

9 классы

Задачи 1 – 4 оценивались в 16 баллов каждая, задачи 5 – 6 – в 18 баллов каждая.

Правильный ответ = максимальный балл за задачу,

любой неправильный ответ = 0 баллов за задачу.

Максимальная сумма баллов = 100.

Во всех задачах, если это требуется, считать:

- ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$;
- везде, где не сказано иное, ответы давать в единицах СИ, при необходимости округлив до сотых.

Задача 1

1.1. Каждую четверть пути автомобиль увеличивал скорость на 20%. На сколько процентов средняя скорость автомобиля на всем пути отличается от скорости автомобиля на первой четверти пути? Ответ округлить до сотых долей процента.

Решение. Скорости движения автомобиля по четвертям пути: $V_0, \frac{6}{5}V_0, \frac{36}{25}V_0, \frac{216}{125}V_0$.

Тогда время прохождения каждой четверти: $\frac{S}{4V_0}, \frac{5S}{24V_0}, \frac{25S}{144V_0}, \frac{125S}{864V_0}$. Общее время, потраченное на весь путь, равно:

$$\frac{S}{4V_0} \left(1 + \frac{5}{6} + \frac{25}{36} + \frac{125}{216} \right) = \frac{S}{4V_0} \left(\frac{216 + 5 \cdot 36 + 6 \cdot 25 + 125}{216} \right) = \frac{S}{V_0} \cdot \frac{671}{864}.$$

$$\text{Средняя скорость равна } W = S : \frac{S}{V_0} \cdot \frac{671}{864} = \frac{864}{671} V_0.$$

Тогда получаем

$$W : V_0 - 1 = \frac{864}{671} - 1 \approx 0,2876.$$

Ответ: 28,76%.

1.2. Каждую четверть пути автомобиль увеличивал скорость на 20%. На сколько процентов средняя скорость автомобиля на всем пути отличается от скорости автомобиля на второй четверти пути? Ответ округлить до сотых долей процента.

{7,30}

1.3. Каждую четверть пути автомобиль увеличивал скорость на 20%. На сколько процентов средняя скорость автомобиля на всем пути отличается от скорости автомобиля на третьей четверти пути? Ответ округлить до сотых долей процента.

{10,58}

1.4. Каждую четверть пути автомобиль увеличивал скорость на 20%. На сколько процентов средняя скорость автомобиля на всем пути отличается от скорости автомобиля на третьей четверти пути? Ответ округлить до сотых долей процента.

{25,48}

Задача 2

2.1. Гаврила на водном мотоцикле, двигаясь с постоянной скоростью, проплывал путь от носа до кормы океанского лайнера за 12 с, а от кормы до носа – за 60 с. При этом лайнер двигался с постоянной скоростью. За какое время лайнер пройдет мимо Гаврилы, остановившего свой мотоцикл, чтобы порыбачить?

Решение. l, V, U – длина лайнера, скорость Гаврилы, скорость лайнера соответственно.

$$\begin{cases} l = (V + U)t_1 \\ l = (V - U)t_2 \\ l = Ut \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l/t_1 = (V + U) \\ l/t_2 = (V - U) \\ l = Ut \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе: $U = l \cdot \frac{t_2 - t_1}{2t_1 t_2} \Rightarrow t = \frac{2t_1 t_2}{t_2 - t_1} = 30 \text{ с.}$

Ответ: 30.

2.2. Глафира на водном мотоцикле, двигаясь с постоянной скоростью, проплывала путь от носа до кормы океанского лайнера за 15 с, а от кормы до носа – за 60 с. При этом лайнер двигался с постоянной скоростью. За какое время лайнер пройдет мимо Глафиры, остановившей свой мотоцикл, чтобы порыбачить?

{40}

2.3. Гаврила на водном мотоцикле, двигаясь с постоянной скоростью, проплывал путь от носа до кормы океанского лайнера за 12 с, а от кормы до носа – за 48 с. При этом лайнер двигался с постоянной скоростью. За какое время лайнер пройдет мимо Гаврилы, остановившего свой мотоцикл, чтобы порыбачить?

{32}

2.4. Глафира на водном мотоцикле, двигаясь с постоянной скоростью, проплывала путь от носа до кормы океанского лайнера за 15 с, а от кормы до носа – за 45 с. При этом лайнер двигался с постоянной скоростью. За какое время лайнер пройдет мимо Глафиры, остановившей свой мотоцикл, чтобы порыбачить?

{45}

Задача 3

3.1. Оболочку воздушного шара первый раз заполнили легким газом, а второй раз газом, плотность которого в 2 раза больше первого. При этом выяснилось, что во втором случае подъемная сила в 2 раза меньше, чем в первом. Во сколько раз плотность воздуха больше, чем плотность первого газа?

Решение. Подъемная сила есть разность силы Архимеда и силы тяжести. Поэтому

можно записать (здесь $n = 2$):

$$\frac{\rho V - \rho_1 V}{\rho V - \rho_2 V} = n \Rightarrow \rho - \rho_1 = n(\rho - \rho_2) \Rightarrow (n - 1)\rho = (n^2 - 1)\rho_1 \Rightarrow \rho = \rho_1(n + 1).$$

Поэтому отношение плотностей равно $n + 1$.

Ответ: 3.

3.2. Оболочку воздушного шара первый раз заполнили легким газом, а второй раз газом, плотность которого в 1,5 раза больше первого. При этом выяснилось, что во втором случае подъемная сила в 1,5 раза меньше, чем в первом. Во сколько раз плотность воздуха больше, чем плотность первого газа?

{2,5}.

3.3. Оболочку воздушного шара первый раз заполнили легким газом, а второй раз газом, плотность которого в 2,5 раза больше первого. При этом выяснилось, что во втором случае подъемная сила в 2,5 раза меньше, чем в первом. Во сколько раз плотность воздуха больше, чем плотность первого газа?

{3,5}.

3.4. Оболочку воздушного шара первый раз заполнили легким газом, а второй раз газом, плотность которого в 3 раза больше первого. При этом выяснилось, что во втором случае подъемная сила в 3 раза меньше, чем в первом. Во сколько раз плотность воздуха больше, чем плотность первого газа?

{4}.

Задача 4

4.1. Пружина 1 изготовлена путем последовательного соединения пружин A и B , жесткости которых отличаются в 2 раза. Пружина 2 изготовлена путем параллельного соединения таких же пружин A и B . Во сколько раз отличаются

жесткости пружин 1 и 2? В ответ запишите то отношение, которое больше 1, при необходимости округлив его до сотых.

Решение. При последовательном соединении:

$$F = k_1 \Delta l_1, F = k_2 \Delta l_2, F = k'(\Delta l_1 + \Delta l_2).$$

Отсюда получим $k' = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{\alpha k_1}{1 + \alpha}, \alpha = k_2 / k_1$.

При параллельном соединении

$$F_1 = k_1 \Delta l, F_2 = k_2 \Delta l, F = F_1 + F_2.$$

Отсюда получим $k'' = k_1 + k_2 = k_1(1 + \alpha)$.

Тогда получим ответ: $\frac{k''}{k'} = \frac{(1 + \alpha)^2}{\alpha}$.

Ответ: 4,5.

4.2. Пружина 1 изготовлена путем последовательного соединения пружин *A* и *B*, жесткости которых отличаются в 4 раза. Пружина 2 изготовлена путем параллельного соединения таких же пружин *A* и *B*. Во сколько раз отличаются жесткости пружин 1 и 2? В ответ запишите то отношение, которое больше 1, при необходимости округлив его до сотых.

{6,25}.

4.3. Пружина 1 изготовлена путем последовательного соединения пружин *A* и *B*, жесткости которых отличаются в 1,25 раз. Пружина 2 изготовлена путем параллельного соединения таких же пружин *A* и *B*. Во сколько раз отличаются жесткости пружин 1 и 2? В ответ запишите то отношение, которое больше 1, при необходимости округлив его до сотых.

{4,05}.

4.4. Пружина 1 изготовлена путем последовательного соединения пружин *A* и *B*, жесткости которых отличаются в 2,5 раза. Пружина 2 изготовлена путем

параллельного соединения таких же пружин A и B . Во сколько раз отличаются жесткости пружин 1 и 2? В ответ запишите то отношение, которое больше 1, при необходимости округлив его до сотых.

{4,9}.

Задача 5

5.1. В сплаве из трех металлов концентрации этих металлов относятся, как 1: 2: 3, плотности этих металлов соответственно относятся, как 3: 2: 1. Определите отношение плотности сплава к плотности первого металла, при необходимости округлив его до сотых.

Решение. Из условия на концентрации $C_a: C_b: C_c = 1: 2: 3$ будем иметь:

$$m_a: m_b: m_c = 1: 2: 3 \quad (1)$$

Пусть $\rho_a = 3\alpha, \rho_b = 2\alpha, \rho_c = \alpha$. Тогда из (1) следует:

$$\rho_a V_a: \rho_b V_b: \rho_c V_c = 1: 2: 3 \Rightarrow 3\alpha V_a: 2\alpha V_b: \alpha V_c = 1: 2: 3 \Rightarrow V_a = \beta, V_b = 3\beta, V_c = 9\beta$$

Выразим массу сплава через массы составляющих его элементов:

$$m_a = 3\alpha\beta, m_b = 6\alpha\beta, m_c = 9\alpha\beta \Rightarrow m = 18\alpha\beta$$

Объем сплава равен $V = V_a + V_b + V_c = 13\beta$

Плотность сплава равна: $\rho = \frac{18\alpha\beta}{13\beta} = \frac{18}{13}\alpha$. Тогда $\frac{\rho}{\rho_a} = \frac{6}{13} \approx 0,46$.

Ответ: 0,46.

5.2. В сплаве из трех металлов концентрации этих металлов относятся, как 1: 2: 3, плотности этих металлов соответственно относятся, как 3: 2: 1. Определите отношение плотности сплава к плотности второго металла, при необходимости округлив его до сотых.

{0,69}.

5.3. В сплаве из трех металлов концентрации этих металлов относятся, как 1: 2: 3, плотности этих металлов соответственно относятся, как 3: 2: 1. Определите отношение плотности сплава к плотности третьего металла, при необходимости округлив его до сотых.

{1,38}.

5.4. В сплаве из трех металлов концентрации этих металлов относятся, как 1: 2: 3, плотности этих металлов соответственно относятся, как 3: 2: 1. Определите отношение плотности сплава к сумме плотностей всех трех металлов, при необходимости округлив его до сотых.

{0,23}.

Задача 6

6.1. Гаврила тестировал учебную компьютерную игру, которую сделала Глафира. По замыслу автора точечная цель движется по прямой по закону

$$x(t) = 3t + 1,5t^2 + 3t^3 - 1,5t^4,$$

где t – время в секундах, x – координата точки.

Гаврила имеет возможность видеть цель только тогда, когда $x \geq 1,5$. Успеет ли он ее поразить, если на прицеливание и выстрел уходит 2,2 секунды?

Если не успеет, то в ответ поставьте 0.

Если успеет, то в ответ внесите длину максимального промежутка времени, в течение которого Гаврила видит цель. При необходимости ответ округлите до сотых.

Решение. Разделим неравенство $x(t) \geq 1,5$ на 1,5, получаем неравенство:

$$2t + t^2 + 2t^3 - t^4 \geq 1 \Rightarrow t^4 - 2t^3 - t^2 - 2t + 1 \leq 0.$$

Теперь поделим неравенство на t^2 и сделаем замену переменных $z = t + \frac{1}{t}$.

Придем к неравенству: $z^2 - 2z - 3 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq z \leq 3$. С учетом замены переменных и того факта, что $t > 0$, придем к неравенству для t :

$$t^2 - 3t + 1 \leq 0.$$

Решение этого неравенства и есть промежуток времени, в течение которого Гаврила будет видеть цель. Так как оба корня левой части неравенства положительны, то промежуток времени равен разности корней, которую можно найти с помощью теоремы Виета:

$$|t_2 - t_1| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 \cdot t_2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5} > 2,2, \text{ так как } 5 > 2,2^2 = 4,84.$$

Потому успеет, и искомое время равно $\sqrt{5} \approx 2,24$ сек.

Ответ: 2,24.

6.2. Гаврила тестировал учебную компьютерную игру, которую сделала Глафира. По замыслу автора точечная цель движется по прямой по закону

$$x(t) = t + 0,5t^2 + t^3 - 0,5t^4,$$

где t – время в секундах, x – координата точки.

Гаврила имеет возможность видеть цель только тогда, когда $x \geq 0,5$. Успеет ли он ее поразить, если на прицеливание и выстрел уходит 2,2 секунды?

Если не успеет, то в ответ поставьте 0.

Если успеет, то в ответ внесите длину максимального промежутка времени, в течение которого Гаврила видит цель. При необходимости ответ округлите до сотых.

{2,24}

6.3. Гаврила тестировал учебную компьютерную игру, которую сделала Глафира. По замыслу автора точечная цель движется по прямой по закону

$$x(t) = 5t + 2,5t^2 + 5t^3 - 2,5t^4,$$

где t – время в секундах, x – координата точки.

Гаврила имеет возможность видеть цель только тогда, когда $x \geq 2,5$. Успеет ли он ее поразить, если на прицеливание и выстрел уходит 2,2 секунды?

Если не успеет, то в ответ поставьте 0.

Если успеет, то в ответ внесите длину максимального промежутка времени, в течение которого Гаврила видит цель. При необходимости ответ округлите до сотых.

{2,24}

6.4. Гаврила тестировал учебную компьютерную игру, которую сделала Глафира. По замыслу автора точечная цель движется по прямой по закону

$$x(t) = 7t + 3,5t^2 + 7t^3 - 3,5t^4,$$

где t – время в секундах, x – координата точки.

Гаврила имеет возможность видеть цель только тогда, когда $x \geq 3,5$. Успеет ли он ее поразить, если на прицеливание и выстрел уходит 2,2 секунды?

Если не успеет, то в ответ поставьте 0.

Если успеет, то в ответ внесите длину максимального промежутка времени, в течение которого Гаврила видит цель. При необходимости ответ округлите до сотых.

{2,24}

7 - 8 классы

Каждая задача оценивалась в 20 баллов.

Правильный ответ = 20 баллов за задачу,

любой неправильный ответ = 0 баллов за задачу.

Максимальная сумма баллов = 100.

Во всех задачах, если это требуется, считать:

- ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$;
- везде, где не сказано иное, ответы давать в единицах СИ, при необходимости округлив до сотых.

Задача 1

1.1. Каждую четверть пути автомобиль увеличивал скорость на 20%. На сколько процентов средняя скорость автомобиля на всем пути отличается от скорости автомобиля на первой четверти пути? Ответ округлить до сотых долей процента.

Решение. Скорости движения автомобиля по четвертям пути: $V_0, \frac{6}{5}V_0, \frac{36}{25}V_0, \frac{216}{125}V_0$.

Тогда время прохождения каждой четверти: $\frac{S}{4V_0}, \frac{5S}{24V_0}, \frac{25S}{144V_0}, \frac{125S}{864V_0}$. Общее время, потраченное на весь путь, равно:

$$\frac{S}{4V_0} \left(1 + \frac{5}{6} + \frac{25}{36} + \frac{125}{216} \right) = \frac{S}{4V_0} \left(\frac{216 + 5 \cdot 36 + 6 \cdot 25 + 125}{216} \right) = \frac{S}{V_0} \cdot \frac{671}{864}.$$

$$\text{Средняя скорость равна } W = S : \frac{S}{V_0} \cdot \frac{671}{864} = \frac{864}{671} V_0.$$

Тогда получаем

$$W : V_0 - 1 = \frac{864}{671} - 1 \approx 0,2876.$$

Ответ: 28,76%.

1.2. Каждую четверть пути автомобиль увеличивал скорость на 20%. На сколько процентов средняя скорость автомобиля на всем пути отличается от скорости автомобиля на второй четверти пути? Ответ округлить до сотых долей процента.

{7,30}

1.3. Каждую четверть пути автомобиль увеличивал скорость на 20%. На сколько процентов средняя скорость автомобиля на всем пути отличается от скорости автомобиля на третьей четверти пути? Ответ округлить до сотых долей процента.

{10,58}

1.4. Каждую четверть пути автомобиль увеличивал скорость на 20%. На сколько процентов средняя скорость автомобиля на всем пути отличается от скорости автомобиля на третьей четверти пути? Ответ округлить до сотых долей процента.

{25,48}

Задача 2

2.1. Гаврила на водном мотоцикле, двигаясь с постоянной скоростью, проплывал путь от носа до кормы океанского лайнера за 12 с, а от кормы до носа – за 60 с. При этом лайнер двигался с постоянной скоростью. За какое время лайнер пройдет мимо Гаврилы, остановившего свой мотоцикл, чтобы порыбачить?

Решение. l, V, U – длина лайнера, скорость Гаврилы, скорость лайнера соответственно.

$$\begin{cases} l = (V + U)t_1 \\ l = (V - U)t_2 \\ l = Ut \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l/t_1 = (V + U) \\ l/t_2 = (V - U) \\ l = Ut \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе: $U = l \cdot \frac{t_2 - t_1}{2t_1 t_2} \Rightarrow t = \frac{2t_1 t_2}{t_2 - t_1} = 30 \text{ с.}$

Ответ: 30.

2.2. Глафира на водном мотоцикле, двигаясь с постоянной скоростью, проплывала путь от носа до кормы океанского лайнера за 15 с, а от кормы до носа – за 60 с. При этом лайнер двигался с постоянной скоростью. За какое время лайнер пройдет мимо Глафиры, остановившей свой мотоцикл, чтобы порыбачить?

{40}

2.3. Гаврила на водном мотоцикле, двигаясь с постоянной скоростью, проплывал путь от носа до кормы океанского лайнера за 12 с, а от кормы до носа – за 48 с. При этом лайнер двигался с постоянной скоростью. За какое время лайнер пройдет мимо Гаврилы, остановившего свой мотоцикл, чтобы порыбачить?

{32}

2.4. Глафира на водном мотоцикле, двигаясь с постоянной скоростью, проплывала путь от носа до кормы океанского лайнера за 15 с, а от кормы до носа – за 45 с. При этом лайнер двигался с постоянной скоростью. За какое время лайнер пройдет мимо Глафиры, остановившей свой мотоцикл, чтобы порыбачить?

{45}

Задача 3

3.1. Оболочку воздушного шара первый раз заполнили легким газом, а второй раз газом, плотность которого в 2 раза больше первого. При этом выяснилось, что во втором случае подъемная сила в 2 раза меньше, чем в первом. Во сколько раз плотность воздуха больше, чем плотность первого газа?

Решение. Подъемная сила есть разность силы Архимеда и силы тяжести. Поэтому

можно записать (здесь $n = 2$):

$$\frac{\rho V - \rho_1 V}{\rho V - \rho_2 V} = n \Rightarrow \rho - \rho_1 = n(\rho - \rho_2) \Rightarrow (n - 1)\rho = (n^2 - 1)\rho_1 \Rightarrow \rho = \rho_1(n + 1).$$

Поэтому отношение плотностей равно $n + 1$.

Ответ: 3.

3.2. Оболочку воздушного шара первый раз заполнили легким газом, а второй раз газом, плотность которого в 1,5 раза больше первого. При этом выяснилось, что во втором случае подъемная сила в 1,5 раза меньше, чем в первом. Во сколько раз плотность воздуха больше, чем плотность первого газа?

{2,5}.

3.3. Оболочку воздушного шара первый раз заполнили легким газом, а второй раз газом, плотность которого в 2,5 раза больше первого. При этом выяснилось, что во втором случае подъемная сила в 2,5 раза меньше, чем в первом. Во сколько раз плотность воздуха больше, чем плотность первого газа?

{3,5}.

3.4. Оболочку воздушного шара первый раз заполнили легким газом, а второй раз газом, плотность которого в 3 раза больше первого. При этом выяснилось, что во втором случае подъемная сила в 3 раза меньше, чем в первом. Во сколько раз плотность воздуха больше, чем плотность первого газа?

{4}.

Задача 4

4.1. Пружина 1 изготовлена путем последовательного соединения пружин A и B , жесткости которых отличаются в 2 раза. Пружина 2 изготовлена путем параллельного соединения таких же пружин A и B . Во сколько раз отличаются

жесткости пружин 1 и 2? В ответ запишите то отношение, которое больше 1, при необходимости округлив его до сотых.

Решение. При последовательном соединении:

$$F = k_1 \Delta l_1, F = k_2 \Delta l_2, F = k'(\Delta l_1 + \Delta l_2).$$

Отсюда получим $k' = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{\alpha k_1}{1 + \alpha}, \alpha = k_2 / k_1$.

При параллельном соединении

$$F_1 = k_1 \Delta l, F_2 = k_2 \Delta l, F = F_1 + F_2.$$

Отсюда получим $k'' = k_1 + k_2 = k_1(1 + \alpha)$.

Тогда получим ответ: $\frac{k''}{k'} = \frac{(1 + \alpha)^2}{\alpha}$.

Ответ: 4,5.

4.2. Пружина 1 изготовлена путем последовательного соединения пружин A и B , жесткости которых отличаются в 4 раза. Пружина 2 изготовлена путем параллельного соединения таких же пружин A и B . Во сколько раз отличаются жесткости пружин 1 и 2? В ответ запишите то отношение, которое больше 1, при необходимости округлив его до сотых.

{6,25}.

4.3. Пружина 1 изготовлена путем последовательного соединения пружин A и B , жесткости которых отличаются в 1,25 раз. Пружина 2 изготовлена путем параллельного соединения таких же пружин A и B . Во сколько раз отличаются жесткости пружин 1 и 2? В ответ запишите то отношение, которое больше 1, при необходимости округлив его до сотых.

{4,05}.

4.4. Пружина 1 изготовлена путем последовательного соединения пружин A и B , жесткости которых отличаются в 2,5 раза. Пружина 2 изготовлена путем

параллельного соединения таких же пружин A и B . Во сколько раз отличаются жесткости пружин 1 и 2? В ответ запишите то отношение, которое больше 1, при необходимости округлив его до сотых.

{4,9}.

Задача 5

5.1. В сплаве из трех металлов концентрации этих металлов относятся, как 1: 2: 3, плотности этих металлов соответственно относятся, как 3: 2: 1. Определите отношение плотности сплава к плотности первого металла, при необходимости округлив его до сотых.

Решение. Из условия на концентрации $C_a: C_b: C_c = 1: 2: 3$ будем иметь:

$$m_a: m_b: m_c = 1: 2: 3 \quad (1)$$

Пусть $\rho_a = 3\alpha, \rho_b = 2\alpha, \rho_c = \alpha$. Тогда из (1) следует:

$$\rho_a V_a: \rho_b V_b: \rho_c V_c = 1: 2: 3 \Rightarrow 3\alpha V_a: 2\alpha V_b: \alpha V_c = 1: 2: 3 \Rightarrow V_a = \beta, V_b = 3\beta, V_c = 9\beta$$

Выразим массу сплава через массы составляющих его элементов:

$$m_a = 3\alpha\beta, m_b = 6\alpha\beta, m_c = 9\alpha\beta \Rightarrow m = 18\alpha\beta$$

Объем сплава равен $V = V_a + V_b + V_c = 13\beta$

Плотность сплава равна: $\rho = \frac{18\alpha\beta}{13\beta} = \frac{18}{13}\alpha$. Тогда $\frac{\rho}{\rho_a} = \frac{6}{13} \approx 0,46$.

Ответ: 0,46.

5.2. В сплаве из трех металлов концентрации этих металлов относятся, как 1: 2: 3, плотности этих металлов соответственно относятся, как 3: 2: 1. Определите отношение плотности сплава к плотности второго металла, при необходимости округлив его до сотых.

{0,69}.

5.3. В сплаве из трех металлов концентрации этих металлов относятся, как 1: 2: 3, плотности этих металлов соответственно относятся, как 3: 2: 1. Определите отношение плотности сплава к плотности третьего металла, при необходимости округлив его до сотых.

{1,38}.

5.4. В сплаве из трех металлов концентрации этих металлов относятся, как 1: 2: 3, плотности этих металлов соответственно относятся, как 3: 2: 1. Определите отношение плотности сплава к сумме плотностей всех трех металлов, при необходимости округлив его до сотых.

{0,23}.