Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2021/22 учебного года для 10 класса

Задача 1. Найдите наименьшее натуральное число, обладающее следующим свойством: остаток от его деления на 20 на единицу меньше остатка от его деления на 21, а остаток от его деления на 22 равен 2.

Ответ: 838.

Решение. Искомое число равно $20k+a=21l+a+1=22m+2$, где $0\leqslant a\leqslant 19$ и $l,k,m\geqslant 0$. Из первого равенства и сравнения по модулю 20 получаем, что $l+1\equiv 0 \pmod{20}$. Так как ищем наименьшее число, то попробуем $l=19$, если это l не подойдёт, то рассмотрим $l=19+20=39$ и так далее. Ищем искомое число в виде $21\cdot 19+a+1=22m+2$, сравниваем по модулю 22: $3+a+1\equiv 2 \pmod{22}$, следовательно, $a\equiv 20 \pmod{22}$, что невозможно. Теперь ищем искомое число в виде $21\cdot 39+a+1=22m+2$, значит, $5+a+1\equiv 2 \pmod{22}$, то есть $a\equiv 18 \pmod{22}$. Число $21\cdot 39+18+1=838$ удовлетворяет условию и наименьшее по построению.

Задача 2. Треугольная пирамидка, все рёбра которой имеют длину 6 см, стоит на плоском столе. Пирамидку перекатывают по столу через рёбра 6 раз таким образом, что одна из её вершин всё время остаётся неподвижной, при этом два раза подряд через одно и то же ребро пирамидку не перекатывают. Найдите длину траектории, по которой за время этих перекатываний перемещается подвижная вершина пирамиды.

Ответ: $(\pi-\arccos\frac{1}{3})\cdot 12\sqrt{3}$ см.

Решение. Обозначим пирамидку $ABCD$. Пусть A — неподвижная вершина, а вершина D в начальный момент не касается поверхности стола. Пусть первое перекатывание осуществляется через ребро AB. Вершина D при этом перекатывании перемещается по дуге окружности с центром в середине H ребра AB и радиусом, равным апофеме пирамидки, то есть $3\sqrt{3}$ см. По теореме косинусов из треугольника CDH находим, что $\cos\angle CHD=\frac{1}{3}$, поэтому на дугу окружности, по которой движется точка D, опирается центральный угол величиной $\pi-\arccos\frac{1}{3}$. Значит, длина этой дуги равна $(\pi-\arccos\frac{1}{3})\cdot 3\sqrt{3}$ см.
При втором перекатывании (через ребро AD) точка D остается неподвижной, при третьем (через рёбро AB) проходит по дуге такой же длины, как при первом перекатывании, а следующие три перекатывания происходят аналогично первым трём, и в результате пирамидка возвращается в исходное положение. При этом точка D перемещается по траектории длиной $4\cdot(\pi-\arccos\frac{1}{3})\cdot 3\sqrt{3}$ см.

Задача 3. Найдите три последние цифры числа $10^{2022}-9^{2022}$.

Ответ: 119.

Решение. Так как $A=\ 10^{2022}-(10-1)^{2022}=10^{2022}-10^{2022}+2022\cdot 10^{2021}-C_{2022}^{2}\cdot 10^{2022}+\ldots+C_{2022}^{3}\cdot 10^{3}-C_{2022}^{2}\cdot 10^{2}+C_{2022}^{1}\cdot 10-1$, то $A \pmod{1000}\equiv -C_{2022}^{2}\cdot 100+C_{2022}^{1}\cdot 10-1(\mathrm{mod}\ 1000)\equiv -\frac{2022\cdot 2021\cdot 100}{2}+20220-1(\mathrm{mod}\ 1000)\equiv -100+220-1\equiv 119$.

Задача 4. По окружности выписаны 2022 единицы. Два игрока ходят по очереди: за один ход игрок стирает два соседних числа из написанных и пишет вместо них их сумму (один раз). Выигрывает тот, кто получит число 4. Если в конце игры остаётся одно число, не равное 4, игра оканчивается вничью. Может ли кто-то из игроков обеспечить себе победу, и если да, то каким образом?

Ответ: Выиграет второй.

Решение. Выигрывает второй. Стратегия: повторять ходы первого игрока симметрично относительно центра окружности до тех пор, пока после хода первого игрока не возникнут либо две соседствующие двойки, либо тройка, соседствующая с единицей. В этих случаях второй игрок перехватывает инициативу и побеждает.

Почему такие ситуации непременно должны возникнуть? Почему игру нельзя свести к ничьей? Давайте представим, что на поле пока ещё нет чисел больше двух. Если игра идёт, то рано или поздно должны появиться числа, большие двух. Как это произойдёт? Из единиц и двоек можно сложить либо тройку, либо четвёрку. Четвёрка складывается из двух соседствующих двоек и приносит победу. Если после хода первого игрока на поле нет 2 2, то и после зеркального хода второго 2 2 на поле не появится. Если первый допустил 2 2, то второй побеждает.

Значит, рассмотрим тройку. Чтобы тройка не привела второго к победе, нужно, чтобы с ней не соседствовала единица, то есть на поле нужно сочетание 2 3 2. А как могло выглядеть это поле ход назад? 2 (2 1) 2, опять получаем двойки по соседству.

Поэтому появления плохой для себя комбинации первый игрок избежать не может.

Задача 5. Число a таково, что уравнение $t^3+4t^2+4t+a=0$ имеет три действительных корня $x<y<z$. Определите, какие числовые значения может принимать выражение

$$A=x^3-4y^2-4z^2-4y-4z+32.$$

Ответ: $\left(14\frac{22}{27};16\right)$.

Решение. Пусть $P\left(t\right)=t^3+4t^2+4t+a=\left(t-x\right)\left(t-y\right)\left(t-z\right)$. Тогда $x+y+z=-4, xy+yz+xz=4, xyz=-a$ (это получается или по теореме Виета, или прямым сравнением левой и правой части). Далее $A=x^3-4y^2-4z^2-4y-4z+32=\left(-4x^2-4x-a\right)-4y^2-4z^2-4y-4z+32=-4\left(x^2+y^2+z^2\right)-4\left(x+y+z\right)-a+32=-4\left(x+y+z\right)^2+8\left(xy+yz+zx\right)-4\left(x+y+z\right)-a+32=-4\cdot\left(-4\right)^2+8\cdot 4-4\cdot\left(-4\right)-a+32=16-a$. Осталось выяснить, при каких значениях а данное кубическое уравнение имеет три различных корня. Запишем уравнение в виде $a=-t^3-4t^2-4t=-t\left(t+2\right)^2$ и найдем экстремумы функции в правой части (например, с помощью производной, хотя можно обойтись и без неё). Получается, что эта функция имеет локальный минимум 0 в точке $t=-2$ и локальный максимум $\frac{32}{27}$ в точке $t=-\frac{2}{3}$. Это означает, что 3 различных корня у уравнения будет при $a\in\left(0;\frac{32}{27}\right)$. Значит, $A=16-a\in\left(16-\frac{32}{27};\ 16\right)=\left(14\frac{22}{27};16\right)=\left(\frac{400}{27};16\right)$.

Задача 6. Найдите координаты всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от всех точек пересечения парабол, заданных в декартовой системе координат на плоскости уравнениями $y=2x^2-1$ и $x=4y^2-2$.

Ответ: $\left(\frac{1}{8};\frac{1}{4}\right)$.

Решение. Изобразив параболы с данными уравнениями, легко заметить, что они имеют 4 общие точки. Значит, равноудалённая от них точка может быть максимум одна. Перепишем уравнения парабол в виде $x^2-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}=0$ и $y^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}=0$ и сложим. Получим уравнение

$$x^2+y^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y-1=0\Longleftrightarrow\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{69}{64}.$$

Это уравнение окружности с центром $\left(\frac{1}{8};\frac{1}{4}\right)$ радиуса $\frac{\sqrt{69}}{8}$, и ему удовлетворяют координаты всех точек пересечения парабол, а центр окружности равноудалён от этих точек пересечения.

Задача 7. Есть некоторое количество одинаковых целлофановых пакетов, которые можно вкладывать друг в друга. Если внутри одного из пакетов оказались все остальные пакеты, назовём такую ситуацию «пакетом пакетов». Посчитайте, сколькими способами можно сложить «пакет пакетов» из 10 пакетов.

Пояснение. Обозначим скобочками пакет.
Если у нас был один пакет, то способ сложить «пакет пакетов» всего один: ().
Два пакета тоже можно сложить всего одним способом: (()).
Три пакета можно сложить двумя разными способами: (()()) *и* ((())), *и т.д.*
Порядок пакетов внутри пакета неважен. Например, вариант ((())()) *не отличается от* (()(())).

Ответ: 719.

Решение. Если Π_n обозначает число способов для n пакетов, то:

$$\Pi_1 = 1, \Pi_2 = 1, \Pi_3 = 2, \Pi_4 = 4, \Pi_5 = 9, \Pi_6 = 20, \Pi_7 = 48, \Pi_8 = 115, \Pi_9 = 286,$$

$$\Pi_{10} = 719.$$

Решается задача перебором вариантов. Например, если возьмём Π_5 :
$\Pi_5 = P_4 + P_3 + P_2 + P_1$, где P_k — число способов, соответствующих случаю, когда в корневом пакете находится k пакетов.
$P_4 = 1$, способ всего один: $(()()()())$.
$P_3 = 1$, способ тоже один: $((())()())$.
$P_2 = 3$, способов разбить 4 пакета на 2 кучки два: 3 и 1, 2 и 2. Первому способу соответствует $(\Pi_3())$ — два варианта, второму способу — один вариант, $((())(()))$.
$P_4 = \Pi_4$ способов: (Π_4).
В сумме получается 1+1+(2+1)+4=9.
С ростом n возникнут случаи, когда надо внимательно относиться к комбинаторике. Скажем, 8 пакетов можно разместить так: $(\Pi_3\ \Pi_3\ \Pi_1)$, а можно так: $(\Pi_3\ \Pi_2\ \Pi_2)$. Во втором случае это будет $\Pi_3 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_2 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ способа, а в первом — не $\Pi_3 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_1 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, а на самом деле всего три, потому что порядок расположения тройных пакетов не важен.

Задача 1. На гранях шестигранного игрального кубика расставлены числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Кубик бросают, и он падает на стол. После этого видны числа на всех гранях, кроме одной. Числа на пяти видимых гранях перемножаются. Найдите вероятность того, что это произведение делится на 16.

Ответ: $0,5$.

Решение. Если на невидимой грани нечётное число, то в произведении пяти оставшихся чисел присутствуют 2, 4 и 6, и оно делится на 16. Если на невидимой грани чётное число, то произведение остальных пяти цифр на 16 не делится – в его разложении на простые множители не будет четырёх двоек.

Задача 2. Найдите количество натуральных чисел, не превышающих 2022 и не входящих ни в арифметическую прогрессию $1, 3, 5, \ldots$, ни в арифметическую прогрессию $1, 4, 7, \ldots$

Ответ: 674.

Решение. Эти две прогрессии задают числа вида $1 + 2n$ и $1 + 3n$. Это означает, что искомые числа есть числа вида $6n$ и $6n - 4$, $n \in \mathbb{N}$. Так как 2022 кратно 6, то чисел вида $6n$ будет $\frac{2022}{6} = 337$, и чисел вида $6n - 4$ будет столько же. Значит, всего чисел $337 \cdot 2 = 674$.

Задача 3. Найдите три последние цифры числа $10^{2022} - 9^{2022}$.

Ответ: 119.

Решение. Так как $A = 10^{2022} - (10-1)^{2022} = 10^{2022} - 10^{2022} + 2022 \cdot 10^{2021} - C^2_{2022} \cdot 10^{2022} + \ldots + C^3_{2022} \cdot 10^3 - C^2_{2022} \cdot 10^2 + C^1_{2022} \cdot 10 - 1$, то $A \pmod{1000} \equiv -C^2_{2022} \cdot 100 + C^1_{2022} \cdot 10 - 1 \pmod{1000} \equiv -\frac{2022 \cdot 2021 \cdot 100}{2} + 20220 - 1 \pmod{1000} \equiv -100 + 220 - 1 \equiv 119$.

Задача 4. Семейство Дурслей скрывает Гарри Поттера на острове, который находится на расстоянии 9 км от берега. Берег прямолинейный. На берегу, в 15 километрах от той точки берега, которая ближе всего к острову, находится Хагрид на волшебном мотоцикле, и он хочет добраться до Гарри как можно быстрее. По побережью мотоцикл едет со скоростью 50 км/час, а над морем летит со скоростью 40 км/час. План у Хагрида такой: сначала проехать X километров по побережью, а потом взять курс напрямик на остров. Какое значение X наилучшим образом подходит для целей Хагрида?

Ответ: 3.

Решение. Пусть A — точка, откуда едет Хагрид, B — остров, а C — точка, где мотоцикл повернул в море. Время поездки $t = \frac{AC}{50} + \frac{BC}{40} = pAC + qBC = q(\frac{p}{q}AC + BC)$, где $p = \frac{1}{50}, q = \frac{1}{40}$. Значит, мы стремимся минимизировать $\frac{p}{q}AC + BC$. Отметим на берегу произвольную точку D, построим на AD как на диаметре окружность радиуса $q \cdot s : 2$ (s произвольное). Нарисуем окружность с центром в D и радиусом $p \cdot s$, пусть эта окружность пересекает первую на суше в точке E. На прямую AE опустим перпендикуляр BF, и он будет пересекать береговую линию в наилучшей точке C.

Докажем, что $\frac{p}{q}AC + BC$ минимально. Из подобия треугольников AFC и AED следует, что $CF/AC = DE/AD = \frac{p}{q}$, $CF = \frac{p}{q}AC$, то есть $\frac{p}{q}AC + BC = BF$. Если взять на побережье любую другую точку M и оценить $\frac{p}{q}AM + BM$, то получится следующее. $\frac{p}{q}AM + BM = KM + MB$, где KM — перпендикуляр из K на AE. А в свою очередь $KM + MB > BK > BF$.

Пусть L — ближайшая к острову точка берега. Треугольники BCL и ACF подобны, откуда $CL = \frac{BL \cdot CF}{AF}$. Следовательно, $CL = 12$ и $AC = X = 3$.

Задача 5. Найдите все значения x, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = x^3 - 100x, \quad b = x^4 - 16, \quad c = x + 20 - x^2$$

положительно (*средним* из трёх данных чисел a, b, c называется число v в тройке $u \leqslant v \leqslant w$, получаемой в результате упорядочения данных чисел по нестрогому возрастанию).

Ответ: $-10 < x < 0$, $2 < x < 5$, $x > 10$.

Решение. Среднее из трёх чисел положительно тогда и только тогда, когда положительны хотя бы два из трёх чисел. Решая соответствующую совокупность из систем двух неравенств, получим ответ.

Задача 6. Точка A на плоскости находится на одинаковом расстоянии от всех точек пересечения двух парабол, заданных в декартовой системе координат на плоскости уравнениями $y = -3x^2 + 2$ и $x = -4y^2 + 2$. Найдите это расстояние.

Ответ: $\frac{\sqrt{697}}{24}$.

Решение. Изобразив параболы с данными уравнениями, легко заметить, что они имеют 4 общие точки. Значит, равноудалённая от них точка может быть максимум одна. Перепишем уравнения парабол в виде $x^2 + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3} = 0$ и $y^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0$ и сложим. Получим уравнение

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y - \frac{7}{6} = 0 \Longleftrightarrow \left(x + \frac{1}{8}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{697}{576}.$$

Это уравнение окружности с центром $\left(-\frac{1}{8}; -\frac{1}{6}\right)$ радиуса $\frac{\sqrt{697}}{24}$, и ему удовлетворяют координаты всех точек пересечения парабол, а центр окружности удалён от этих точек пересечения на расстояние, равное радиусу окружности.

Задача 7. Есть некоторое количество одинаковых целлофановых пакетов, которые можно вкладывать друг в друга. Если внутри одного из пакетов оказались все остальные пакеты, назовём такую ситуацию «пакетом пакетов». Посчитайте, сколькими способами можно сложить «пакет пакетов» из 10 пакетов.

Пояснение. Обозначим скобочками пакет.
Если у нас был один пакет, то способ сложить «пакет пакетов» всего один: ().
Два пакета тоже можно сложить всего одним способом: (()).
Три пакета можно сложить двумя разными способами: (()()) *и* ((())), *и т.д.*
Порядок пакетов внутри пакета неважен. Например, вариант ((())()) *не отличается от* (()(())).

Ответ: 719.

Решение. Если Π_n обозначает число способов для n пакетов, то:

$$\Pi_1 = 1, \Pi_2 = 1, \Pi_3 = 2, \Pi_4 = 4, \Pi_5 = 9, \Pi_6 = 20, \Pi_7 = 48, \Pi_8 = 115, \Pi_9 = 286,$$

$$\Pi_{10} = 719.$$

Решается задача перебором вариантов. Например, если возьмём Π_5 :
$\Pi_5 = P_4 + P_3 + P_2 + P_1$, где P_k — число способов, соответствующих случаю, когда в корневом пакете находится k пакетов.
$P_4 = 1$, способ всего один: (()()()()).
$P_3 = 1$, способ тоже один: ((())()()).
$P_2 = 3$, способов разбить 4 пакета на 2 кучки два: 3 и 1, 2 и 2. Первому способу соответствует (Π_3()) — два варианта, второму способу — один вариант, ((())(())).
$P_4 = \Pi_4$ способов: (Π_4).
В сумме получается 1+1+(2+1)+4=9.
С ростом n возникнут случаи, когда надо внимательно относиться к комбинаторике. Скажем, 8 пакетов можно разместить так: (Π_3 Π_3 Π_1), а можно так: (Π_3 Π_2 Π_2). Во втором случае это будет $\Pi_3 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_2 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ способа, а в первом — не $\Pi_3 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_1 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, а на самом деле всего три, потому что порядок расположения тройных пакетов не важен.

Π_6.

P_5 : (( ) ( ) ( ) ( ) ( )) +1

P_4 : ((( )) ( ) ( ) ( )) +1

P_3 : (( ) ( ) ( ))

Остается распихать 2 пакета: → 2 0 → 1 1

▷ ((( )) (( )) ( )) 1 1 +1

▷ (( ) ( ) ( ))

$\underbrace{2}_{3} \Rightarrow \Pi_3 \Rightarrow$ +2

P_2 : (( ) ( ))

Остаётся распихать 3 пакета: → 3 0 → 2 1

▷ (( ) ( ))

$\underbrace{3}_{4} \Rightarrow \Pi_4 \Rightarrow$ +4

▷ (( ) (( )))

$\underbrace{2}_{3} \Rightarrow \Pi_3 \Rightarrow$ +2

P_1: $(\,(\quad)\,)$

$\underbrace{\quad 4 \quad}_{5} \Rightarrow \Pi_5 \Rightarrow +9$

$\Pi_6 = P_5 + P_4 + P_3 + P_2 + P_1 = 3 + 4 + 4 + 9 =$

$= 20.$

Π_7

P_6: $(\,(\;)(\;)(\;)(\;)(\;)(\;)\,)$ $+1$

P_5: $(\,(())(\;)(\;)(\;)(\;)\,)$ $+1$

P_4: $(\,(\;)(\;)(\;)(\;)\,)$

Остаётся распихать 2 пакета: → 2 0, → 1 1 $+3$ (см P_3 выше)

P_3: $(\,(\;)(\;)(\;)\,)$

Остаётся распихать 3 пакета:
- 1 1 1 $+1$
- 2 1 0 $\Pi_3 = +2$
- 3 0 0 $\Pi_4 = +4$

P_2: $(\,(\ )\ \ (\ )\,)$

Остаётся распихать 4 пакета: 4 0, 3 1, 2 2

$П_5 = +5$

$П_4 = +4$

22: $(\ (()())\ \ (()())\ )$

$(\ ((()))\ \ (()())\ )$ $+3$

$(\ ((()))\ \ ((()))\ )$

P_1: $(\,(\underbrace{\quad\quad\quad}_{6}\,)\,)$ 5

$\Rightarrow П_6$ $+20$

$П_7 = P_6 + P_5 + P_4 + P_3 + P_2 + P_1 =$

$= 20 + 3 + 13 + 7 + 5 = 48$

$П_8$

P_7: $(\,(\ )(\ )(\ )(\ )(\ )(\ )(\ )\,)$ $+1$

P_6: $+1$

P_5: $+3$

P_4: (( ) ( ) ( ) ( ))

Остаётся расписать 3 пакета

$$\begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \qquad +7$$

P_3: (( ) ( ) ( ))

Остается расписать 4 пакета

$$\left.\begin{matrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{matrix}\right\} +16$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \end{matrix} \quad + \Pi_3 = +2$$

P_2: (( ) ( ))

Остается расписать 5 пакетов

$$\begin{matrix} 5 & 0 & + \Pi_6 = +20 \\ 4 & 1 & + \Pi_5 = +9 \\ 3 & 2 & + \Pi_4 \cdot \Pi_3 = +8 \end{matrix}$$

P_1: (( )) $\quad + \Pi_7 = +48$

$$\Rightarrow \Pi_8 = P_1 + \ldots + P_7 = 48 + 37 + 18 + 7 + 5 = 115$$

Π_9:

P_8: $+1$

P_7: $+1$

P_6: $+3$

P_5: $+7$

P_4: (( ) ( ) ( ) ( ))

Остаётся распихать 4 пакета →

4 0 0 0
3 1 0 0
2 2 0 0
2 1 1 0 $\}$ +18
1 1 1 1 +1

P_3: (( ) ( ) ( ))

Остаётся распихать 5 пакетов →

5 0 0
4 1 0
3 2 0 $\}$ +37
3 1 1 $+\Pi_4 = +4$
2 2 1 +3

P_2: (( ) ( ))

Остаётся распихать 6 пакетов →

6 0 $+\Pi_7 = +48$
5 1 $+\Pi_6 = +20$
4 2 $+\Pi_5 \cdot \Pi_3 = +18$
3 3

- - - - -

Π_4:
(((( ))))
((( )) ( ))
(( ) ( ) ( ))
((( ) ( )))

- - - - -

$\Rightarrow$ для 3 3 : $4+3+2+1 = \frac{4+1}{2} \cdot 4 = +10$

P_1 : $+\Pi_8 = +115$

$\Rightarrow \Pi_9 = P_1 + \dots + P_8 = 115+30+48+18+44+19+12 =$

$= 286$

Π_{10}:

P_9: +1

P_8: +1

P_7: +3

P_6: +7

P_5: +19

P_4: (( ) ( ) ( ) ( ))

Остаётся распихать 5 пакетов:

5 0 0 0
4 1 0 0
3 2 0 0
3 1 1 0
2 2 1 0

+44

2 1 1 1 $+\Pi_3 =$ +2

P_3: (( ) ( ) ( ))

Остаётся распихать 6 пакетов

6 0 0
5 1 0
4 2 0
3 3 0

+96

4 1 1 $+\Pi_5 =$ +9

3 2 1 $+\Pi_4 \cdot \Pi_3 =$ +8

2 2 2

Π_3: (()()) А

((())) Б

ААБ
АББ
ААА
БББ

=> 2 2 2 +4

P_2: (( ) ( ))

Остаётся распихать 7 пакетов:

7 0	$+\Pi_8 =$	$+115$
6 1	$+\Pi_7 =$	$+48$
5 2	$+\Pi_6 \cdot \Pi_3 =$	$+40$
4 3	$+\Pi_5 \cdot \Pi_4 =$	$+36$

P_1: $+\Pi_9 = +286$

$\Rightarrow \Pi_{10} = P_1 + \ldots + P_9 = 286 + 115 + 48 + 40 + 36 + 117 + 46 +$

$+ 19 + 12 = 719$ ✓

Ответ: 719.

Задача 1. Три друга-штангиста А, Б и В приехали на соревнования. Они все соревновались в одной весовой категории, и один из них стал победителем. Если вес, поднятый штангистом А, сложить с весом, поднятым штангистом Б, получится 220 кг, если сложить веса, поднятые штангистами А и В, то получится 240 кг, а если сложить веса, поднятые штангистами Б и В, то получится 250 кг. Какой вес поднял победитель соревнований?

Ответ: 135.

Решение. Сумма трех весов равна $(220 + 240 + 250)/2 = 355$. Поэтому В поднял $355 - 220 = 135$, Б поднял $355 - 240 = 115$, А поднял $355 - 250 = 105$. Победил $В = 135$.

Задача 2. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}?$$

Ответ: 53.

Решение. Избавляясь от знаменателей, получим уравнение

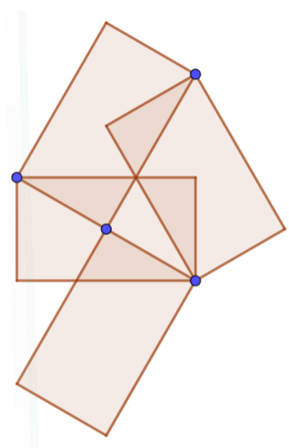
$$(x - 2022)(y - 2022) = 2022^2.$$

Поскольку $2022^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 337^2$, то число $x - 2022$ может иметь множитель $2^0, 2^1, 2^2$ — всего три варианта. Аналогично с остальными множителями. У числа $x - 2022$ получается $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ возможных натуральных значений, то есть 54 целых значения. Правда, одному из них соответствует $x = 0$, который исходному уравнению не удовлетворяет. Следовательно, корней 53 (при каждом подходящем значении x имеем $y = \frac{2022^2}{x-2022} + 2022$ — целое число).

Задача 3. Можно ли на плоскости расположить четыре одинаковых прямоугольника, чтобы ни одна вершина не была общей для всех прямоугольников, но у любых двух прямоугольников была ровно одна общая вершина? (Прямоугольники могут накладываться друг на друга.)

Ответ: Да.

Решение. См. чертёж.



Возможны и другие примеры.

Задача 4. Для бесконечной последовательности чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ при всех натуральных $n \geq 4$ выполняется соотношение $x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-3}$. Известно, что $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$. Найдите x_{2022}.

Ответ: 1.

Решение. Все члены последовательности по модулю равны 1. Отметим положительные плюсом, а отрицательные — минусом. Выпишем начало последовательности:

$$[++---+-]++---+-++\dots$$

Видно, что три стоящих подряд члена полностью определяют то, как последовательность будет выглядеть дальше. Значит, если мы снова увидим $++-$, как в начале, то последовательность начнёт повторяться. Получается, что период равен семи, значит на 2022 месте стоит то же, что и на шестом $(2022 = 6 \pmod 7)$.

Задача 5. Из цифр a, b, c, d, e составлено пятизначное число $\overline{abcde}$. Про двузначные числа $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}$, составленные из тех же цифр, известно, что

$$(\overline{ab}+\overline{bc})(\overline{bc}+\overline{cd})(\overline{cd}+\overline{de}) = 157605.$$

Найдите число $\overline{abcde}$. Многозначные числа не могут начинаться с нуля.

Ответ: 12345 или 21436.

Решение. Заметим, что $157605 = 3\cdot 5\cdot 7\cdot 19\cdot 79$. Для начала нужно понять, какие сочетания простых множителей соответствуют суммам двузначных чисел. Сумма двузначных чисел не может быть более 99+99=198, а уже $79 \cdot 3$ больше 200, поэтому какая-то из скобок равна 79. Как могут быть распределены оставшиеся множители? $79(19\cdot5)(3\cdot7)$; $79(19\cdot7)(3\cdot5)$; $79(3\cdot19)(5\cdot7)$; $79(19)(3\cdot5\cdot7)$. Других случаев нет, потому что в них получается множитель больше 198.

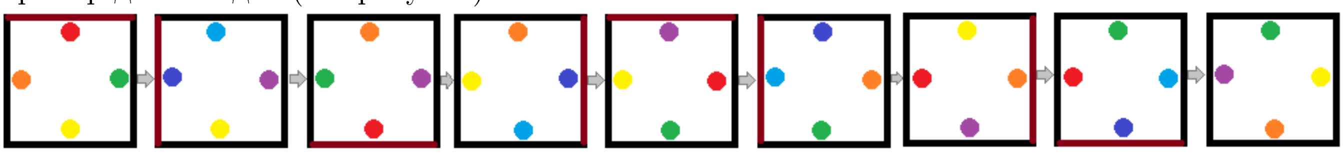
Так получаем тройки чисел (79;95;21), (79;133;15), (79;57;35), (79;19;105). Теперь заметим вот что: $(\overline{xy}+\overline{yz}) = 10x + y + 10y + z = 10(x + y) + (y + z)$, при этом суммы цифр не могут быть больше 9+9=18. То есть, например, если $(\overline{xy}+\overline{yz}) = 79$, то это значит, что $x + y = 7$, $y + z = 9$. Если $(\overline{xy}+\overline{yz}) = 133$, то либо $x + y = 13$, $y + z = 3$, либо $x + y = 12$, $y + z = 13$. Если $(\overline{xy}+\overline{yz}) = 15$, то либо $x+y = 1$, $y+z = 5$, либо $x+y = 0$, $y+z = 15$. Скажем, мы остановимся на наборе чисел (7,9), (12,13), (1,5), где числа означают возможные суммы соседних цифр $\overline{abcde}$.

Но при этом, если взять число $\overline{abcde}$, то у него будет всего 4 возможные пары соседних цифр, поэтому в наборе может быть не более 4-х различных значений. Тем самым мы отметаем выбранный набор, как и все остальные — кроме одного, которым будет (79;57;35), с числами (7,9), (5,7), (3,5). У него всего 4 различных значения: 9,7,5,3. Более того, эти пары чисел нужно разместить так, чтобы значения «состыковались», то есть так: (3,5),(5,7),(7,9). То есть для $\overline{abcde}$ будет верно следующее: $a + b = 3$, $b + c = 5$, $c + d = 7$, $d + e = 9$. У такой системы всего 4 решения, соответствующие 5-значным последовательностям $12345, 21436, 30527, 03254$, последняя из которых не подходит, так как начинается с нуля, а предпоследняя — так как для этой последовательности $\overline{bc} = 05$.

Задача 6. В квадратной комнате на каждой стене есть лампочка, которая может гореть одним из семи цветов радуги. В комнате нет лампочек, которые горели бы одним цветом. За один ход человек может поменять цвет одной из лампочек, на тот, которым не горит ни одна лампочка в комнате на момент совершения хода, при этом он тоже изменит цвета на два оставшихся не использованных цвета. (После этого в комнате по-прежнему нет двух лампочек с одинаковыми цветами). Какое наименьшее число ходов нужно совершить, чтобы в результате каждая лампочка погорела каждым из семи цветов?

Ответ: 8 ходов.

Решение. Лампочка на каждой стене комнаты должна шесть раз поменять цвет, всего стены четыре, поэтому суммарное число изменений цветов не меньше 24. С другой стороны, за один ход меняется цвет у трёх лампочек, поэтому число ходов не меньше 8. Можно привести пример для 8 ходов (см. рисунок).

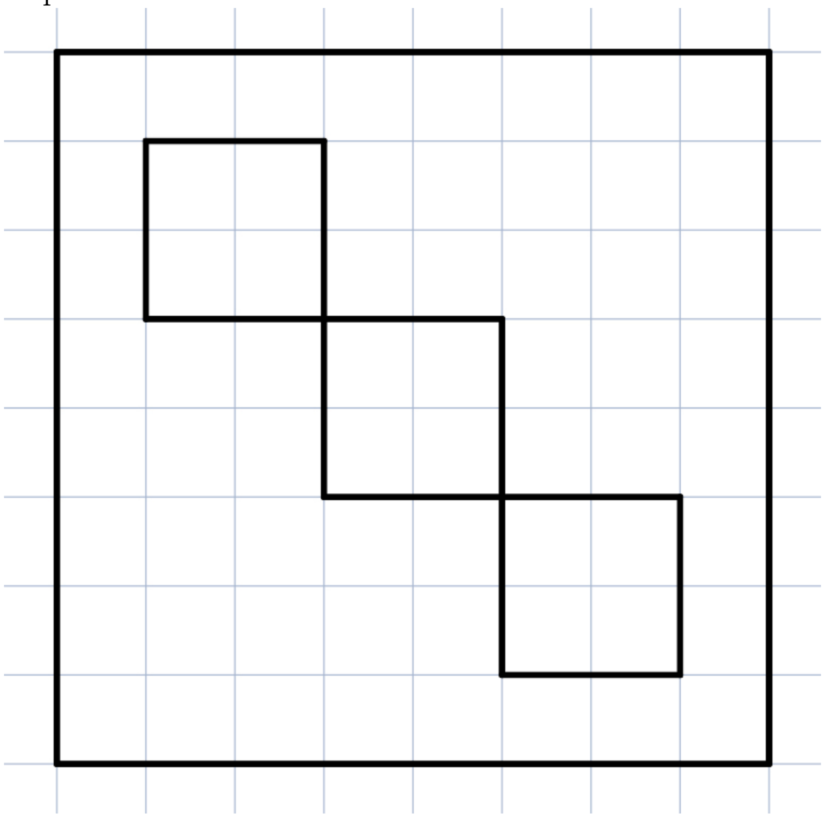


Задача 1. Найдите наибольшее четырёхзначное число, в записи которого все цифры различны, причём никакие две из них нельзя поменять местами так, чтобы получилось меньшее число.

Ответ: 7089.

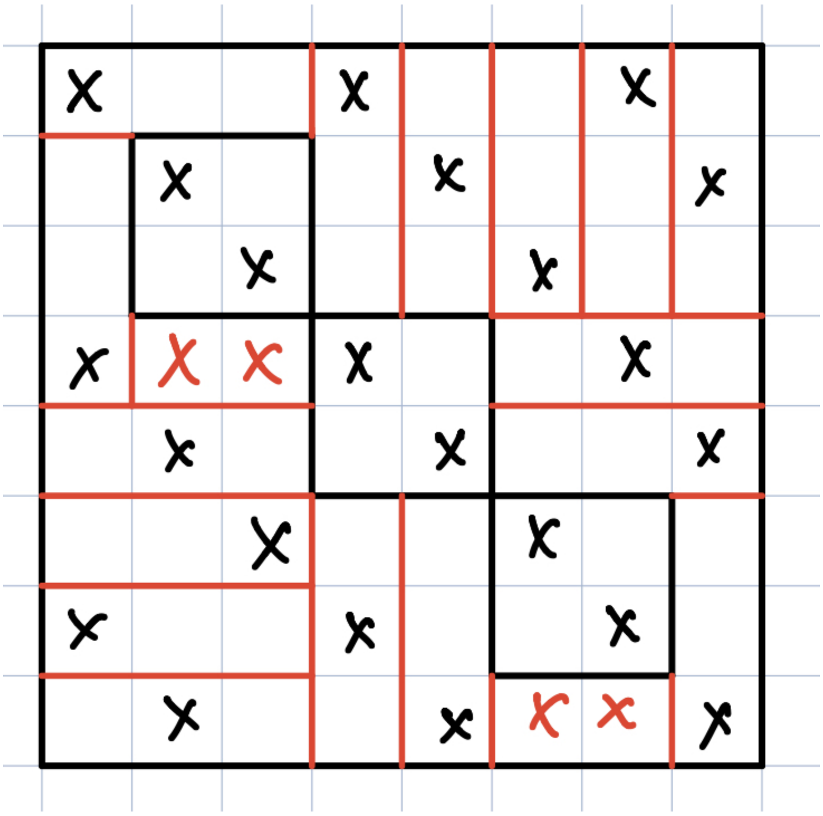
Решение. Если не использовать цифру 0, то цифры в каждом таком числе должны стоять по возрастанию, а самое большое из таких чисел равно 6789. Поскольку число не может начинаться с нуля, то, используя 0, можно получить ещё подходящие числа, где 0 стоит в разряде сотен, а остальные цифры идут в порядке возрастания. Самое большое из таких чисел равно 7089.

Задача 2. Петя вырезал из клетчатого квадрата 8×8 три квадрата 2×2, как показано на рисунке. Оля хочет вырезать (по линиям сетки) из оставшейся части квадрата как можно больше прямоугольников 1×3. Какое наибольшее число таких прямоугольников она сможет вырезать?



Ответ: 16.

Решение. Отметим чёрным крестиком клетки каждой третьей диагонали в квадрате 8×8, как показано на рисунке ниже. После вырезания трёх квадратов 2×2 останется 16 отмеченных клеток. В каждом прямоугольнике 1×3 будет ровно один чёрный крестик (независимо от его расположения), поэтому больше 16 таких прямоугольников вырезать не удастся. Красным на рисунке показаны линии разреза для одного из возможных примеров вырезания ровно 16 прямоугольников (красными крестиками отмечены клетки, не вошедшие ни в один из вырезаемых прямоугольников).



Задача 3. На доске записаны все такие натуральные числа от 3 до 223 включительно, которые делятся на 4 с остатком 3. Каждую минуту Боря стирает какие-то два из написанных чисел и вместо них записывает их сумму, уменьшенную на 2. В конце концов на доске остается одно число. Каким оно может быть?

Ответ: 6218.

Решение. Первоначально количество всех написанных чисел равно $224 : 4 = 56$, а их сумма равна $(3 + 223) \cdot 56 : 2 = 6328$. Каждую минуту количество написанных чисел уменьшается на 1, а их сумма — на 2. Значит, одно число останется на доске через 55 минут и будет равно $6328 - 55 \cdot 2 = 6218$.

Задача 4. У Маши есть семь разных кукол, которых она рассаживает по шести разным кукольным домикам так, чтобы в каждом домике оказалась хотя бы одна кукла. Сколькими способами Маша может это сделать? Важно, какая кукла в каком домике окажется. Как именно сидят куклы в том домике, где их две, неважно.

Ответ: 15120.

Решение. При каждом таком способе рассадки в каком-то одном домике будет две куклы, а в остальных домиках — по одной. Сначала выберем, какие две куклы будут сидеть в одном домике. Сделать это есть $7 \cdot 6 : 2 = 21$ способ. Затем выберем, в какой домик посадить этих двух кукол. Сделать это есть 6 способов. Наконец, выберем, как рассадить остальных 5 кукол по оставшимся 5 домикам. Сделать это есть $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ способов. Значит, число способов рассадки равно $21 \cdot 6 \cdot 120 = 15120$.

Задача 5. Кощей Бессмертный подарил Бабе-Яге электроступу. На приборной панели электроступы есть дисплей, который показывает время в формате ЧЧ:ММ (например, 13:56) и заряд ступы по стобалльной шкале (в целых числах от 1 до 100). Ступа расходует заряд равномерно и полностью разряжается за 10 часов. Дисплей в качестве наибольшего значения заряда показывает 100, а вместо того, чтобы показать 0, ступа опускается на землю из-за недостатка энергии. В 00:00 Баба-Яга отправилась в полёт на полностью заряженной ступе, и на протяжении всего времени до приземления ступа не получала питания. В какое время в течение полёта значения заряда ступы и число минут на дисплее совпадают?

Ответ: 04:52, 05:43, 06:35, 07:26, 09:09.

Решение. За 10 часов (= 600 минут) заряд расходуется полностью, поэтому, если значение заряда уменьшилось, то ровно через 6 минут значение заряда снова уменьшится на 1. Первые 4 часа значение заряда > 60, поэтому в это время значение заряда и минуты точно не совпадают. Далее составим таблицу (см. рисунок), в которой отметим 60 минут, разбитые на группы по шесть, и значения заряда. Строка, которая начинается со значения заряда 60, соответствует пятому часу (время на дисплее 04:**), строка, которая начинается со значения заряда 50 — шестому часу и так далее. Осталось найти значения заряда, которые лежат в нужных временных отрезках, и восстановить время. Заметим, что на девятом часу совпадений не будет: дисплей сменит показания [8:17 18] на [8:18 17], и минуты не совпадут со значением заряда.

Минуты	0 5	6 11	12 17	18 23	24 29	30 35	36 41	42 47	48 53	54 59
Значение заряда	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41
	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1