

КОСМОНАВТИКА. КЛАССЫ 5 – 7

УСЛОВИЯ, РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

1. На одной далекой планете единицы измерения длины, времени и массы называются соответственно «Пье», «Пи» и «Пуа». 1 Пье=40 сантиметров, 1 Пи=100 секунд, 1 Пуа=400 грамм. Житель планеты предлагает купить у него летающий катер, разгоняющийся до скорости 40 000 Пье/Пи, с расходом топлива 12 Пуа на 100 000 Пье пробега. Найдите скорость катера в км/час и расход топлива в кг на 100 км пробега.

Решение: 1 Пье=40 см=0,4 м=0,0004 км. 1 Пи =100 с=100/3600 часа=1/36 часа. 1 Пуа=400 г=0,4 кг. Тогда $40\,000 \frac{\text{Пье}}{\text{Пи}} = 40000 \cdot 0,0004 \cdot 36 \text{ км/ч} = 576 \text{ км/ч}$. Далее, 12 Пуа на 100000 Пье = $12 \cdot 0,4 \text{ кг на } 100000 \cdot 0,0004 \text{ км} = 4,8 \text{ кг на } 40 \text{ км}$. Тогда на 100 км пробега будет $4,8 \cdot \frac{100}{40} \text{ кг} = 12 \text{ кг}$.

Ответ: 576 км/ч, 12 кг.

2. Одна морская миля (она равна 1852 м) имеет именно такую длину потому, что перемещение по меридиану Земли на одну морскую милю в точности соответствует изменению географической широты на 1 минуту (1/60 градуса). Пользуясь только этими данными, найдите радиус Земли (точнее, то значение, которое ему приписывалось на момент определения длины морской мили). Ответ дайте в км с точностью до целых. Для удобства вычислений считайте, что число $\pi = 3,15$, а Земля – идеальный шар.

Решение: Длина полуокружности $C = \pi R$ соответствует изменению широты на 180 градусов. Тогда длина дуги меридиана для одной минуты равна $\frac{\pi R}{180 \cdot 60} = 1852 \text{ м} = 1,852 \text{ км}$. Отсюда $R = 1,852 \cdot 180 \cdot \frac{60}{3,15} = 6350 \text{ км}$ (с точностью до целых). Если взять число пи более точно, то получим $R = 6360$.

Ответ: 6350 км.

3. В школе юного исследователя космоса на занятии по математике первый вызванный к доске ученик написал на доске в строку несколько целых чисел, второй записал под каждым написанным числом квадрат этого числа, третий посчитал сумму всех чисел, написанных на доске. Будет ли полученная сумма четным числом (всегда)? Или всегда нечетным? Или может быть и четным, и нечетным? Ответ обоснуйте.

Решение: Если число четно, то его квадрат тоже четен. Если число нечетно, то его квадрат тоже нечетен. Значит, складывая число с его квадратом, всегда получим четное число. Складывая несколько таким чисел, получим общую сумму – она четна.

Ответ: всегда четным.

4. Жители, населяющие планету N трех цветов: синие, красные или зеленые. Синие всегда врут зеленым, красные – синим, зеленые – красным, а во всех остальных случаях жители планеты N говорят друг другу правду. Во время дождя все жители надевают серые дождевики, полностью

скрывающие их цвет. Однажды, пережидая под навесом дождь, несколько жителей, не снимая дождевиков, разговаривали, стоя по кругу, и каждый сказал своему соседу справа: «Я – синий». Сколько среди них было зеленых?

Решение: Предположим, среди стоящих есть зеленый. Кто может стоять слева от него? Если красный, то красный скажет зеленому правду: «я красный» - противоречие. Если синий, то он скажет зеленому неправду, т.е. не скажет «я синий» - противоречие. Если зеленый, то он скажет зеленому правду: «я зеленый» - вновь противоречие. Значит, зеленых среди стоящих нет. С другой стороны, описываемая ситуация возможна. Например, если в круге стоят только синие, то они скажут друг другу правду, т.е. все скажут «я синий», что соответствует условию.

Ответ: ноль.

5. В магазине продается набор из n палочек. Все они имеют разную длину. Длина каждой палочки – целое число от 1 до 36 см включительно. Всегда ли можно выбрать из набора три палочки, соединив концы которых, можно сложить на плоскости треугольник? Рассмотрите случаи:
- а) в наборе $n = 8$ палочек,
 - б) в наборе $n = 10$ палочек.

Решение а): Рассмотрим набор 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. Никакие три палочки из такого набора не образуют треугольник, так как длина наибольшей из каждой тройки палочек больше суммы двух других длин.

Ответ: нет, не всегда.

Решение б): Занумеруем палочки по возрастанию длин. Пусть длина первой палочки равна x , а второй равна y . Чтобы третья не образовала с первыми двумя треугольник, необходимо, чтобы ее длина была $x + y$ или больше. Аналогично, длина четвертой $\geq x + 2y$. Длина пятой $\geq 2x + 3y$, длина шестой $\geq 3x + 5y$, длина седьмой $\geq 5x + 8y$, длина восьмой $\geq 8x + 13y$, длина девятой $\geq 13x + 21y$, длина десятой $\geq 21x + 34y$. Даже для минимально возможных $x = 1, y = 2$ эта длина ≥ 89 , что противоречит условию.

Ответ: да, всегда.

6. Учащийся школы юного исследователя космоса наблюдал с помощью телескопа планету Нептун в противостоянии. В процессе наблюдения Нептун постоянно выходил из поля зрения телескопа, и наблюдатель задумался – а с какой скоростью движется Нептун относительно наблюдателя? Найдите модуль этой скорости, считая, что Нептун находится в плоскости эклиптики (то есть, вращается вокруг Солнца в одной плоскости с Землей), его орбита является круговой с радиусом 30 а.е., орбиту Земли также считайте круговой. Ответ запишите в км/с (1 а.е. считайте равной 150 000 000 км, период обращения Нептуна по своей орбите 60 190 дней).

Решение: Скорость движения Нептуна по орбите относительно Солнца будет равна длине окружности орбиты, деленной на орбитальный период планеты. То есть,

$$v_N = \frac{2\pi a_N}{P_N} = \frac{2\pi \cdot 30 \cdot 150\,000\,000}{60190 \cdot 86400} \approx 5,44 \frac{\text{км}}{\text{с}},$$

где a_N – радиус орбиты Нептуна в километрах, а P_N – его орбитальный период в секундах. Скорость движения Земли по орбите относительно Солнца составляет приблизительно

$$v_G = \frac{2\pi a_G}{P_G} = \frac{2\pi \cdot 150\,000\,000}{365,25 \cdot 86400} \approx 29,87 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Земля и Нептун двигаются по своим орбитам в одном и том же направлении, Земля обгоняет Нептун примерно на 24,4 км/с, это и есть скорость, с которой Нептун движется относительно земного наблюдателя.

Ответ: 24,43 км/с.

КОСМОНАВТИКА. КЛАССЫ 5 – 7

КРИТЕРИИ

| Задача/ баллы | 1 | 2 | 3 | 4 | 5а | 5б | 6 |
|------------------|---|--|--|---|--------------------------------------|--------------------------------------|--|
| 20 | - | - | - | - | - | - | Решение верное, полностью обосновано |
| 18 | - | - | - | - | - | - | Ответ почти верный (погрешность больше 0,1 км/с) и обоснованный |
| 17 | - | - | - | - | - | - | Все верно, но в обосновании не указывается, что направление вращения Земли и Нептуна совпадают |
| 15 | Решение верное, полностью обосновано | Решение верное, полностью обосновано | Решение верное, полностью обосновано | Решение верное, полностью обосновано | - | - | Идея верная, решение содержит арифметическую ошибку <i>или</i> оба замечания (см. выше) |
| 13 | Незначительная арифметическая ошибка при нахождении одной из величин, другая найдена верно <i>или</i> одна из величин найдена не в тех единицах | Ответ неверный вследствие незначительной арифметической ошибки | - | Решение верное, но не приведен пример, показывающий, что описываемая в задаче ситуация возможна | - | - | - |
| 10 | Существенная арифметическая ошибка при нахождении одной из | Верно найдена длина большого круга, далее ошибка <i>или</i> ошибка | Неверно понято условие, но далее рассуждения верные <i>или</i> | Верный ответ, обоснование содержит пробелы | Решение верное, полностью обосновано | Решение верное, полностью обосновано | |

| | | | | | | | |
|---|--|---|--|---|--|--|--|
| | величин или одна из величин не найдена, другая найдена верно | при нахождении длины большого круга, дальше рассуждения верные | верный ответ, обоснование содержит пробелы | | | | |
| 8 | - | - | - | - | Есть пример, но ошибки в обосновании | Верная идея, обоснование неполное | - |
| 5 | Обе величины найдены с ошибками, хотя логика решения верная <i>или</i> ответ верный хотя бы для одной из величин, но нет решения | Верно найдено количество миль в одном градусе, дальше решение с ошибками <i>или</i> есть верное представление о величине радиуса Земли, но задача не решена | Ответ верный, обоснование отсутствует <i>или</i> проведено для частного случая | Верный ответ, нет обоснования <i>или</i> есть рассуждения, но ответ неверный вследствие логической ошибки | Есть верная идея, но к последовательности длин добавляется лишняя единица, вследствие чего ответ неверный | Ответ верный, но рассуждение опирается на неверный ответ пункта а) <i>или</i> доказательство проведено для частного случая | Неверная логика решения (найден не то, что спрашивалось в условии) |
| 2 | Найдена только одна из величин, причем с ошибкой | Решение содержит грубые ошибки, но какой-то ответ получен | Есть рассуждения про четность, но ответ неверный | Приводится только ответ (частично верный) | Есть рассуждения о неравенстве треугольника, но ответ не обоснован (может быть верным <i>или</i> неверным) | Есть рассуждения о неравенстве треугольника, но ответ не обоснован (может быть верным <i>или</i> неверным) | - |

КОСМОНАВТИКА. КЛАССЫ 8, 9.
УСЛОВИЯ, РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

1. Функция $f(t)$ описывает траекторию струи воздуха при движении космического аппарата в атмосфере (здесь t – время). Функция определена на всей числовой прямой и для каждого t удовлетворяет уравнению

$$f(t) + t \cdot f(1 - t) = \frac{t + 1}{t^2 - t + 1}.$$

Найдите $f(5)$.

Решение:

Подставим $t = 5, t = -4$ в заданное уравнение на $f(t)$ и получим систему линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} f(5) + 5f(-4) = \frac{2}{7} \\ f(-4) - 4f(5) = \frac{-1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(5) = \frac{1}{21} \\ f(-4) = \frac{1}{21} \end{cases}$$

Ответ: $f(5) = \frac{1}{21}$

2. Второй космической скоростью V_{2k} называется минимальная скорость, которую нужно сообщить в вертикальном направлении телу для того, чтобы оно неограниченно удалилось от поверхности планеты, причем его скорость на бесконечно большом расстоянии от планеты стала равной нулю. Известно, что для Земли $v_{2k} = 11,2$ км/с. Какова будет скорость V_{∞} тела на бесконечно большом расстоянии от Земли, если на поверхности Земли сообщить ему вертикальную скорость $u = 12,2$ км/с? Влиянием вращения Земли вокруг оси и притяжением других небесных тел можно пренебречь. Ответ приведите в км/с, округлив до сотых.

Решение:

Из определения второй космической скорости и из закона сохранения механической энергии следует, что $\frac{mv_{2k}^2}{2} = \Delta E_{\text{п}}$, где m – масса тела, $\Delta E_{\text{п}}$ – приращение потенциальной энергии тела при перемещении его с поверхности Земли в бесконечно удаленную точку. Если начальная скорость тела равна $u > v_{2k}$, то $\frac{mu^2}{2} = \Delta E_{\text{п}} + \frac{mv_{\infty}^2}{2}$. Из записанных равенств получаем, что $V_{\infty} = \sqrt{u^2 - v_{2k}^2}$

Ответ: $V_{\infty} = \sqrt{u^2 - v_{2k}^2} \approx 4,84$ км/с

3. Пять выключателей расположены последовательно в ряд. Каждый может находиться в одном из двух положений – выключено (обозначается нулем) и включено (обозначается единицей). Свет включается, если есть пара выключателей, которая включена, и эти выключатели не являются соседями в ряду из единиц.

Вводятся пять чисел, каждое из которых равно 0 или 1. Требуется вывести YES, если свет загорится и NO в противном случае.

Пример:

Ввод: 1 0 1 1 0

Вывод: YES

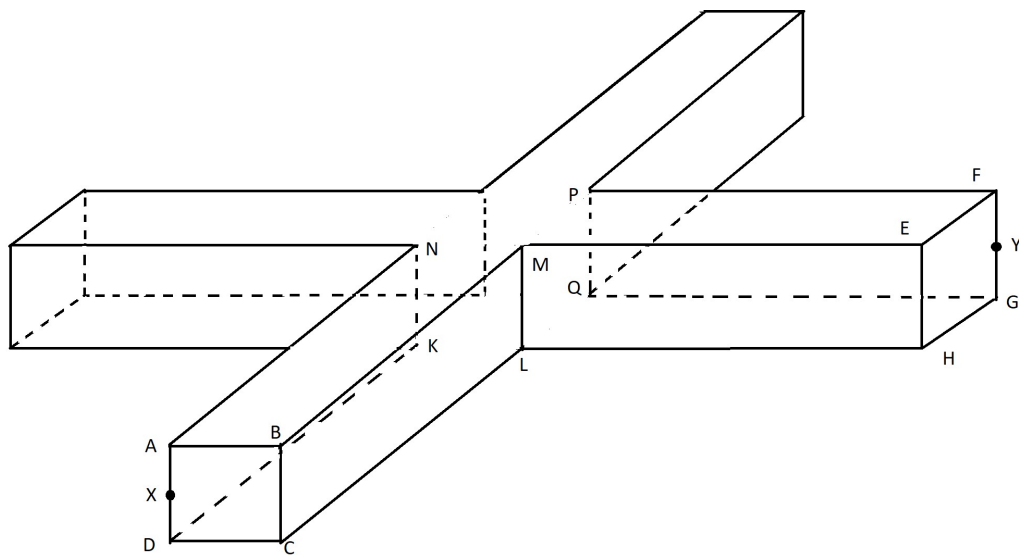
Ввод: 1 1 1 0 0

Вывод: NO

Решение: Ниже приведено одно из возможных решений на языке Python:

```
l = input("Введите строку без пробелов:")
if (l.find("101")!=-1)or(l.find("1001")!=-1)or(l.find("10001")!=-1):
    print('Yes')
else:
    print('No')
```

4. Космическая станция составлена из центрального куба и четырех одинаковых прямоугольных параллелепипедов (см. рисунок), длина которых в $k = 4$ раза больше двух других размеров:



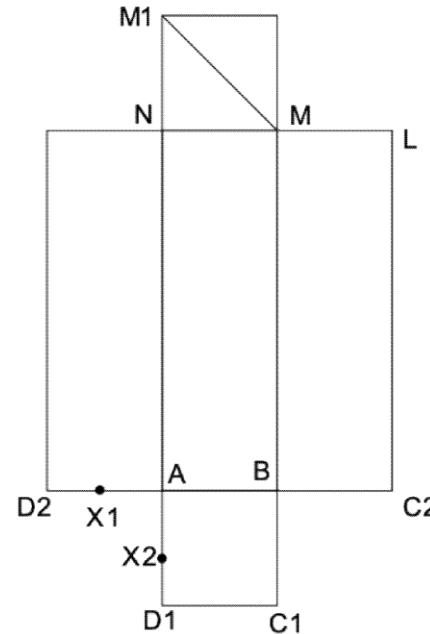
$$AN = DK = BM = CL = PF = QG = ME = LH \\ = 4AB = 4BC = 4EF = 4FG.$$

Космонавту, вышедшему в открытый космос, необходимо добраться из точки X – середины ребра AD , в точку Y – середину ребра FG по поверхности станции. Проложите кратчайший маршрут.

Решение:

Заметим, что в силу симметрии станции, можно поверхности станции. Обозначим дополнительно Любой путь их X в Y пересекает плоскость (MLM_1) . оптимальный путь симметричен относительно кратчайший путь от точки X до сечения (MLM_1L_1) по на верхнюю плоскость, сделав разрез по AD и BC :

Таким образом, точке X на развертке соответствуют этих точек до ломаной M_1ML , что соответствует искомый путь будет состоять из двух таких из X_1 . Угол $\angle M_1MX_1$ тупой, значит перпендикуляр M , и значит ближайшая к X_1 точка на отрезке – ближайшая точка к X_1 на отрезке ML , а значит и на иметь длину $\sqrt{73}$. Аналогично можно проверить, точки X_2 . Находим $X_2M = \sqrt{85}/2$, а весь путь будет кратчайший путь на развертке X_1M (итоговый путь относительно MM_1).



считать, что путь проходит только по верхней оставшиеся вершины центрального куба M_1 и L_1 . Тогда в силу симметрии станции очевидно, что плоскости (MLM_1) . Таким образом осталось найти верхней поверхности станции. Сделаем развертку

точки X_1 и X_2 . Остается найти кратчайший путь от пути по поверхности до сечения MLM_1L_1 , а весь симметричных путей. Рассмотрим путь, выходящий из точки X_1 падает на продолжение MM_1 за точку точка M . Аналогично $\angle LM_1X_1$ – тупой, значит M и всей ломаной. $X_1M = \sqrt{73}/2$, а весь путь будет что M также ближайшая точка ломанной и для иметь длину $\sqrt{85}$. Таким образом выбираем получается его симметричным отражением

5. На борту Российского сегмента Международной пищи космонавтам нужно воспользоваться воды из конденсата атмосферной влаги (СРВ-К2М). Эта система подогревает нужный объем воды с требуемыми характеристиками и позволяет через краник заправлять пакеты с сублимированной пищей. В агрегате установлен нагревательный элемент сопротивлением R , подключенный к источнику постоянного тока с внутренним сопротивлением $r < R$. Случилось так, что нагревательный элемент сломался, причем аналогичного элемента на борту МКС не оказалось. Можно ли заменить элемент другим, с сопротивлением $R' < r$ и таким, чтобы время подогрева не изменилось?

Решение: Пусть ЭДС источника тока равна \mathcal{E} . Общее сопротивление равно $r + R$. По закону Ома сила тока равна $I = \frac{\mathcal{E}}{r+R}$, а напряжение в цепи $U = IR = \frac{\mathcal{E}R}{r+R}$. В таком случае мощность нагревателя $P = IU = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(r+R)^2}$. Чтобы время нагрева при замене элемента не поменялось, R' должно быть решением уравнения $P(R') = P(R)$. Решая уравнение находим, что $R' = \frac{r^2}{R} < r$ – удовлетворяет условию.

Ответ: Да, это возможно, $R' = \frac{r^2}{R}$

космической станции для приготовления горячей специальным агрегатом – системой регенерации

6. Известно, что ось вращения Урана практически в точности лежит в плоскости эклиптики (плоскость, в которой лежит орбита Земли при вращении вокруг Солнца), а вращение Урана вокруг Солнца тоже практически в точности происходит в этой плоскости. Спутник Урана Титания вращается в плоскости экватора планеты (период обращения спутника составляет около 209 часов). Опишите, какие фазы спутника может наблюдать житель Урана в течение одного витка Титании и как они могут меняться в течение этого витка.

Решение: Ось вращения Урана лежит очень близко к плоскости его орбиты (то есть, планета фактически вращается «лежа на боку»), при этом направление этой оси в пространстве остается постоянным. Таким образом, Уран в ходе своего орбитального движения может быть ориентирован в сторону Солнца одним из своих полюсов, экватором, либо любой параллелью между экватором или полюсом. Год на Уране многократно больше как периода осевого вращения планеты, так и периодов обращения всех его спутников вокруг планеты. Поэтому в ходе одного или нескольких оборотов спутника вокруг планеты характер смены его фаз почти не будет меняться. В то же время в разных частях орбиты Урана при движении вокруг Солнца этот характер будет меняться весьма сильно. Так как плоскость орбиты Титании близка к экваториальной плоскости Урана, то:

- а. когда ось вращения Урана близка к направлению на Солнце, то смены фаз практически не будет, наблюдатель будет со стороны планеты видеть фазу, близкую к четверти в любой точке орбиты спутника,
- б. когда Уран ориентирован на Солнце экватором или близкой к экватору областью, то может наблюдаться полная смена фаз и даже могут иметь место частичные затмения Солнца спутником и полные и длительные затмения спутника планетой,
- с. когда Уран ориентирован на Солнце параллелью с широтой, существенно отличающейся от экватора или полюса, то будет иметь место промежуточное состояние, а именно, частичная смена фаз будет иметь место, но не будет ни фазы «полнотитании» (аналога полнолуния), ни фаз «новотитании» (аналога новолуния).

Изменение фаз поддается количественному подсчету, но в данной задаче не требуется, необходимо качественное понимание того, что в силу конфигурации плоскости орбиты спутника, плоскостей орбиты и экватора планеты характер смены фаз спутника будет меняться в течение уранианского года.

КОСМОНАВТИКА. КЛАССЫ 8-9. КРИТЕРИИ

Критерии 1:

10 баллов – задача решена верно

8 баллов – допущена арифметическая ошибка, приведшая к неверному решению системы

6 баллов – Предложена некоторая f , удовлетворяющая уравнению, для нее вычислено $f(5)$, единственность такой f не обоснована.

4 балла – составлена верная система, но не решена или решена неверно из-за ошибок в понимании задачи

0 баллов – нет существенных продвижений.

Критерии 2:

10 баллов – задача решена верно

- 8 баллов** – верный ответ, небольшие пробелы в обосновании
6 баллов – верный ответ с существенными ошибками в обосновании
4 балла – нет решения, но выписан закон сохранения, возможно с ошибками
0 баллов – нет верных идей

Критерии 3:

- 15 баллов** – задача решена верно
8 баллов – решение в целом верное, но есть синтаксические ошибки
8 баллов – неверно понято условие – под «соседями в ряду» понято любые два числа, стоящие рядом (что противоречит примерам из условия); с этим условием верное решение
3 балла – есть разумная, но неверная программа
0 баллов – все остальное

Критерии 4:

- 20 баллов** – найден кратчайший путь с обоснованием
16 баллов – найден кратчайший путь, но есть пробел в обосновании, или найден путь X_2M
12 баллов – Предъявлен один из двух путей X_1M или X_2M , без обоснования
4 балла – Предъявлен путь длины меньше 10.
0 баллов – Предъявлен путь длины больше или равной 10, или предъявлен путь, проходящий не по поверхности станции.

Критерии 5:

- 20 баллов** – верное решение, верный ответ
16 баллов – верно найдена связь между R и R' , допущена ошибка при выражении R'
12 баллов – верно найдена связь между R и R' , не удалось выразить R'
8 балла – ответ неверный, но в решении есть формулы, отражающие изменение силы тока в цепи (появляется ЭДС или законы Кирхгофа)
4 балла – ответ неверный, выписаны какие-то верные формулы (например, формула мощности)
0 баллов – нет верных идей

Критерии 6:

- 20 баллов** – указано, что если Уран ориентирован осью вращения не Солнце, то нет смены фаз, если экватором, то полная смена фаз, а между этими крайними положениями есть промежуточные варианты.
16 баллов – указаны крайние варианты (есть полная смена фаз, нет смены фаз, но не упомянуты промежуточные варианты).
4 балла – указан один из крайних вариантов (либо есть полная смена фаз, либо нет смены фаз).
2 балл – указан один из крайних вариантов и есть дополнительные ошибки в рассуждениях.