

№1 (15 баллов)

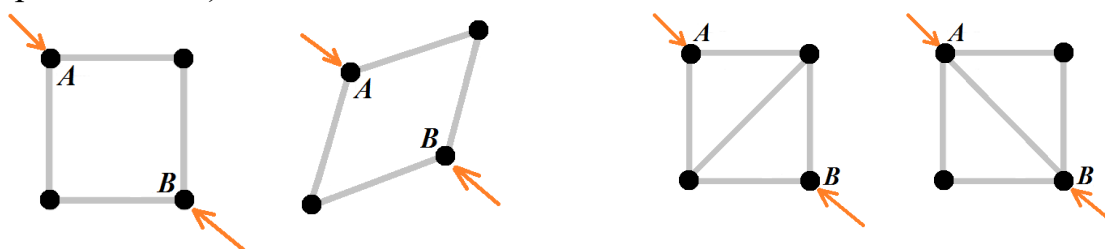
Рассмотрим структуры, построенные из компонентов, подчиняющихся следующим правилам:

- **Стержни** идеально жесткие. Они не растягиваются, не сгибаются и не сжимаются — независимо от того, с какой силой они нагружены.
- **Шарниры** соединяют стержни вместе, и стержни могут образовывать любой угол.



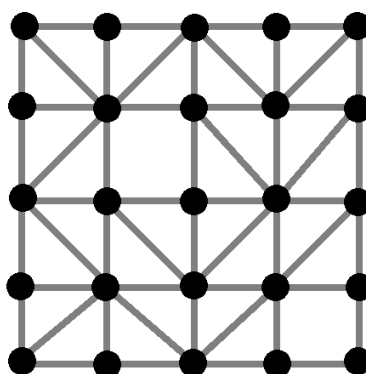
Будем считать, что все рассматриваемые нами структуры плоские и расположены на горизонтальной поверхности.

Если нажать на шарниры A и B, то квадрат деформируется. Значит, наша конструкция не жесткая. Чтобы сделать её жесткой, нужно добавить ещё один стержень (Будем называть стержень, соединяющий две несмежные вершины квадрата **скобой**).



Дополнительный стержень (скоба) разбивает квадрат на два треугольника. А треугольник — это жесткая структура.

Рассмотрим следующий каркас:



Каркас №1

Он является жесткой, так как по крайней мере одна сторона в каждом треугольнике является общей с другим треугольником. Но, данная структура не является минимальной.

А) (5 баллов) Какое максимальное количество диагональных стержней (скоб) можно убрать из каркаса №1, чтобы структура осталась жесткой?

Б) (10 баллов) Приведите пример каркаса, полученного из данного путём убирания скоб, который является жестким и содержит минимальное количество скоб, а также соответствующий ему двудольный граф.

Приведите подробное решение данной задачи.

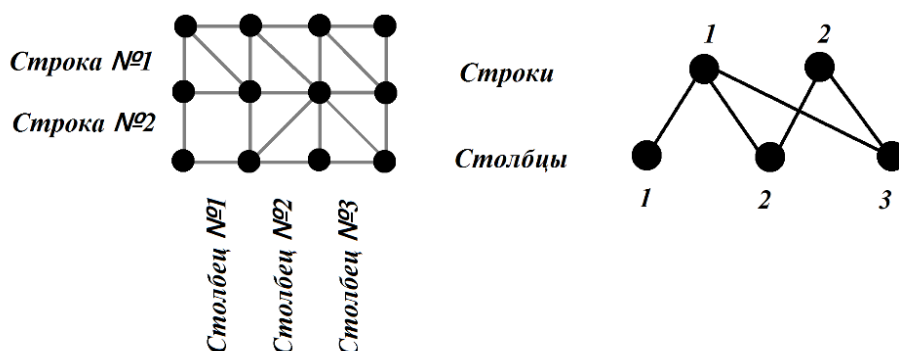
Справочная информация

Будем называть структуру жёсткой, если при воздействии на неё сил расстояние между её отдельными узлами (шарнирами) не меняется.

Для того, чтобы определить, является ли структура жёсткой, можно построить двудольный граф по следующим правилам:

- Вершины графа соответствуют строкам и столбцам каркаса;*
- Ребра графа соединяют вершину-строку с вершиной-столбцом только тогда, когда между соответствующей строкой и столбцом в каркасе есть скоба.*

Следующей структуре соответствует данный двудольный граф:

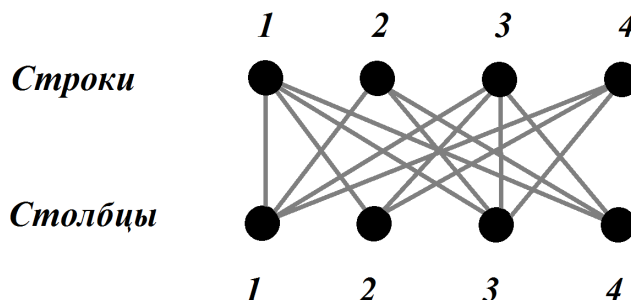
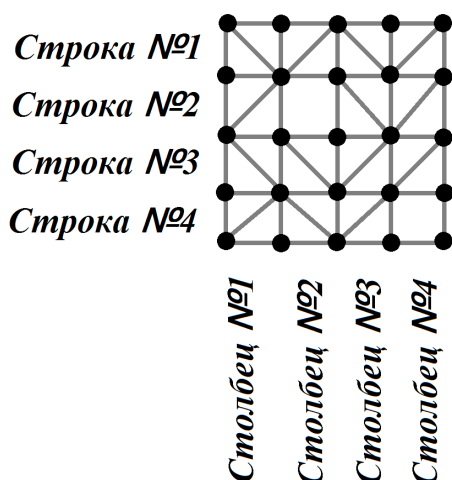


Прямоугольный каркас со скобами является жёстким тогда и только тогда, когда соответствующий двудольный граф связан.

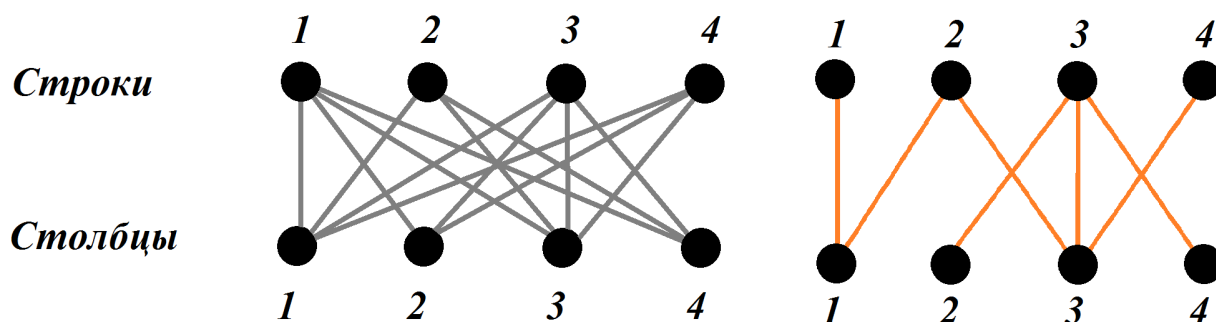
Если двудольный граф является остовным деревом, то связывание каркаса скобами является минимальным.

Решение

Построим для каркаса соответствующий ему двудольный граф:



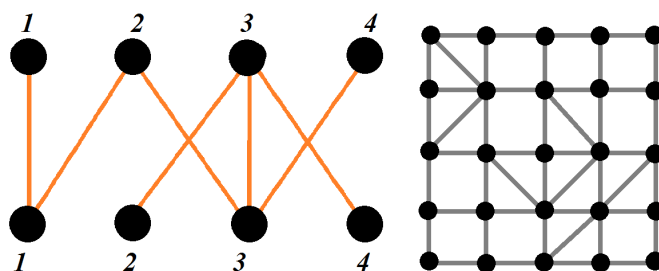
Для того, чтобы найти решение задачи, нам надо получить из данного графа остовное дерево. Для этого нам нужно удалить все циклы из соответствующего графа:



Таким образом, мы убрали:

$$14 - 7 = 7 \text{ (скоб)}$$

По данному графу можно получить следующее расположение скоб:

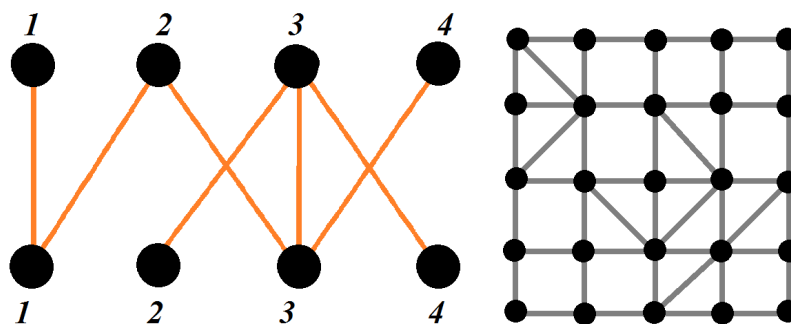


Приведённый вариант расположения скоб не является единственно возможным.

Ответ:

А) 7 скоб;

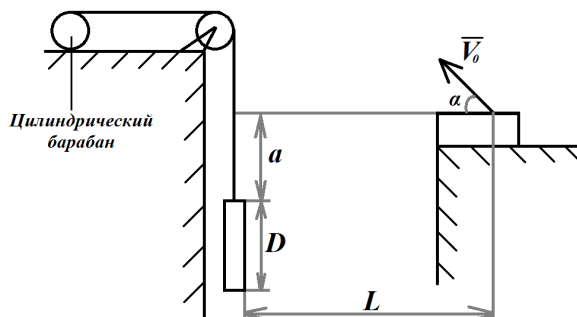
Б) Например, такой вариант:



№ п/п	Критерии	Баллы
Пункт А		
1.1	Верно определена количество скоб, которое надо удалить (7 штук). В решении присутствует верное обоснование того, почему нужно удалить именно 7 скоб.	5
1.2	Дан верный ответ (7 штук). Решение отсутствует	1
Пункт Б		
1.3	Приведён правильный двудольный связный граф (содержащий ровно 7 рёбер) и рисунок каркаса, содержащего 7 скоб. Скобы должны быть расположен так, что если в двудольном графе есть ребро, соединяющее вершину «номер строки» с вершиной «номер столбца», то и на пересечении соответствующей строки и столбца в каркасе должна быть скоба. Приведено подробное решение. Правильно построен граф исходного каркаса. Отсутствуют ошибки.	10
1.4	Приведён правильно построенный, но не минимальный двудольный связный граф (содержащий больше 7, но меньше 14 рёбер) и верный рисунок каркаса, содержащего столько же скоб. Скобы должны быть расположен так, что если в двудольном графе есть ребро, соединяющее вершину «номер строки» с вершиной «номер столбца», то и на пересечении соответствующей строки и столбца в каркасе должна быть скоба. Приведено подробное решение.	7
1.5	Дан верный ответ: приведён правильный двудольный связный граф (содержащий ровно 7 рёбер) и рисунок каркаса, содержащего 7 скоб. Скобы должны быть расположен так, что если в двудольном графе есть ребро, соединяющее вершину «номер строки» с вершиной «номер столбца», то и на пересечении соответствующей строки и столбца в каркасе должна быть скоба. Решение отсутствует	5
1.6	В остальных случаях	0

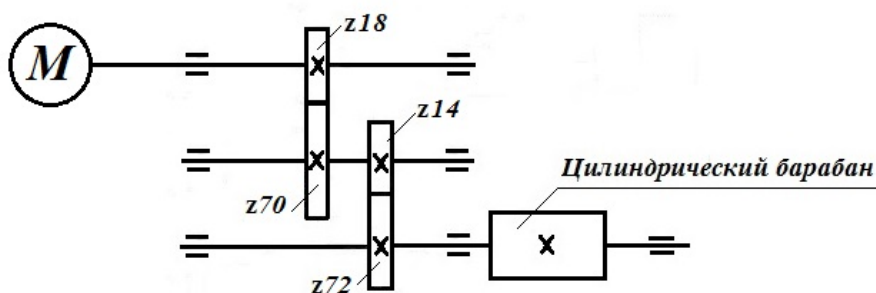
№2 (15 баллов)

Плоскую цилиндрическую мишень диаметра $D = 20$ см подвесили вертикально на тонкую прочную невесомую нерастяжимую нить. Нить перекинули через неподвижный блок и прикрепили к цилиндрическому барабану (см. схема). Если потянуть за нить, то мишень начнет подниматься.



Схема

Цилиндрический барабан диаметра $d = 10$ см соединён с мотором через зубчатую передачу (см. кинематическая схема).



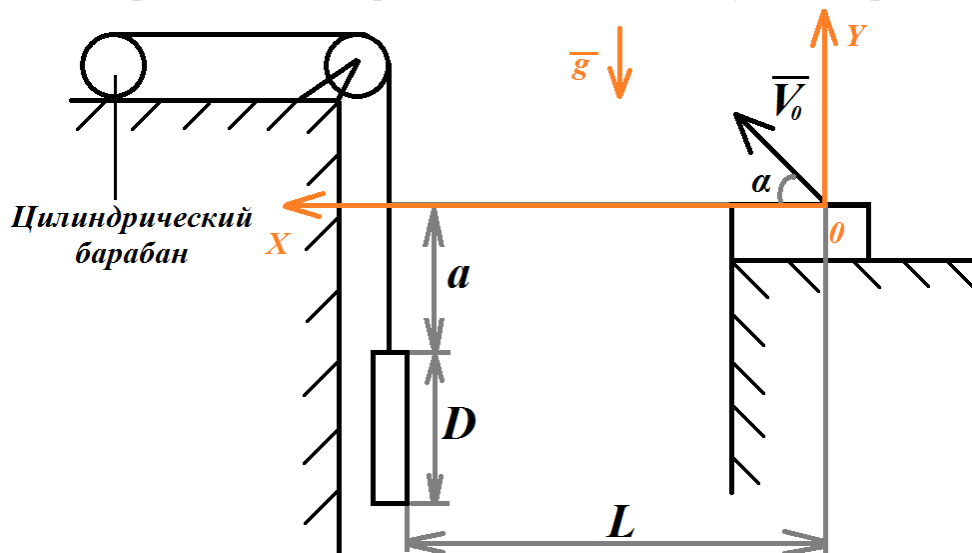
Кинематическая схема

Напротив мишени стоит робот. На нём установлено устройство для стрельбы шариками. Оно настроено так, что небольшие шарики будут вылетать под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту со скоростью $V_0 = 6$ м/с. Расстояние от точки вылета шариков до плоскости, в которой движется мишень равно $L = 4$ м. Верхний край мишени расположен под горизонтальной плоскостью, в которой лежит точка вылета шарика, на расстоянии $a = 1,6$ м. Масса шариков равна $m = 0,1$ г. Согласно программе, ось мотора будет совершать 12 оборотов каждые 2 секунды. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$, $g \approx 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Считайте, что нить наматывается на барабан равномерно в один слой. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Определите время, через которое после начала работы мотора должен выстрелить робот, чтобы шарик попал точно в центр мишени. Ответ дайте в секундах, округлив результат до десятых. Приведите подробное решение данной задачи. Чтобы получить более точный ответ, округление стоит производить только при получении финального ответа.

Решение:

Введём систему координат, расположив точку начало отсчета в точку вылета шарика. Ось OX расположим горизонтально, ось OY пустим вертикально:



Тогда уравнения движения шарика можно записать следующим образом в проекции на выбранные оси:

$$\begin{aligned}x &= 0 + V_0 t \cos \alpha + 0 \\y &= 0 + V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}\end{aligned}$$

Нам надо определить время и высоту h , на которой будет находиться шарик в тот момент, когда пролетит L метров по горизонтали.

$$\begin{aligned}L &= V_0 t \cos \alpha \\t &= \frac{L}{V_0 \cos \alpha} \\h &= V_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2 = V_0 \sin \alpha \times \frac{L}{V_0 \cos \alpha} - \frac{g}{2} \left(\frac{L}{V_0 \cos \alpha} \right)^2 \\h &= L \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \left(\frac{L}{V_0 \cos \alpha} \right)^2\end{aligned}$$

Значит, чтобы шарик попал в центр мишени, центр мишени должен находиться в момент времени t после выстрела на высоте h .

Определим, выше или ниже оси OX будет находиться шарик в момент удара о центр мишени:

$$\begin{aligned}h &= L \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \left(\frac{L}{V_0 \cos \alpha} \right)^2 = 4 \times \operatorname{tg} 45^\circ - \frac{9,81}{2} \times \left(\frac{4}{6 \times \cos 45^\circ} \right)^2 = \\&= 4 - \frac{9,81 \times 4}{2 \times 9 \times 0,5} = 4 - 4,36 = -0,36 \text{ (м)}\end{aligned}$$

Получается, что в момент удара мишень должна находиться ниже оси **OX** на 36 см.

Чтобы шарик попал в центр мишени, мишень должна поднялась на высоту:

$$H_1 = a + \frac{D}{2} + h$$

Определим частоту вращения цилиндрического барабана, на который наматывается нить:

$$w = \frac{12}{2} \times \frac{18}{70} \times \frac{14}{72} = 6 \times \frac{18 \times 14}{70 \times 72} = \frac{6}{4 \times 5} = 0,3 \left(\frac{\text{об.}}{\text{с}} \right)$$

Посчитаем длину окружности барабана:

$$C = \pi \times d = \pi \times 0,1 = 0,1\pi \text{ (м)}$$

Определим, с какой скоростью поднимается мишень:

$$V = w \times C = 0,3 \times 0,1\pi = 0,03\pi \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$$

Определим время, которое потребуется барабану, чтобы поднять мишень на требуемую высоту:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{H_1}{V} = \frac{a + \frac{D}{2} + h}{V} - \frac{L}{V_0 \cos \alpha} = \\ &= \frac{1,6 + 0,1 - 0,36}{0,03 \times 3,14} - \frac{4}{6 \times \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{134}{3 \times 3,14} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = 13,282 \dots \approx 13,3 \text{ (с)} \end{aligned}$$

Ответ: 13,3 с.

№ п/п	Критерии	Баллы
2.1	Дан верный ответ (13,3 с). Дано полное верное решение: присутствуют все необходимые расчеты. Даны необходимые пояснения к решению. Нет арифметических ошибок. Записан верный ответ.	15
2.2	Дан верный ответ (13,3 с). Дано верное решение: присутствуют все необходимые расчеты. Нет необходимых пояснений к решению. Нет ошибок.	12
2.3	Дан верный ответ, но он представлен не в верной форме – округлён не до десятых и/или дан не в требуемых единицах измерения. Дано верное решение: присутствуют все расчеты. Даны необходимые пояснения к решению. Нет ошибок.	10
2.4	Дано неполное верное решение: присутствуют необходимые расчеты. Даны необходимые пояснения к решению. Нет арифметических ошибок. . Верно	5

	записан 2 закон Ньютона, верно записаны проекции 2 закона Ньютона на введенные оси.	
2.5	Решение содержит арифметические ошибки. Верная логика решения. Решение доведено до конца. Даны необходимые пояснения к решению.	5
2.6	Дан верный ответ (13,3 с). Решение отсутствует.	3
2.7	В остальных случаях	0

№3 (15 баллов)

Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, диаметр каждого из колёс робота равен $d = 15$ см. Левым колесом управляет мотор A , правым колесом управляет мотор B . Колёса напрямую подсоединены к моторам (см. *схему робота*). По середине между центрами колёс находится маркер. Расстояние между центрами колёс (ширина колеи) робота равно $L = 40$ см. Моторы на роботе установлены так, что если обе оси повернутся на 180° , то робот проедет прямо вперёд.

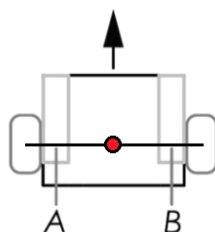


Схема робота

Робот последовательно выполнил следующие действия:

- 1) Ось мотора A повернулась на 2400° , ось мотора B повернулась на 3360° ;
- 2) Ось мотора A повернулась на 480° , ось мотора B повернулась на -480° ;
- 3) Ось мотора A повернулась на 2400° , ось мотора B повернулась на 2400° ;
- 4) Ось мотора A повернулась на 480° , ось мотора B повернулась на -480° ;
- 5) Ось мотора A повернулась на 2400° , ось мотора B повернулась на 3360° ;
- 6) Ось мотора A повернулась на 480° , ось мотора B повернулась на -480° ;
- 7) Ось мотора A повернулась на 2400° , ось мотора B повернулась на 2400° .

Определите, какой длины кривую начертил робот. Ответ дайте в сантиметрах, приведя результат с точностью до десятых. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$.

Приведите подробное решение задачи. Чтобы получить более точный результат, округление стоит производить только при получении финального ответа.

Решение

Рассмотрим, какого типа движения совершает робот. Их можно разделить на три типа: на разворот на месте, на проезд по кривой и на проезд прямо.

Движения 3) и 7) – это проезд вперёд (ось мотора A повернулась на 2400° , ось мотора B повернулась на 2400°).

Рассчитаем, какой длины прямолинейный отрезок проехал робот.

$$\frac{2400^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 15 = 100 \times \pi = 314 \text{ (см)}$$

Движения 2), 4) и 6) – это разворот на месте (Ось мотора **A** повернулась на 480° , ось мотора **B** повернулась на -480°). От этого движения длина линии, начерченной роботом, не меняется.

Движения 1) и 5) – это движение кисти робота по дуге окружности радиуса **R** (ось мотора **A** повернулась на 2400° , ось мотора **B** повернулась на 3360°).

Определим радиус дуги окружности **R**, по которой движется кисть, и градусную меру угла дуги **x**:

$$\begin{aligned} 2\pi \left(R - \frac{L}{2}\right) \times \frac{x}{360^\circ} &= \pi d \times \frac{2400^\circ}{360^\circ} \\ 2\pi \left(R + \frac{L}{2}\right) \times \frac{x}{360^\circ} &= \pi d \times \frac{3360^\circ}{360^\circ} \end{aligned}$$

Решив данные уравнения в системе, получим:

$$R = 120 \text{ см}, x = 180^\circ$$

Рассчитаем длину дуги, начерченной кистью:

$$\frac{180^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \pi \times R = 3,14 \times 120 = 376,8 \text{ (см)}$$

Тогда общая длина кривой, вычерченной роботом, будет равна:

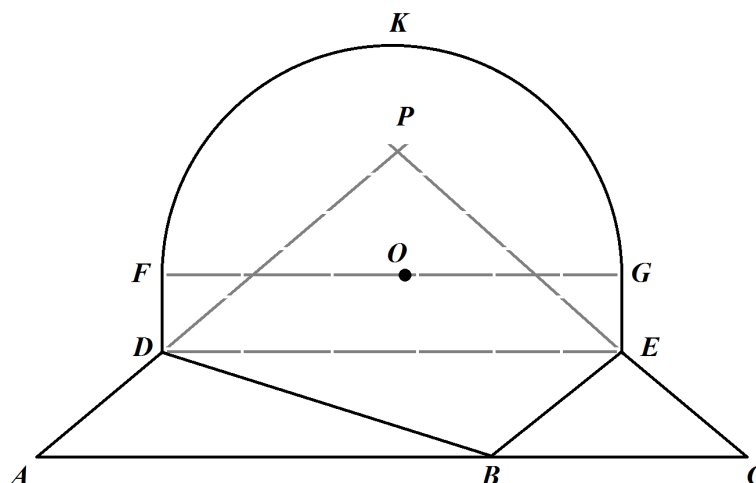
$$314 \times 2 + 376,8 \times 2 = 1381,6 \text{ (см)}$$

Ответ: 1381,6 см.

№ п/п	Критерии	Баллы
3.1	Дан верный ответ (1381,6 см). Дано полное верное решение: присутствуют все расчеты. Даны необходимые пояснения к решению. Нет арифметических ошибок. Записан верный ответ.	15
3.2	Верно определены только градусная мера угла поворота робота вокруг колеса за одно движение (180°) и радиус кривой (120 см). Даны необходимые пояснения к решению. Нет арифметических ошибок.	10
3.3	Решение содержит элементы верной логики. Решение доведено до конца. Даны необходимые пояснения к решению. Ответ неверный.	5
3.4	В остальных случаях	0

№4 (15 баллов)

Робот-чертёжник движется по ровной горизонтальной поверхности и наносит на неё изображение (см. *изображение*) при помощи кисти, закреплённой по середине между колёс. Робот наносит только те линии, которые даны на изображении сплошной линией.



Изображение

Известно, что данная фигура содержит полуокруг $FKGO$ с центром в точке O , радиуса $R = 3$ м. FD и GE – это отрезки касательных к окружности.

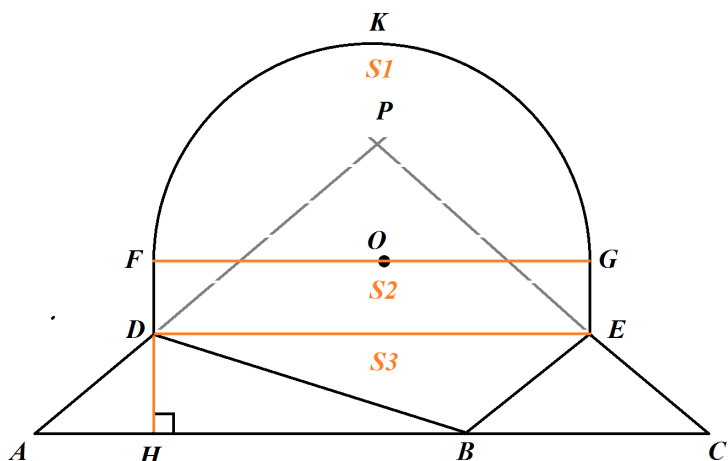
Точки A, B, C лежат на одной прямой, $FG \parallel DE \parallel AC$, $AD = EC$, $AD \cap EC = P$, $AC = a = 8$ м, $\angle APC = \beta = 120^\circ$, $FE = DG = \frac{1}{6}R\sqrt{145}$.

Определите площадь начерченной роботом фигуры. Ответ дайте в квадратных метрах, округлив результат до десятых. При расчетах примите $\pi \approx 3,14$. Приведите подробное решение задачи.

Чтобы получить более точный ответ, округление стоит производить только при получении финального ответа.

Решение

Рассмотрим краткое решение данной задачи.



Можно показать, что данная фигура составлена из полукруга, прямоугольника и равнобедренной трапеции.

Площадь полукруга равна:

$$S1 = \frac{1}{2} \pi R^2$$

Сторона FD прямоугольника равна:

$$FD = \sqrt{DG^2 - FG^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{6} R \sqrt{145}\right)^2 - 4R^2} = \frac{1}{6} R$$

Площадь прямоугольника **FDEG** будет равна:

$$S2 = 2R \cdot \frac{1}{6} R = \frac{1}{3} R^2$$

Можно показать, что треугольник **APC** – равнобедренный, тогда

$$\angle PAC = \frac{180^\circ - \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

Построим высоту **DH**.

Так как трапеция **ADEC** – равнобедренная трапеция, то

$$AH = \frac{AC - DE}{2} = \frac{a - 2R}{2} = \frac{1}{2} (a - 2R)$$

Определим длину **DH**:

$$\begin{aligned} \frac{DH}{AH} &= \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\beta}{2} \right) = \operatorname{ctg} \left(\frac{\beta}{2} \right) \\ DH &= AH \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\beta}{2} \right) = \frac{1}{2} (a - 2R) \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\beta}{2} \right) \end{aligned}$$

Посчитаем площадь трапеции **ADEC**:

$$S3 = \frac{1}{2}(DE + AC) \cdot DH = \frac{1}{2}(a + 2R) \cdot \frac{1}{2}(a - 2R) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(a^2 - 4R^2) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Тогда площадь всей фигуры будет равна:

$$S = S1 + S2 + S3 = \frac{1}{2}\pi R^2 + \frac{1}{3}R^2 + \frac{1}{4}(a^2 - 4R^2) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{3}\right)R^2 + \frac{1}{4}(a^2 - 4R^2) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot 3,14 + \frac{1}{3}\right) \cdot 3^2 + \frac{1}{4}(8^2 - 4 \cdot 3^2) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{120^\circ}{2}\right) =$$

$$= 4,5 \cdot 3,14 + 3 + \frac{7}{\sqrt{3}} = 17,13 + \frac{7\sqrt{3}}{3} \approx 21,17145 \dots \approx 21,2 \text{ (м}^2\text{)}$$

Ответ: $17,13 + \frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ (м}^2\text{)} \approx 21,2 \text{ (м}^2\text{)}$.

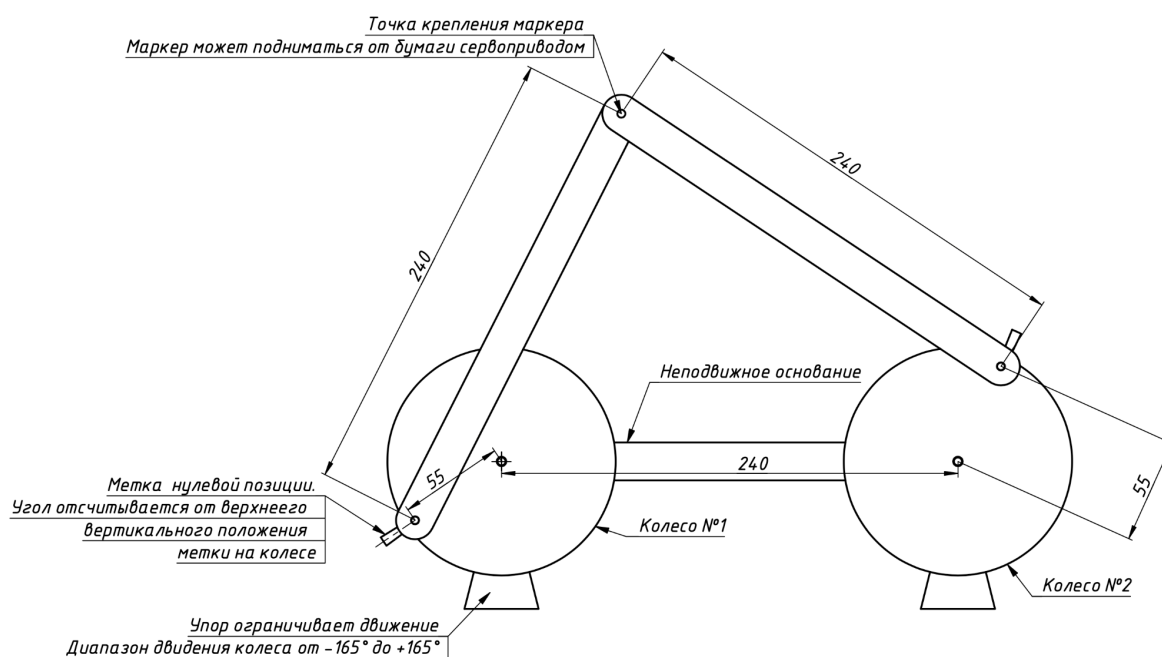
№ п/п	Критерии	Баллы
4.1	Дан верный ответ ($17,13 + \frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ (м}^2\text{)} \approx 21,2 \text{ (м}^2\text{)}$). Дано полное верное решение: присутствуют все расчеты. Даны необходимые пояснения к решению. Нет арифметических ошибок. Записан верный ответ. Ответ $17,13 + \frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ (м}^2\text{)}$ считается самым точным.	15
4.2	Решение содержит арифметические ошибки. Верная логика решения. Решение доведено до конца. Даны необходимые пояснения к решению.	10
4.3	Верно определены выражения для площади прямоугольника FDEG ($S2 = \frac{1}{3}R^2$) и площади полуокружности ($S1 = \frac{1}{2}\pi R^2$). Даны необходимые пояснения к решению.	10
4.4	Дан верный ответ ($17,13 + \frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ (м}^2\text{)} \approx 21,2 \text{ (м}^2\text{)}$). Решение отсутствует.	5
4.5	В остальных случаях	0

О заключительном этапе олимпиады школьников «Ломоносов» 2021/2022 учебного года для 10-11 классов

Заключительный этап Олимпиады для участников 10-11 классов будет состоять из двух туров: письменного и экспериментального. На экспериментальном туре участникам нужно будет продемонстрировать решение квалификационной задачи, описанной ниже, на устройстве организаторов, а также решить подобную задачу в измененных условиях. Параметры устройства и задание будут сообщены участникам непосредственно перед проведением практического тура.

Задача 10-11

Стенд Робота-манипулятора имеет следующую конструкцию:



Картинка крупно: <https://yadi.sk/i/DU-sRH1P9vqe7w>

Используемое оборудование:

- Шаговый двигатель - 2 шт
- Драйвер шагового двигателя DRV8825 - 2 шт
- Плата Arduino Leonardo - 1 шт
- Плата CNC Shield - 1 шт
- Концевой выключатель - 1 шт

“Колеса” закреплены на осях шаговых двигателей. Их движение возможно в ограниченном диапазоне, указанном на рисунке. Шаговые двигатели управляются с использованием драйверов DRV8825, подключенных к плате Arduino Leonardo через плату CNC Shield. Нулевая позиция каждого круга может быть получена по сигналу с концевого выключателя. Маркер может быть приподнят от доски сервоприводом.

- Общий вид шилда: https://yadi.sk/i/_QNTyPMdCZ8nWA
- Общая схема платы: <https://yadi.sk/i/ZAAEmHEv0aFZ4w>
- Программа, определяющая схему подключения стенда и проверяющая его работоспособность (с комментариями): https://yadi.sk/d/f2_Ng9ZPOfA4Zw

Рекомендуемые библиотеки:

- AccelStepper (<http://www.airspayce.com/mikem/arduino/AccelStepper/>)
- Servo (Встроенная в Arduino IDE)

Задача: Нарисовать круг максимального размера и вертикальную линию максимальной длины с использованием данного устройства.

Участникам необходимо разработать алгоритм, написать программу в Arduino IDE и продемонстрировать ее работу на устройстве, предоставленном организаторами. Обе фигуры рисуются за один сеанс. На рисунке должны быть только эти две фигуры.