Задача 1 (10 баллов)

В-1 Четвертый элемент арифметической прогрессии на 6 меньше утроенного пятого элемента. Найдите сумму первых десяти элементов этой прогрессии.

Ответ: 30

Решение. Обозначим данную прогрессию $\{a_n\}$; тогда по условию $a_4 = 3a_5 - 6$. Если d — разность прогрессии, то $a_4 = a_5 - d = 3a_5 - 6$, откуда $2a_5 + d = 6$. Сумма первых 10 элементов прогрессии равна

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = (a_5 - 4d) + (a_5 - 3d) + \ldots + (a_5 + 5d) = 10a_5 + 5d = 5(2a_5 + d) = 5 \cdot 6 = 30.$$

В-2 Утроенный шестой элемент арифметической прогрессии на 4 больше пятого элемента. Найдите сумму первых двенадцати элементов этой прогрессии.

Ответ: 24

В-3 Четвертый элемент арифметической прогрессии на 2 меньше утроенного седьмого элемента. Найдите сумму первых шестнадцати элементов этой прогрессии.

Ответ: 16

В-4 Утроенный восьмой элемент арифметической прогрессии на 3 больше пятого элемента. Найдите сумму первых восемнадцати элементов этой прогрессии.

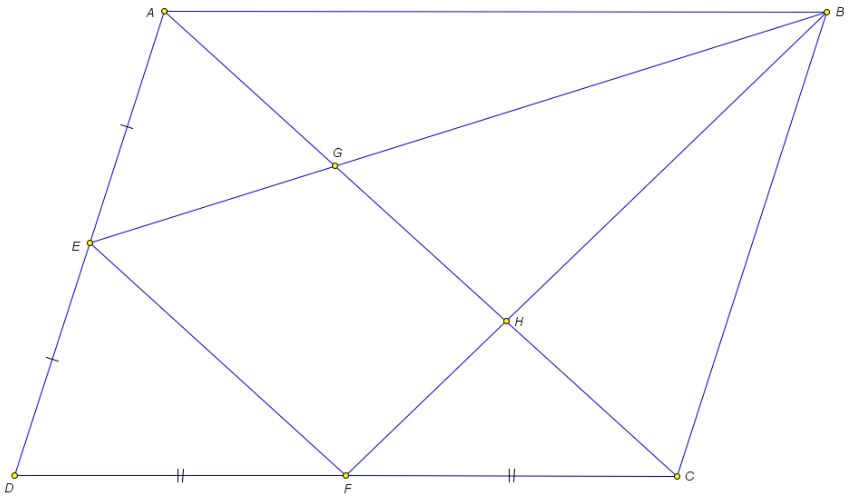
Ответ: 27

Задача 2 (10 баллов)

В-1 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 24.

Ответ: 5.

Решение. Заметим, что $S_{GHFE} = S_{EBF} - S_{GBH}$, $S_{EBF} = S_{ABCD} - S_{AEB} - S_{EDF} - S_{BFC}$, $S_{AEB} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$ (так как в треугольнике AEB сторона AE в 2 раза меньше стороны параллелограмма AD, а в формуле для площади треугольника есть ещё множитель $\frac{1}{2}$). Аналогично, $S_{BFC} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$, $S_{EDF} = \frac{1}{4}S_{ADC} = \frac{1}{8}S_{ABCD}$ (так как треугольники EDF и ADC подобны и их площади относятся как квадрат коэффициента подобия, а площадь треугольника ADC равна половине площади параллелограмма). Следовательно, $S_{EBF} = S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} - \frac{1}{8}S_{ABCD} = \frac{3}{8}S_{ABCD} = 9$.



Треугольники AEG и BGC подобны, поэтому $\frac{AG}{GC} = \frac{1}{2}$, т. е. $2AG = GH + HC$. Аналогично, из подобия треугольников FHC и AHB получаем, что $2HC = AG + GH$. Вычитая одно из этих равенств из другого, получаем $AG = GH = HC$. Значит, $S_{GBH} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{6}S_{ABCD} = 4$.

Таким образом, искомая площадь равна $S_{GHFE} = 9 - 4 = 5$.

В-2 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 48.

Ответ: 10.

В-3 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 12.

Ответ: 2.5.

В-4 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 36.

Ответ: 7.5.

Задача 3 (10 баллов)

В-1 Пусть (a, b) — точка на графике функции $y = x + \frac{1}{x}$, ближайшая к началу координат. Найдите $(b-a)^{20}$.

Ответ: 32.

Решение. Квадрат расстояния от точки $(x, x + \frac{1}{x})$ до начала координат равен

$$r^2 = x^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 2x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2\sqrt{2x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2,$$

причём равенство достигается при условии $2x^2 = \frac{1}{x^2}$. Следовательно, $a = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, поэтому $(b - a)^{20} = a^{-20} = 2^5 = 32$.

В-2 Пусть (a, b) — точка на графике функции $y = x - \frac{1}{x}$, ближайшая к началу координат. Найдите $(b-a)^{24}$.

Ответ:

Ответ: 64.

В-3 Пусть (a, b) — точка на графике функции $y = x + \frac{1}{x}$, ближайшая к началу координат. Найдите $(b-a)^{28}$.

Ответ: 128.

В-4 Пусть (a, b) — точка на графике функции $y = x - \frac{1}{x}$, ближайшая к началу координат. Найдите $(b-a)^{32}$.

Ответ: 256.

Задача 4 (10 баллов)

В-1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2+5xy-2x^2-17y-6x+20=0, \\ 10y^2-2xy+5x^2-38y-6x+41=0. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение y, являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 2

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы как квадратное относительно y: $10y^2-2(x+19)y+(5x^2-6x+41)=0$. Его дискриминант равен

$$D=4\big((x+19)^2-10(5x^2-6x+41)\big)=-4\cdot 49(x-1)^2\leq 0.$$

Поэтому второе уравнение имеет решения только при $D=0$, откуда $x=1$. Подставляя это значение во второе уравнение системы, находим $y=2$. Нетрудно убедиться, что пара чисел $(1;2)$ удовлетворяет также первому уравнению системы.

В-2 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2+5xy-2x^2-17y-5x+3=0, \\ 10y^2-2xy+5x^2-20y+2x+10=0. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение y, являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 1

В-3 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2+5xy-2x^2-35y-21x+98=0, \\ 10y^2-2xy+5x^2-98y+245=0. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение y, являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 5

В-4 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2+5xy-2x^2-34y-12x+80=0, \\ 10y^2-2xy+5x^2-76y-12x+164=0. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение y, являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 4

Задача 5 (10 баллов)

В-1 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 8. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 10.93

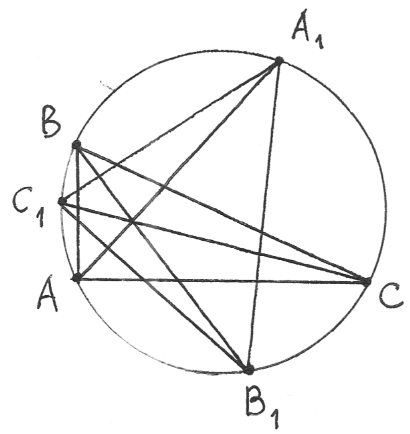
Решение. Обозначим углы треугольника α, β и γ, причём $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Тогда $\alpha = \beta + \gamma$, поэтому $2\alpha = \alpha + \beta + \gamma = \pi$, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Возможны два случая.

1) Если $\alpha = 2\beta$, то $\beta = \frac{\pi}{4} = \gamma$, т. е. треугольник равнобедренный, что противоречит условию.

2) Пусть $\beta = 2\gamma$, тогда $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{6}$.

Пусть S — площадь треугольника ABC, S_1 — площадь треугольника $A_1B_1C_1$, R — радиус окружности, описанной около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Так как треугольник ABC прямоугольный, то $BC = 2R$ и $S = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$, а углы треугольника $A_1B_1C_1$ (по теореме о вписанном угле) равны $\alpha' = \frac{\pi}{4}$, $\beta' = \frac{\pi}{3}$, $\gamma' = \frac{5\pi}{12}$. Значит, $S_1 = \frac{1}{2}B_1A_1 \cdot B_1C_1 \cdot \sin\frac{\pi}{3}$. Из теоремы синусов, применённой к треугольнику $A_1B_1C_1$, получаем $B_1A_1 = 2R\sin\frac{5\pi}{12}$, $B_1C_1 = 2R\sin\frac{\pi}{4}$. Следовательно,

$$S_1 = 2R^2\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{4S}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = S\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 4\sqrt{3}+4 \approx 10.93.$$



В-2 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 14. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 19.12

В-3 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 10. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 13.66

В-4 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 7. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 5.12

B-5 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 9. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 6.59

B-6 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 13. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 9.52

Задача 6 (10 баллов)

В-1 Фабрика производит $n > 15\,000$ ёлочных игрушек в месяц и является убыточной. Известно, что при изготовлении n ёлочных игрушек в месяц расходы фабрики на производство одной игрушки составляют не менее $\dfrac{126\,000}{n}+9-\left|3-\dfrac{54\,000}{n}\right|$ рублей, а цена реализации каждой игрушки при этом не превосходит $18-\dfrac{1}{4000}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки производства исключён.

Ответ: 24 000

Решение. Обозначим расходы на производство n игрушек в месяц через $f(n)$. По условию:

$$f(n) \geqslant g(n) := n\left(\frac{126000}{n}+9-\left|3-\frac{54\,000}{n}\right|-18-\frac{1}{4000}n\right),$$

т.е. $f(n) \geqslant g(n) = \frac{n^2}{4000} - 9n - |3n-54000| + 126000$.

1) Пусть $n \geqslant 18000$. Тогда $g(n) = \frac{n^2}{4000} - 12n - 180000 \geqslant g(n_0)$, где $n_0 = \frac{12}{1/2000} = 24000$. При этом $g(24000) = 36000$.

2) Пусть $0 < n < 18000$. Тогда $g(n) = \frac{n^2}{4000} - 6n + 72000 \geqslant g(n_0)$, где $n_0 = \frac{6}{1/2000} = 12000$. При этом $g(12000) = 36000$.

Таким образом, наименьшее значение расходов в месяц равно 36000 руб. и достигается оно при $n = 24000$ или $n = 12000$.

В-2 Фабрика производит $n > 400$ искусственных елей в месяц, и производство является прибыльным. Известно, что при изготовлении n искусственных елей в месяц расходы предприятия на изготовление одной ели составляют не менее $\dfrac{40\,500}{n}+270-\left|90-\dfrac{40\,500}{n}\right|$ рублей, а цена реализации каждой ели при этом не превосходит $540-\dfrac{3}{10}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях прибыль.

Ответ: 600

В-3 Фабрика производит $n < 20\,000$ ёлочных игрушек в месяц и является убыточной. Известно, что при изготовлении n ёлочных игрушек в месяц расходы предприятия на изготовление одной игрушки составляют не менее $\dfrac{126\,000}{n}+9-\left|3-\dfrac{54\,000}{n}\right|$ рублей, а цена реализации каждой игрушки при этом не превосходит $18-\dfrac{1}{4000}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки производства исключён.

Ответ: 12 000

В-4 Фабрика производит $n < 500$ искусственных елей в месяц, и производство является прибыльным. Известно, что при изготовлении n искусственных елей в месяц расходы фабрики на изготовление одной ели составляют не менее $\dfrac{40\,500}{n}+270-\left|90-\dfrac{40\,500}{n}\right|$ рублей, а цена реализации каждой ели при этом не превосходит $540-\dfrac{3}{10}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях прибыль.

Ответ: 300

Задача 7 (10 баллов)

В-1 Решите уравнение в целых числах:

$$y^2 + xy - 2x^2 - 15y + 15x - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений y.

Ответ: 10

Решение. Запишем уравнение как квадратное относительно y: $y^2 + (x - 15)y - (2x^2 - 15x + 1) = 0$. Его дискриминант равен $D = 221 + 30x - 7x^2$. Уравнение имеет (действительные) решения только при $D \geq 0$, что при целых x равносильно условию $x \in \{-3, -2, \ldots, 7, 8\}$. Перебирая указанные значения x, получим, что только при $x = 5$ получаются натуральные корни $y = 4$ и $y = 6$, сумма которых равна 10, а при других значениях x значения y получаются иррациональными.

В-2 Решите уравнение в целых числах:

$$y^2 - 3xy + 2x^2 + 3y - 3x - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений y.

Ответ: 6

В-3 Решите уравнение в целых числах:

$$x^2 + xy - 2y^2 - 6x + 6y - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений x.

Ответ: 4

В-4 Решите уравнение в целых числах:

$$x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 8y - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений x.

Ответ: 8

Задача 8 (15 баллов)

В-1 Решите уравнение
$$\cos^2 8x \sin 2x + 2\cos^2 x = 1 + \sqrt{2}.$$

В ответе укажите сумму корней, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$, при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

Ответ: $\frac{5\pi}{4} \approx 3.93$

Решение. Переходим к уравнению $\cos^2 8x \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$, а потом, с помощью вспомогательного аргумента, к уравнению $\sqrt{1+\cos^4 8x}\sin(2x+\varphi) = \sqrt{2}$, которое равносильно тому, что $\cos^4 8x$ и $\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ одновременно равняются единице.

В-2 Решите уравнение

$$\sin^4 6x \sin 2x + 2\sqrt{3}\cos^2 x = 2 + \sqrt{3}.$$

В ответе укажите сумму корней, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$, при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

Ответ: $\frac{7\pi}{6} \approx 3.67$

В-3 Решите уравнение
$$\cos^2 8x \sin 2x - 2\cos^2 x = \sqrt{2} - 1.$$

В ответе укажите сумму корней, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$, при необходимости округлив ее до одного знака после запятой.

Ответ: $\frac{7\pi}{4} \approx 5.5$

В-4 Решите уравнение

$$\sin^4 6x \sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x = 2 - \sqrt{3}.$$

В ответе укажите сумму корней, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$, при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

Ответ: $\frac{11\pi}{6} \approx 5.76$

Задача 9 (15 баллов)

В-1 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2021}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

Ответ: 10.

Решение. Заметим, что $f(-3/5) = -\frac{27}{125} - \frac{27}{125} + 1 < 0$, $f(-1/2) = -\frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 1 > 0$, $f(3/5) = \frac{27}{125} - \frac{27}{125} + 1 = \frac{17}{125} > 0$, $f(7/10) = \frac{343}{1000} - \frac{147}{100} + 1 = \frac{343-470}{1000} < 0$, $f(2) = 8 - 12 + 1 < 0$, $f(3) = 27 - 27 + 1 > 0$. Следовательно, кубический многочлен f имеет три вещественных корня $x_1 < x_2 < x_3$, причем $-3/5 < x_1 < -1/2$, $3/5 < x_2 < 7/10$, $2 < x_3 < 3$ $(x_3 = \hat{x})$. Для каждого целого неотрицательного n определим число $a_n := x_1^n + x_2^n + x_3^n$. Очевидно что $a_0 = 3$, далее из теоремы Виета следует, что $a_1 = 3$, $a_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 9 - 0 = 9$. Если равенства $x_i^3 = 3x_i^2 - 1$ умножить соответственно на x_i^n при $i = 1, 2, 3$ и сложить, то получим:

$$x_1^{n+3} + x_2^{n+3} + x_3^{n+3} = 3(x_1^{n+2} + x_2^{n+2} + x_3^{n+2}) - (x_1^n + x_2^n + x_3^n),$$

т.е. имеет место рекуррентное соотношение

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - a_n.$$

Очевидно, что $[x_3^n] = a_n - 1$.

Далее рассмотрим остатки последовательности a_n при делении на 17. Последовательность остатков имеет цикл длины 16:

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
3	3	9	7	1	11	9	9	16	5	6	2	1	14	6	0	3	3	9

Так как $2021 = 126 \cdot 16 + 5$, то $a_{2021} \pmod{17} = a_5 \pmod{17} = 11$. Поэтому $[\hat{x}^{2021}] \pmod{17} = 10$.

В-2 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2022}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

Ответ: 8.

В-3 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2023}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

Ответ: 8.

В-4 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2024}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

Ответ: 15.

В-5 Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2025}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

Ответ: 4.

Задача 1 (10 баллов)

В-1 Последовательность (a_n) задана рекуррентно равенствами $a_1 = 7$, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$, $n \geqslant 2$. Найдите a_{2021}.

Ответ: 4084447.

Решение. Из условия следует, что ответ определён однозначно. Кроме того, последовательность $a_n = n^2 + 6$ удовлетворяет данному равенству. Следовательно, $a_{2021} = 2021^2 + 6 = 4084447$.

В-2 Последовательность (a_n) задана рекуррентно равенствами $a_1 = 5$, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$, $n \geqslant 2$. Найдите a_{2022}.

Ответ: 4088488.

В-3 Последовательность (a_n) задана рекуррентно равенствами $a_1 = 4$, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$, $n \geqslant 2$. Найдите a_{2021}.

Ответ: 4084444.

В-4 Последовательность (a_n) задана рекуррентно равенствами $a_1 = 8$, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$, $n \geqslant 2$. Найдите a_{2022}.

Ответ: 4088491.

Задача 2 (10 баллов)

В-1 Первые 2023 натуральных чисел выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2021 сумму стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

Ответ: 2020.

Решение. Если выписать одно четное число, потом 505 троек в порядке нечет-чет-чет, а потом 507 нечетных чисел, то нечетных сумм будет 2020. Все суммы не могут быть нечетными, поскольку числа в ряду, номера которых имеют одинаковые остатки при делении на 3, тогда имели бы одинаковую четность, а в первой тройке должно стоять либо одно нечетное число (тогда четных чисел среди первых 2023 натуральных чисел не меньше 1348), либо три нечетных, тогда все числа нечетные.

В-2 Первые 2027 натуральных чисел выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2025 сумм стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

Ответ: 2024.

В-3 Первые 2031 натуральных чисел выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2029 сумм стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

Ответ: 2028.

В-4 Первые 2035 натуральных чисел выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2033 суммы стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

Ответ: 2032.

Задача 3 (10 баллов)

B-1 Найдите сумму всех целочисленных значений a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + a^2 = y^2 + 2ax, \\ |x-10| + 2|y+5| = 2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 100.

Решение. Пользуясь графическим методом, находим, что система имеет решение при $a \in [3; 7] \cup [13; 17]$. Сумма целочисленных значений равна $3 + 4 + \ldots + 7 + 13 + 14 + \ldots + 17 = 100$.

B-2 Найдите сумму всех целочисленных значений a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + a^2 = y^2 + 2ax, \\ 2|x-9| + |y-4| = 2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 90. (Решения есть при $a \in [3; 7] \cup [11; 15]$.)

B-3 Найдите сумму всех целочисленных значений a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + 2ay = y^2 + a^2, \\ 2|x-9| + |y-4| = 2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 40. (Решения есть при $a \in [-7; -3] \cup [11; 15]$.)

B-4 Найдите сумму всех целочисленных значений a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + 2ay = y^2 + a^2, \\ 2|x+4| + |y-7| = 2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 70. (Решения есть при $a \in [1; 5] \cup [9; 13]$.)

Задача 4 (10 баллов)

В-1 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наименьшее число красных ручек он мог купить?

Ответ: 2.

Решение. Пусть k — число синих ручек, l — красных, m — зелёных. Тогда из условия получаем уравнение $14k + 15l + 16m = 170$, где $k, l, m > 0$. Рассматривая остаток от деления этого числа на 15, получаем равенство $m = k + 5 + 15s$, где $s \in \mathbb{Z}$. Подставим это выражение в исходное уравнение и поделим обе его части на 15, получим $2k+l+16s = 6$. Поскольку $2k+l \geqslant 3$, то $s \leqslant 0$. Если $s \leqslant -2$, то $2k+l \geqslant 6+32 = 38$ и $170 = 14k+15l+16m \geqslant 14k+7l \geqslant 7 \cdot 38 > 170$ — противоречие. Следовательно, $s = 0$ или $s = -1$. При $s = 0$ с учётом условий $k, l > 0$ получаем два решения $k = 1$, $l = 4$ и $k = 2$ и $l = 2$, при этом $m = k + 5$ равно 6 и 7 соответственно. Рассмотрим случай $s = -1$. Поскольку $m = k+5-15 = k-10 \geqslant 0$, т. е. $2k \geqslant 20$, получаем $k = 10$ и $l = 2$, но при этом $m = 0$, поэтому данный случай невозможен. Таким образом, возможны лишь 2 случая: $k = 1, l = 4, m = 6$ или $k = 2, l = 2, m = 7$. Наименьшее возможное значение l равно 2.

В-2 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наибольшее число красных ручек он мог купить?

Ответ: 4.

В-3 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наименьшее число зелёных ручек он мог купить?

Ответ: 6.

В-4 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наибольшее число зелёных ручек он мог купить?

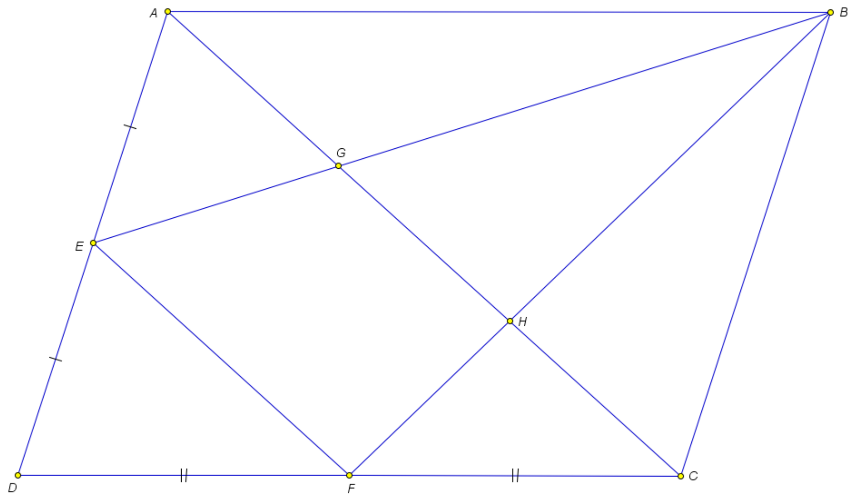
Ответ: 7.

Задача 5 (10 баллов)

В-1 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 24.

Ответ: 5.

Решение. Заметим, что $S_{GHFE} = S_{EBF} - S_{GBH}$, $S_{EBF} = S_{ABCD} - S_{AEB} - S_{EDF} - S_{BFC}$, $S_{AEB} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$ (так как в треугольнике AEB сторона AE в 2 раза меньше стороны параллелограмма AD, а в формуле для площади треугольника есть ещё множитель $\frac{1}{2}$). Аналогично, $S_{BFC} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$, $S_{EDF} = \frac{1}{4}S_{ADC} = \frac{1}{8}S_{ABCD}$ (так как треугольники EDF и ADC подобны и их площади относятся как квадрат коэффициента подобия, а площадь треугольника ADC равна половине площади параллелограмма). Следовательно, $S_{EBF} = S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} - \frac{1}{8}S_{ABCD} = \frac{3}{8}S_{ABCD} = 9$.



Треугольники AEG и BGC подобны, поэтому $\frac{AG}{GC} = \frac{1}{2}$, т. е. $2AG = GH + HC$. Аналогично, из подобия треугольников FHC и AHB получаем, что $2HC = AG + GH$. Вычитая одно из этих равенств из другого, получаем $AG = GH = HC$. Значит, $S_{GBH} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{6}S_{ABCD} = 4$.

Таким образом, искомая площадь равна $S_{GHFE} = 9 - 4 = 5$.

В-2 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 48.

Ответ: 10.

В-3 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 12.

Ответ: 2.5.

В-4 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 36.

Ответ: 7.5.

Задача 6 (15 баллов)

В-1 Решите систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l}3y^2+5xy-2x^2-17y-6x+20=0,\\ 10y^2-2xy+5x^2-38y-6x+41=0.\end{array}\right.$$

В ответе укажите минимальное значение y, являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 2

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы как квадратное относительно y: $10y^2-2(x+19)y+(5x^2-6x+41)=0$. Его дискриминант равен

$$D=4\big((x+19)^2-10(5x^2-6x+41)\big)=-4\cdot 49(x-1)^2\leq 0.$$

Поэтому второе уравнение имеет решения только при $D=0$, откуда $x=1$. Подставляя это значение во второе уравнение системы, находим $y=2$. Нетрудно убедиться, что пара чисел $(1;2)$ удовлетворяет также первому уравнению системы.

В-2 Решите систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l}3y^2+5xy-2x^2-17y-5x+3=0,\\ 10y^2-2xy+5x^2-20y+2x+10=0.\end{array}\right.$$

В ответе укажите минимальное значение y, являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 1

В-3 Решите систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l}3y^2+5xy-2x^2-35y-21x+98=0,\\ 10y^2-2xy+5x^2-98y+245=0.\end{array}\right.$$

В ответе укажите минимальное значение y, являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 5

В-4 Решите систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l}3y^2+5xy-2x^2-34y-12x+80=0,\\ 10y^2-2xy+5x^2-76y-12x+164=0.\end{array}\right.$$

В ответе укажите минимальное значение y, являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 4

Задача 7 (15 баллов)

В-1 Решите уравнение в целых числах:

$$y^2 + xy - 2x^2 - 15y + 15x - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений y.

Ответ: 10

Решение. Запишем уравнение как квадратное относительно y:
$y^2 + (x - 15)y - (2x^2 - 15x + 1) = 0$. Его дискриминант равен $D = 221 + 30x - 7x^2$. Уравнение имеет (действительные) решения только при $D \geq 0$, что при целых x равносильно условию $x \in \{-3, -2, \ldots, 7, 8\}$. Перебирая указанные значения x, получим, что только при $x = 5$ получаются натуральные корни $y = 4$ и $y = 6$, сумма которых равна 10, а при других значениях x значения y получаются иррациональными.

В-2 Решите уравнение в целых числах:

$$y^2 - 3xy + 2x^2 + 3y - 3x - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений y.

Ответ: 6

В-3 Решите уравнение в целых числах:

$$x^2 + xy - 2y^2 - 6x + 6y - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений x.

Ответ: 4

В-4 Решите уравнение в целых числах:

$$x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 8y - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений x.

Ответ: 8

Задача 8 (20 баллов)

В-1 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 8. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 10.93

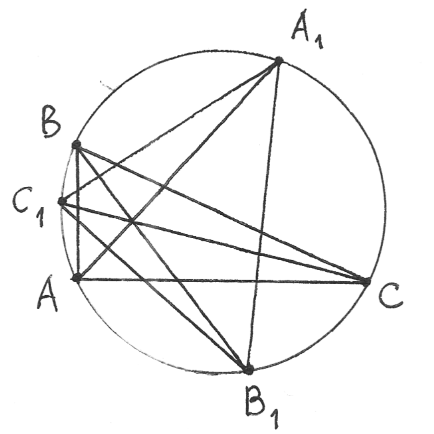
Решение. Обозначим углы треугольника α, β и γ, причём $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Тогда $\alpha = \beta + \gamma$, поэтому $2\alpha = \alpha + \beta + \gamma = \pi$, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Возможны два случая.

1) Если $\alpha = 2\beta$, то $\beta = \frac{\pi}{4} = \gamma$, т. е. треугольник равнобедренный, что противоречит условию.

2) Пусть $\beta = 2\gamma$, тогда $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{6}$.

Пусть S — площадь треугольника ABC, S_1 — площадь треугольника $A_1B_1C_1$, R — радиус окружности, описанной около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Так как треугольник ABC прямоугольный, то $BC = 2R$ и $S = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$, а углы треугольника $A_1B_1C_1$ (по теореме о вписанном угле) равны $\alpha' = \frac{\pi}{4}$, $\beta' = \frac{\pi}{3}$, $\gamma' = \frac{5\pi}{12}$. Значит, $S_1 = \frac{1}{2}B_1A_1 \cdot B_1C_1 \cdot \sin\frac{\pi}{3}$. Из теоремы синусов, применённой к треугольнику $A_1B_1C_1$, получаем $B_1A_1 = 2R\sin\frac{5\pi}{12}$, $B_1C_1 = 2R\sin\frac{\pi}{4}$. Следовательно,

$$S_1 = 2R^2 \sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{4S}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = S\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 4\sqrt{3}+4 \approx 10.93.$$



В-2 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 14. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 19.12

В-3 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 10. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 13.66

В-4 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 7. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 5.12

В-5 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 9. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 6.59

В-6 В неравнобедренном треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 13. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 9.52

Задача 1 (10 баллов)

В-1

В многоквартирном доме несколько подъездов, в каждом — одинаковое число этажей (больше одного). На всех этажах всех подъездов одинаковое число квартир (больше одной). Известно, что в каждом подъезде не больше 50 квартир. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 385 квартир?

Ответ: 11.

Решение. Поскольку $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$, числа 5, 7 и 11 — это число квартир на этаже, число этажей и число подъездов (в некотором порядке). Но $5 \cdot 11 = 55 > 50$ и $7 \cdot 11 = 77 > 50$, поэтому 11 не может быть ни числом этажей в подъезде, ни числом квартир на этаже. Значит, в доме 11 подъездов.

В-2

В многоквартирном доме несколько подъездов, в каждом — одинаковое число этажей (больше одного). На всех этажах всех подъездов одинаковое число квартир (больше одной). Известно, что в каждом подъезде не больше 60 квартир. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 455 квартир?

Ответ: 13.

В-3 В многоквартирном доме несколько подъездов, в каждом — одинаковое число этажей (больше одного). На всех этажах всех подъездов одинаковое число квартир (больше одной). Известно, что в каждом подъезде не больше 30 квартир. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 231 квартира?

Ответ: 11.

В-4 В многоквартирном доме несколько подъездов, в каждом — одинаковое число этажей (больше одного). На всех этажах всех подъездов одинаковое число квартир (больше одной). Известно, что в каждом подъезде не больше 35 квартир. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 273 квартиры?

Ответ: 13.

Задача 2 (10 баллов)

В-1

Первые 2021 натуральных чисел выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2019 сумм стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

Ответ: 2018.

Решение. Если выписать 505 троек в порядке нечет-чет-чет, а потом 506 нечетных чисел, то нечетных сумм будет 2018. Все суммы не могут быть нечетными, поскольку числа в ряду, номера которых имеют одинаковые остатки при делении на 3, тогда имели бы одинаковую четность, а в первой тройке должно стоять либо одно нечетное число (тогда четных чисел среди первых 2021 натуральных чисел не меньше 1346) либо три нечетных, тогда все числа нечетные.

В-2 Первые 2025 натуральных чисел выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2023 суммы стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

Ответ: 2022.

В-3 Первые 2029 натуральных чисел выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2027 сумм стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

Ответ: 2026

В-4 Первые 2033 натуральных числа выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2031 сумму стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

Ответ: 2030

Задача 3 (10 баллов)

В-1 Дорога из пункта A в пункт B длиной 11,5 км состоит из трёх участков: в гору, по равнине и под гору. Пешеход идёт в гору со скоростью 3 км/ч, по равнине — со скоростью 4 км/ч, под гору — со скоростью 5 км/ч. Известно, что на дорогу из A в B он потратил 2 ч 54 мин, а на обратный путь — 3 ч 6 мин. Какова длина (в км) участка пути, проходящего по равнине?

Ответ: 4

Решение. Пусть x — длина пути в гору, y — по равнине, z — под гору. Тогда $x+y+z = 11{,}5$, $x/3 + y/4 + z/5 = 2{,}9$, $x/5 + y/4 + z/3 = 3{,}1$. Складывая последние два уравнения, находим $\frac{8}{15}(x+z)+y/2 = 6$. Следовательно, с учётом первого уравнения получаем $(\frac{8}{15}-\frac{1}{2})y = 11{,}5\cdot\frac{8}{15}-6$, откуда $y = 4$ км.

В-2 Дорога из пункта A в пункт B длиной 12,5 км состоит из трёх участков: в гору, по равнине и под гору. Пешеход идёт в гору со скоростью 3 км/ч, по равнине — со скоростью 4 км/ч, под гору — со скоростью 5 км/ч. Известно, что на дорогу из A в B он потратил 3 ч 6 мин, а на обратный путь — 3 ч 24 мин. Какова длина (в км) участка пути, проходящего по равнине?

Ответ: 5

В-3 Дорога из пункта A в пункт B длиной 10,5 км состоит из трёх участков: в гору, по равнине и под гору. Пешеход идёт в гору со скоростью 3 км/ч, по равнине — со скоростью 4 км/ч, под гору — со скоростью 5 км/ч. Известно, что на дорогу из A в B он потратил 2 ч 36 мин, а на обратный путь — 2 ч 54 мин. Какова длина (в км) участка пути, проходящего по равнине?

Ответ: 3

В-4 Дорога из пункта A в пункт B длиной 13,5 км состоит из трёх участков: в гору, по равнине и под гору. Пешеход идёт в гору со скоростью 3 км/ч, по равнине — со скоростью 4 км/ч, под гору — со скоростью 5 км/ч. Известно, что на дорогу из A в B он потратил 3 ч 24 мин, а на обратный путь — 3 ч 36 мин. Какова длина (в км) участка пути, проходящего по равнине?

Ответ: 6

Задача 4 (15 баллов)

В-1 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наименьшее число красных ручек он мог купить?

Ответ: 2.

Решение. Пусть k — число синих ручек, l — красных, m — зелёных. Тогда из условия получаем уравнение $14k + 15l + 16m = 170$, где $k, l, m > 0$. Рассматривая остаток от деления этого числа на 15, получаем равенство $m = k + 5 + 15s$, где $s \in \mathbb{Z}$. Подставим это выражение в исходное уравнение и поделим обе его части на 15, получим $2k+l+16s = 6$. Поскольку $2k+l \geqslant 3$, то $s \leqslant 0$. Если $s \leqslant -2$, то $2k+l \geqslant 6+32 = 38$ и $170 = 14k+15l+16m \geqslant 14k+7l \geqslant 7 \cdot 38 > 170$ — противоречие. Следовательно, $s = 0$ или $s = -1$. При $s = 0$ с учётом условий $k, l > 0$ получаем два решения $k = 1$, $l = 4$ и $k = 2$ и $l = 2$, при этом $m = k + 5$ равно 6 и 7 соответственно. Рассмотрим случай $s = -1$. Поскольку $m = k+5-15 = k-10 \geqslant 0$, т. е. $2k \geqslant 20$, получаем $k = 10$ и $l = 2$, но при этом $m = 0$, поэтому данный случай невозможен. Таким образом, возможны лишь 2 случая: $k = 1, l = 4, m = 6$ или $k = 2, l = 2, m = 7$. Наименьшее возможное значение l равно 2.

В-2 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наибольшее число красных ручек он мог купить?

Ответ: 4.

В-3 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наименьшее число зелёных ручек он мог купить?

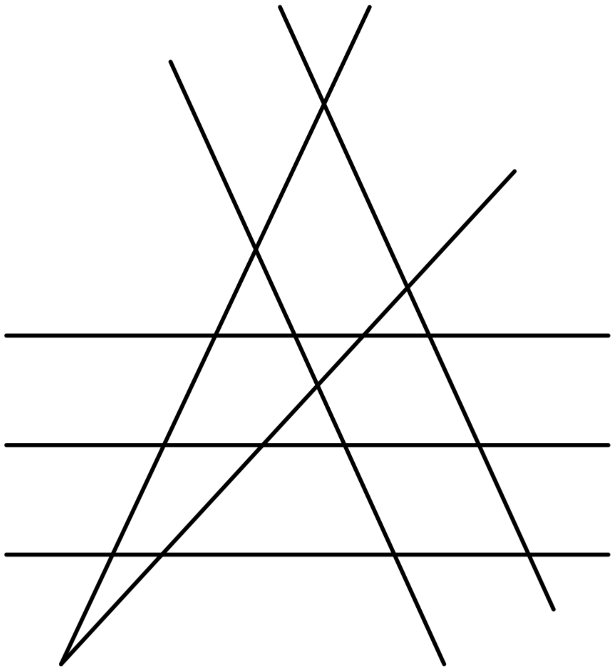
Ответ: 6.

В-4 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наибольшее число зелёных ручек он мог купить?

Ответ: 7.

Задача 5 (15 баллов)

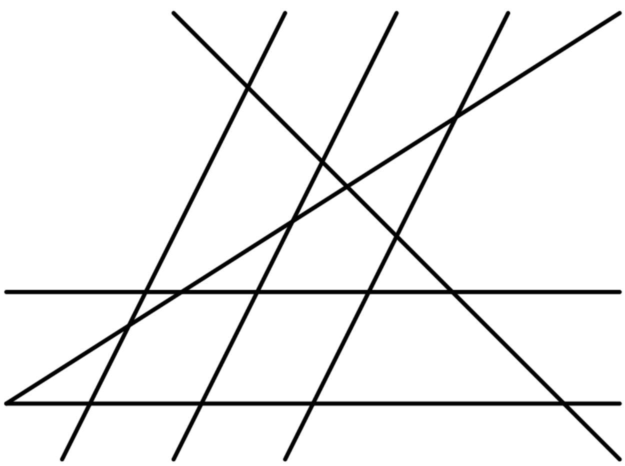
В-1 На рисунке изображено 7 прямых, среди которых три параллельных и ещё две параллельных. Никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько существует треугольников, все стороны каждого из которых лежат на этих прямых?



Ответ: 17

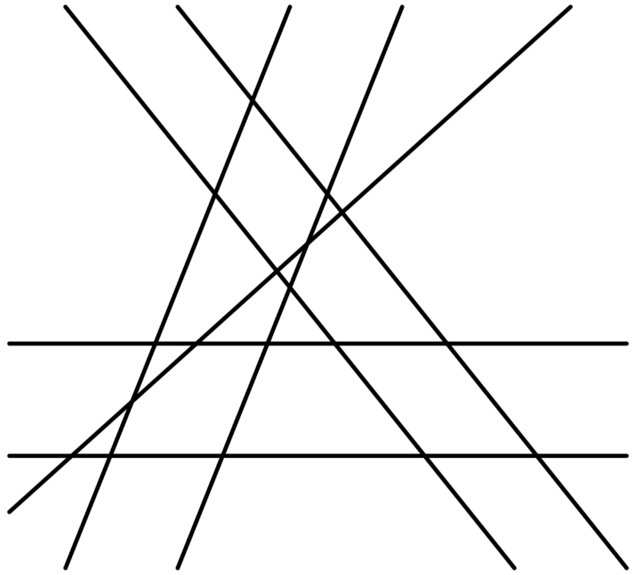
Решение. Три стороны треугольника должны лежать на трёх попарно непараллельных прямых. Если выбирать одну прямую из трёх параллельных, ещё одну из двух других параллельных и одну из двух оставшихся, получится $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ треугольников. Если выбрать одну прямую из трёх параллельных и две другие, не входящие в пару параллельных, получится ещё $3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$ треугольника. Наконец, если выбрать одну прямую из двух параллельных и две другие, не входящие в пару параллельных, получится ещё $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ треугольника. Итого $12 + 3 + 2 = 17$ треугольников.

В-2 На рисунке изображено 7 прямых, среди которых три параллельных и ещё две параллельных. Никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько существует треугольников, все стороны каждого из которых лежат на этих прямых?



Ответ: 17

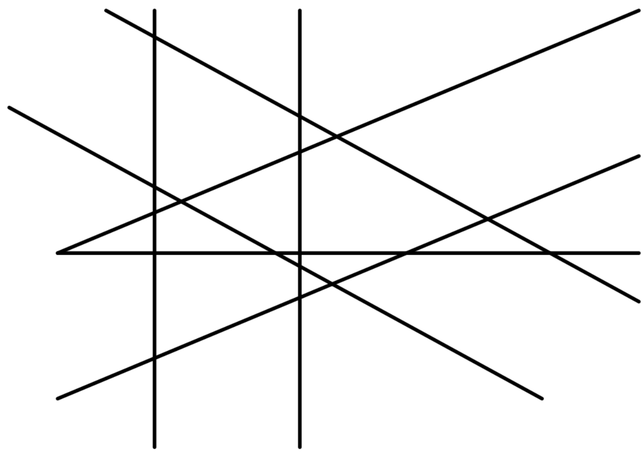
В-3 На рисунке изображено 7 прямых, среди которых три пары параллельных. Никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько существует треугольников, все стороны каждого из которых лежат на этих прямых?



Ответ: 20

Решение. Три стороны треугольника должны лежать на трёх попарно непараллельных прямых. Если выбирать по одной прямой из каждой пары параллельных, получится $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ треугольников. Если выбрать две прямые из двух пар параллельных и третью, не входящую в пары параллельных, получится ещё $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ треугольников (множитель 3 возникает оттого, что есть три способа определить, какую пару параллельных прямых мы не задействуем). Итого $12 + 8 = 20$ треугольников.

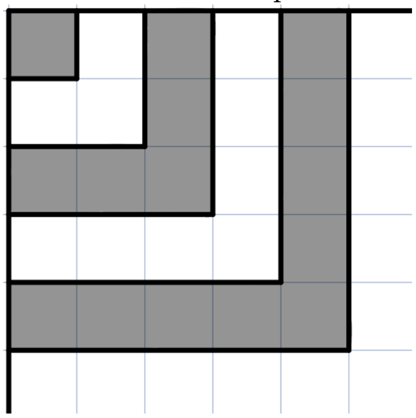
В-4 На рисунке изображено 7 прямых, среди которых три пары параллельных. Никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько существует треугольников, все стороны каждого из которых лежат на этих прямых?



Ответ: 20

Задача 6 (20 баллов)

В-1 Пол квадратного зала выкладывают квадратными плитками одинакового размера белого и серого цвета таким образом, как показано на рисунке: угловая плитка серая, затем три белые, затем пять серых, затем семь белых, и т. д. Чтобы таким образом выложить плиткой весь пол зала, белых плиток потребовалось на 60 больше, чем серых, причём резать плитки не пришлось. Сколько серых плиток потребовалось?

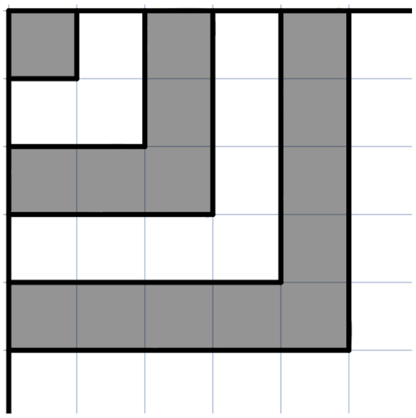


Ответ: 1770

Решение. Предположим сначала, что «слоёв» серой и белой плитки было поровну — по n штук. Тогда серых плиток было $1+5+9+\ldots+(4n-3)=\dfrac{(4n-2)\cdot n}{2}=2n^2-n$, а белых — $3+7+11+\ldots+(4n-1)=\dfrac{(4n+2)\cdot n}{2}=2n^2+n$. Разность числа белых и серых плиток в этом случае равна $2n=60$, откуда n=30 и $2n^2-n=1800-30=1770$.

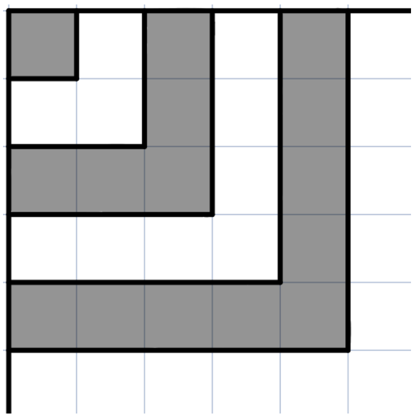
Пусть теперь «слоёв» серой плитки было n, а белой $n-1$. Тогда серых плиток было использовано $2n^2-n$, а белых $2(n-1)^2+(n-1)=2n^2-3n+1$. Разность числа белых и серых плиток в этом случае равна $1-2n=60$, что невозможно при целом n.

В-2 Пол квадратного зала выкладывают квадратными плитками одинакового размера белого и серого цвета таким образом, как показано на рисунке: угловая плитка серая, затем три белые, затем пять серых, затем семь белых, и т. д. Чтобы таким образом выложить плиткой весь пол зала, серых плиток потребовалось на 30 меньше, чем белых, причём резать плитки не пришлось. Сколько белых плиток потребовалось?



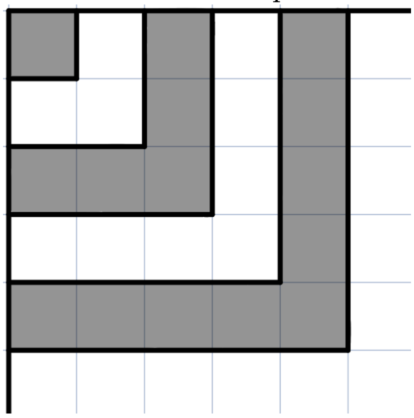
Ответ: 465

В-3 Пол квадратного зала выкладывают квадратными плитками одинакового размера белого и серого цвета таким образом, как показано на рисунке: угловая плитка серая, затем три белые, затем пять серых, затем семь белых, и т. д. Чтобы таким образом выложить плиткой весь пол зала, серых плиток потребовалось на 31 больше, чем белых, причём резать плитки не пришлось. Сколько белых плиток потребовалось?



Ответ: 465

В-4 Пол квадратного зала выкладывают квадратными плитками одинакового размера белого и серого цвета таким образом, как показано на рисунке: угловая плитка серая, затем три белые, затем пять серых, затем семь белых, и т. д. Чтобы таким образом выложить плиткой весь пол зала, белых плиток потребовалось на 61 меньше, чем серых, причём резать плитки не пришлось. Сколько серых плиток потребовалось?



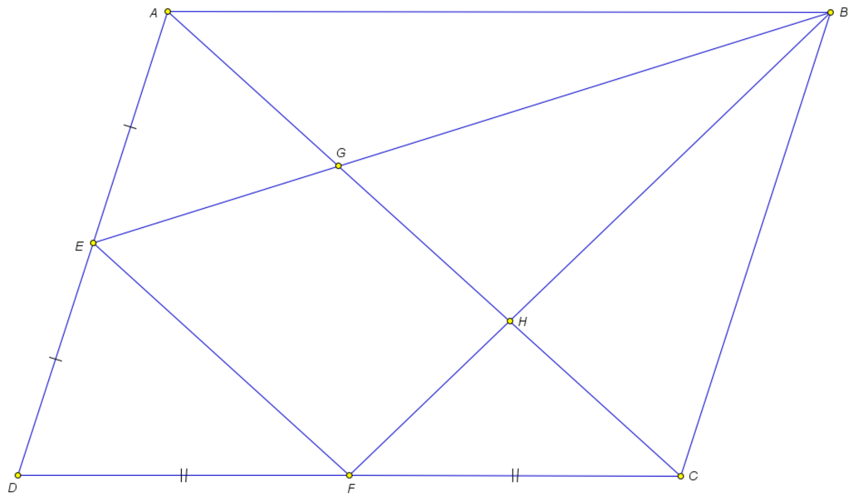
Ответ: 1891

Задача 7 (20 баллов)

В-1 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 24.

Ответ: 5.

Решение. Заметим, что $S_{GHFE} = S_{EBF} - S_{GBH}$, $S_{EBF} = S_{ABCD} - S_{AEB} - S_{EDF} - S_{BFC}$, $S_{AEB} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$ (так как в треугольнике AEB сторона AE в 2 раза меньше стороны параллелограмма AD, а в формуле для площади треугольника есть ещё множитель $\frac{1}{2}$). Аналогично, $S_{BFC} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$, $S_{EDF} = \frac{1}{4}S_{ADC} = \frac{1}{8}S_{ABCD}$ (так как треугольники EDF и ADC подобны и их площади относятся как квадрат коэффициента подобия, а площадь треугольника ADC равна половине площади параллелограмма). Следовательно, $S_{EBF} = S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} - \frac{1}{8}S_{ABCD} = \frac{3}{8}S_{ABCD} = 9$.



Треугольники AEG и BGC подобны, поэтому $\frac{AG}{GC} = \frac{1}{2}$, т. е. $2AG = GH + HC$. Аналогично, из подобия треугольников FHC и AHB получаем, что $2HC = AG + GH$. Вычитая одно из этих равенств из другого, получаем $AG = GH = HC$. Значит, $S_{GBH} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{6}S_{ABCD} = 4$.

Таким образом, искомая площадь равна $S_{GHFE} = 9 - 4 = 5$.

В-2 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 48.

Ответ: 10.

В-3 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 12.

Ответ: 2.5.

В-4 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 36.

Ответ: 7.5.

Задача 1 (15 баллов)

В-1 Вчера Маша прочитала $\frac{1}{4}$ книги, а сегодня — ещё $\frac{1}{15}$ книги. Если она прочтёт ещё 63 страницы, то до конца ей останется прочесть треть книги. Сколько страниц в этой книге?

Ответ: 180

Решение. По условию 63 страницы составляют $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{15} - \frac{1}{3} = \frac{7}{20}$ часть книги. Следовательно, в книге $63 \cdot \frac{20}{7} = 9 \cdot 20 = 180$ страниц.

В-2 Вчера Лена прочитала $\frac{2}{7}$ книги, а сегодня — ещё $\frac{1}{28}$ книги. Если она прочтёт ещё 87 страниц, то до конца ей останется прочесть треть книги. Сколько страниц в этой книге?

Ответ: 252

В-3 Вчера Саша прочитал $\frac{1}{7}$ книги, а сегодня — ещё $\frac{2}{21}$ книги. Если он прочтёт ещё 55 страниц, то до конца ему останется прочесть половину книги. Сколько страниц в этой книге?

Ответ: 210

В-4 Вчера Коля прочитал $\frac{1}{5}$ книги, а сегодня — ещё $\frac{1}{35}$ книги. Если он прочтёт ещё 95 страниц, то до конца ему останется прочесть половину книги. Сколько страниц в этой книге?

Ответ: 350

Задача 2 (15 баллов)

В-1

В многоквартирном доме несколько подъездов, в каждом — одинаковое число этажей (больше одного). На всех этажах всех подъездов одинаковое число квартир (больше одной). Известно, что в каждом подъезде не больше 50 квартир. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 385 квартир?

Ответ: 11.

Решение. Поскольку $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$, числа 5, 7 и 11 — это число квартир на этаже, число этажей и число подъездов (в некотором порядке). Но $5 \cdot 11 = 55 > 50$ и $7 \cdot 11 = 77 > 50$, поэтому 11 не может быть ни числом этажей в подъезде, ни числом квартир на этаже. Значит, в доме 11 подъездов.

В-2

В многоквартирном доме несколько подъездов, в каждом — одинаковое число этажей (больше одного). На всех этажах всех подъездов одинаковое число квартир (больше одной). Известно, что в каждом подъезде не больше 60 квартир. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 455 квартир?

Ответ: 13.

В-3 В многоквартирном доме несколько подъездов, в каждом — одинаковое число этажей (больше одного). На всех этажах всех подъездов одинаковое число квартир (больше одной). Известно, что в каждом подъезде не больше 30 квартир. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 231 квартира?

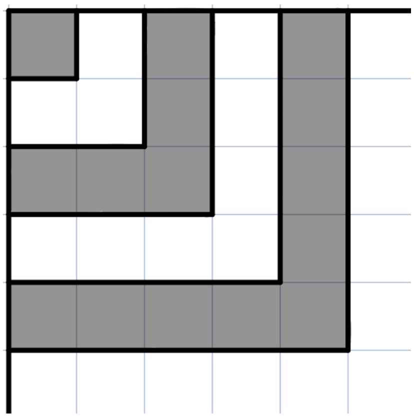
Ответ: 11.

В-4 В многоквартирном доме несколько подъездов, в каждом — одинаковое число этажей (больше одного). На всех этажах всех подъездов одинаковое число квартир (больше одной). Известно, что в каждом подъезде не больше 35 квартир. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 273 квартиры?

Ответ: 13.

Задача 3 (15 баллов)

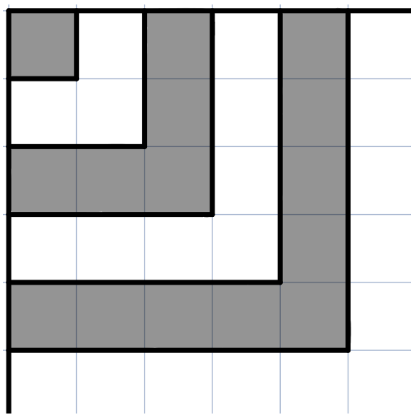
В-1 Пол квадратного зала выкладывают квадратными плитками одинакового размера белого и серого цвета таким образом, как показано на рисунке: угловая плитка серая, затем три белые, затем пять серых, затем семь белых, и т. д. Чтобы таким образом выложить плиткой весь пол зала, серых плиток потребовалось 120, а белых меньше, причём резать плитки не пришлось. Сколько белых плиток потребовалось?



Ответ: 105

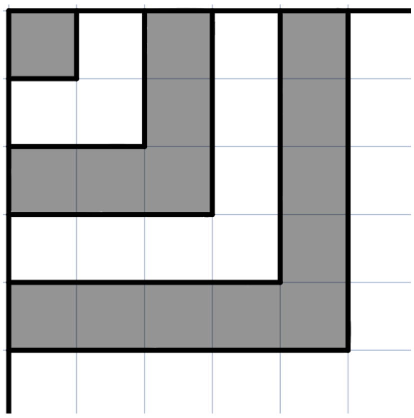
Решение. Заметим, что $1+5+9+\ldots+29=120$. В этой сумме 8 слагаемых, значит, «слоёв» серой плитки было 8, а «слоёв» белой — 7. Поэтому вдоль одной стены зала умещается $8+7=15$ плиток, а во всём зале $15^2=225$ плиток, откуда находим, что белых плиток $225-120=105$.

В-2 Пол квадратного зала выкладывают квадратными плитками одинакового размера белого и серого цвета таким образом, как показано на рисунке: угловая плитка серая, затем три белые, затем пять серых, затем семь белых, и т. д. Чтобы таким образом выложить плиткой весь пол зала, серых плиток потребовалось 153, а белых больше, причём резать плитки не пришлось. Сколько белых плиток потребовалось?



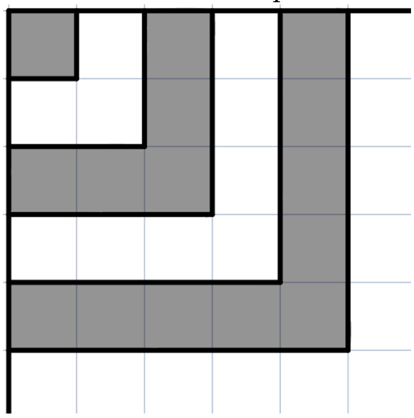
Ответ: 171

В-3 Пол квадратного зала выкладывают квадратными плитками одинакового размера белого и серого цвета таким образом, как показано на рисунке: угловая плитка серая, затем три белые, затем пять серых, затем семь белых, и т. д. Чтобы таким образом выложить плиткой весь пол зала, белых плиток потребовалось 136, а серых больше, причём резать плитки не пришлось. Сколько серых плиток потребовалось?



Ответ: 153

В-4 Пол квадратного зала выкладывают квадратными плитками одинакового размера белого и серого цвета таким образом, как показано на рисунке: угловая плитка серая, затем три белые, затем пять серых, затем семь белых, и т. д. Чтобы таким образом выложить плиткой весь пол зала, белых плиток потребовалось 171, а серых меньше, причём резать плитки не пришлось. Сколько серых плиток потребовалось?



Ответ: 153

Задача 4 (15 баллов)

В-1 На доске написано 12 различных натуральных чисел, причём их сумма нечётна, а произведение любых 5 из них чётно. Какое наименьшее значение может принимать сумма этих чисел?

Ответ: 99

Решение. Поскольку сумма данных чисел нечётна, то среди них нечётных — нечётное число. Поскольку произведение любых 5 из них чётно, то нечётных чисел меньше 5, т. е. 1 или 3. Сумма будет наименьшей, если взять первые чётные и нечётные числа. Если среди них 1 нечётное, то получаем сумму $1 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 22 = 133$, а если 3 нечётных, то сумма равна $1 + 3 + 5 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 20 = 113$. Наименьшая возможная сумма равна 113.

В-2 На доске написано 13 различных натуральных чисел, причём их сумма нечётна, а произведение любых 5 из них чётно. Какое наименьшее значение может принимать сумма этих чисел?

Ответ: 119

В-3 На доске написано 14 различных натуральных чисел, причём их сумма нечётна, а произведение любых 5 из них чётно. Какое наименьшее значение может принимать сумма этих чисел?

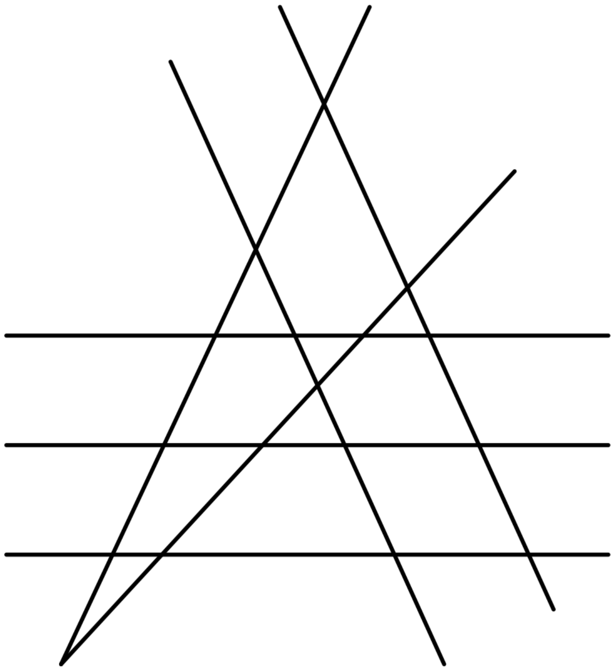
Ответ: 141

В-4 На доске написано 15 различных натуральных чисел, причём их сумма нечётна, а произведение любых 5 из них чётно. Какое наименьшее значение может принимать сумма этих чисел?

Ответ: 165

Задача 5 (20 баллов)

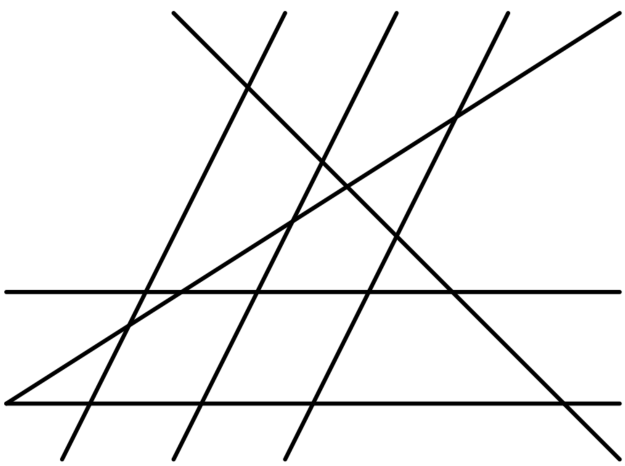
В-1 На рисунке изображено 7 прямых, среди которых три параллельных и ещё две параллельных. Никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько существует треугольников, все стороны каждого из которых лежат на этих прямых?



Ответ: 17

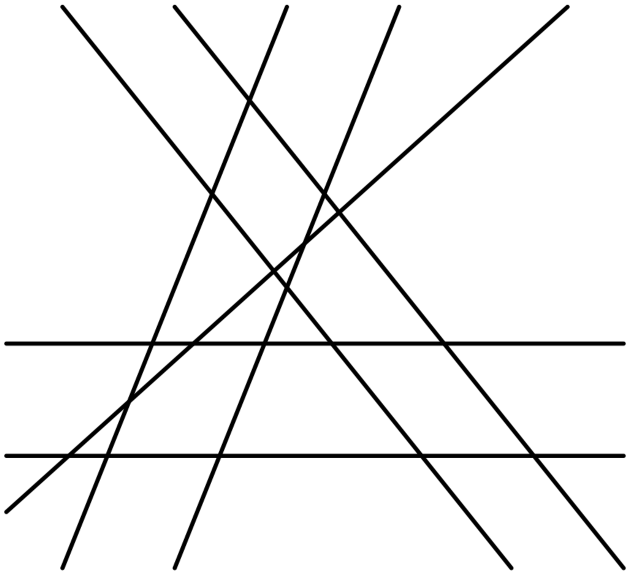
Решение. Три стороны треугольника должны лежать на трёх попарно непараллельных прямых. Если выбирать одну прямую из трёх параллельных, ещё одну из двух других параллельных и одну из двух оставшихся, получится $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ треугольников. Если выбрать одну прямую из трёх параллельных и две другие, не входящие в пару параллельных, получится ещё $3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$ треугольника. Наконец, если выбрать одну прямую из двух параллельных и две другие, не входящие в пару параллельных, получится ещё $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ треугольника. Итого $12 + 3 + 2 = 17$ треугольников.

В-2 На рисунке изображено 7 прямых, среди которых три параллельных и ещё две параллельных. Никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько существует треугольников, все стороны каждого из которых лежат на этих прямых?



Ответ: 17

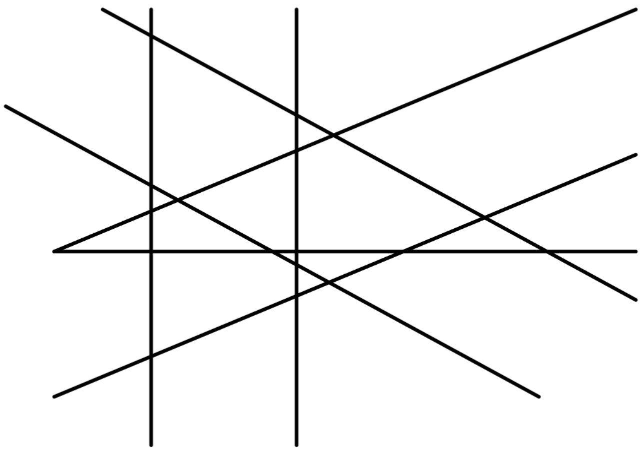
В-3 На рисунке изображено 7 прямых, среди которых три пары параллельных. Никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько существует треугольников, все стороны каждого из которых лежат на этих прямых?



Ответ: 20

Решение. Три стороны треугольника должны лежать на трёх попарно непараллельных прямых. Если выбирать по одной прямой из каждой пары параллельных, получится $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ треугольников. Если выбрать две прямые из двух пар параллельных и третью, не входящую в пары параллельных, получится ещё $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ треугольников (множитель 3 возникает оттого, что есть три способа определить, какую пару параллельных прямых мы не задействуем). Итого $12 + 8 = 20$ треугольников.

В-4 На рисунке изображено 7 прямых, среди которых три пары параллельных. Никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько существует треугольников, все стороны каждого из которых лежат на этих прямых?



Ответ: 20

Задача 6 (20 баллов)

В-1 Дорога из пункта A в пункт B длиной 11,5 км состоит из трёх участков: в гору, по равнине и под гору. Пешеход идёт в гору со скоростью 3 км/ч, по равнине — со скоростью 4 км/ч, под гору — со скоростью 5 км/ч. Известно, что на дорогу из A в B он потратил 2 ч 54 мин, а на обратный путь — 3 ч 6 мин. Какова длина (в км) участка пути, проходящего по равнине?

Ответ: 4

Решение. Пусть x — длина пути в гору, y — по равнине, z — под гору. Тогда $x+y+z = 11{,}5$, $x/3 + y/4 + z/5 = 2{,}9$, $x/5 + y/4 + z/3 = 3{,}1$. Складывая последние два уравнения, находим $\frac{8}{15}(x+z)+y/2 = 6$. Следовательно, с учётом первого уравнения получаем $(\frac{8}{15}-\frac{1}{2})y = 11{,}5\cdot\frac{8}{15}-6$, откуда $y = 4$ км.

В-2 Дорога из пункта A в пункт B длиной 12,5 км состоит из трёх участков: в гору, по равнине и под гору. Пешеход идёт в гору со скоростью 3 км/ч, по равнине — со скоростью 4 км/ч, под гору — со скоростью 5 км/ч. Известно, что на дорогу из A в B он потратил 3 ч 6 мин, а на обратный путь — 3 ч 24 мин. Какова длина (в км) участка пути, проходящего по равнине?

Ответ: 5

В-3 Дорога из пункта A в пункт B длиной 10,5 км состоит из трёх участков: в гору, по равнине и под гору. Пешеход идёт в гору со скоростью 3 км/ч, по равнине — со скоростью 4 км/ч, под гору — со скоростью 5 км/ч. Известно, что на дорогу из A в B он потратил 2 ч 36 мин, а на обратный путь — 2 ч 54 мин. Какова длина (в км) участка пути, проходящего по равнине?

Ответ: 3

В-4 Дорога из пункта A в пункт B длиной 13,5 км состоит из трёх участков: в гору, по равнине и под гору. Пешеход идёт в гору со скоростью 3 км/ч, по равнине — со скоростью 4 км/ч, под гору — со скоростью 5 км/ч. Известно, что на дорогу из A в B он потратил 3 ч 24 мин, а на обратный путь — 3 ч 36 мин. Какова длина (в км) участка пути, проходящего по равнине?

Ответ: 6
