и величины угла.

Тогда сумма углов поворота робота будет равна:

120°+120°+60°+30°+150°+150°=630°



Вариант 2.

Обходить можно так:

A-E-F-C-B-E-F-D-A

Тогда сумма углов поворота робота будет равна:

$$(180-150)^\circ+(180-120)^\circ+(180-60)^\circ+(180-60)^\circ+(180-120)^\circ+(180-150)^\circ+(180-30)^\circ=570^\circ$$

Ответ: 570°