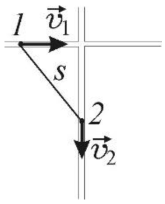
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Олимпиада «Ломоносов 2021/2022» по физике
Заключительный этап для 10-х – 11-х классов

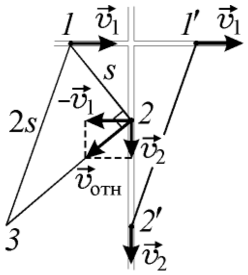
Вариант 1 (решения)



1.2.1. Задача. По двум прямым дорогам, перпендикулярным друг другу, едут с постоянными скоростями два автомобиля. В некоторый момент времени расстояние между автомобилями стало минимальным и равным $s = 100$ м, а через $\tau = 10$ с удвоилось. Найдите скорость v_1 первого автомобиля, если скорость второго автомобиля $v_2 = 36$ км/ч. Ответ приведите в км/ч.

Вопросы. Дайте определение скорости. Сформулируйте закон сложение скоростей.

1.2.1. Решение. На рисунке изображено положение автомобилей в момент времени, когда



расстояние между ними минимально и равно s (точки *1* и *2*), а также в момент, когда расстояние между ними равно $2s$ (точки *1′* и *2′*). По закону сложения скоростей относительная скорость автомобилей $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, а ее модуль $v_{отн} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. В момент, когда расстояние между автомобилями минимально, вектор их относительной скорости $\vec{v}_{отн}$ перпендикулярен отрезку прямой, соединяющей автомобили (отрезку *1-2* на рисунке). Модуль относительного перемещения автомобилей за время τ (длина отрезка *2-3*) равен $v_{отн}\tau = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \cdot \tau$. По теореме Пифагора расстояние между автомобилями (длина отрезка *1-3*), равное по условию $2s$, удовлетворяет соотношению $(2s)^2 = s^2 + (v_1^2 + v_2^2) \cdot \tau^2$. Отсюда $v_1 = \sqrt{\dfrac{3s^2}{\tau^2} - v_2^2}$. **Ответ:** $v_1 = \sqrt{\dfrac{3s^2}{\tau^2} - v_2^2} \approx 14{,}1$ м/с $\approx 50{,}9$ км/ч.

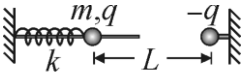
2.8.1. Задача. В прочном сосуде объемом $V = 0{,}1$ м^3 находится смесь из $\nu_1 = 0{,}05$ моль водорода и $\nu_2 = 1$ моль сухого воздуха. Найдите относительную влажность f воздуха в сосуде после сгорания водорода и охлаждения содержимого сосуда до температуры $t = 20$ ºС. Давление насыщенного водяного пара при этой температуре $p_н = 2330$ Па. Массовая доля кислорода в воздухе составляет примерно 23%. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

Вопросы. Какие виды парообразования вы знаете? Дайте определение удельной теплоты парообразования.

2.8.1. Решение. Уравнение реакции горения водорода в кислороде имеет вид: $2H_2 + O_2 = 2H_2O$. Отсюда следует, что количество молей сгоревшего водорода равно количеству молей образовавшегося водяного пара и вдвое превышает количество молей требующегося для горения кислорода. Поскольку $0{,}23\nu_2 > \dfrac{\nu_1}{2}$, имеющегося в сосуде воздуха с избытком хватит для полного сгорания водорода. Следовательно, в воздухе образуется ν_1 молей водяного пара. Используя уравнение Менделеева–Клапейрона, находим парциальное давление водяного пара: $p = \dfrac{\nu_1 RT}{V}$, где $T = t + 273\,°\text{C} = 293$ К. Относительная влажность воздуха $f = \dfrac{p}{p_н} = \dfrac{\nu_1 RT}{p_н V} \approx 0{,}52$.

Ответ. $f = \dfrac{\nu_1 RT}{p_н V} \approx 0{,}52$ или 52%.

3.8.2. Задача. Маленький шарик массой m = 10 г, несущий заряд $q = 10^{-6}$ Кл, надет на гладкую непроводящую спицу, расположенную горизонтально. С помощью легкой непроводящей пружины шарик связан с неподвижной опорой. На одном горизонтальном уровне с этим шариком и в той же вертикальной плоскости закреплен второй маленький шарик, несущий заряд $-q$ (см. рисунок). В положении равновесия расстояние между шариками равно L = 50 см. Когда подвижный шарик сместили от положения равновесия на малое расстояние и отпустили, он стал совершать гармонические колебания с частотой f = 1,47 Гц. Найдите жесткость пружины k. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.



Указание. При расчетах воспользуйтесь приближенной формулой $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$, справедливой при $\alpha x << 1$.

Вопросы. Дайте определение напряжённости электрического поля. Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей.

3.8.2. Решение. В положении равновесия шарика пружина растянута на величину Δl, которую можно найти, используя закон Гука и закон Кулона, а именно $k\Delta l = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2}$. Совместим начало координат с положением шарика в состоянии равновесия и направим координатную ось OX вправо. По второму закону Ньютона имеем: $m\ddot{x} = -k(x+\Delta l) + \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (L-x)^2}$, где x – смещение шарика от положения равновесия, а точками обозначена вторая производная по времени. Учитывая, что $x << L$, преобразуем последнее слагаемое следующим образом: $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\left(1-\dfrac{x}{L}\right)^{-2} \approx \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\left(1+\dfrac{2x}{L}\right)$. В итоге уравнение движения шарика принимает вид: $\ddot{x} + \left(\dfrac{k}{m} - \dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 m L^3}\right)x = 0$. Следовательно, шарик совершает гармонические колебания с круговой частотой $\omega = 2\pi f = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 m L^3}}$.

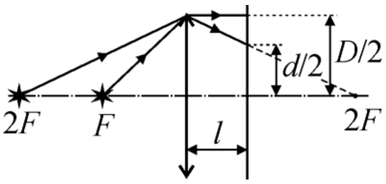
Отсюда $k = (2\pi f)^2 m + \dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 L^3}$.

Ответ: $k = (2\pi f)^2 m + \dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 L^3} \approx 1$ Н/м.

4.1.1. Задача. Тонкая собирающая линза плотно вставлена в круглое отверстие в непрозрачной ширме. На расстоянии $l = 8$ см от линзы расположен экран, перпендикулярный ее главной оптической оси. По другую сторону от линзы в ее главном фокусе находится точечный источник света. При этом на экране наблюдается светлое пятно диаметром $D = 5$ см. Когда источник переместили в точку, находящуюся на главной оптической оси линзы на удвоенном фокусном расстоянии от линзы, диаметр светлого пятна на экране стал равным $d = 3$ см. Найдите фокусное расстояние линзы F.

Вопросы. Дайте определения фокусного расстояния и оптической силы тонкой линзы.

4.1.1. Решение. Ход одного из лучей, ограничивающих размер светового пятна на экране, изображен на рисунке при двух положениях источника.



Когда источник помещен в фокус линзы, диаметр светлого пятна на экране совпадает с диаметром линзы. Если источник расположен на расстоянии $a > F$ от линзы, то расстояние b от линзы до его действительного изображения определяется по формуле тонкой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ и равно $b = \frac{aF}{a - F}$. В частности, при $a = 2F$ имеем $b = 2F$. Из подобия треугольников (см. рисунок) следует, что $\frac{d}{D} = \frac{2F - l}{2F}$. Отсюда находим

$$F = \frac{Dl}{2(D - d)} = 10 \text{ см.}$$

Ответ: $F = \frac{Dl}{2(D - d)} = 10$ см.

Вариант 2 (решения)

1.3.1. Задача. На гладком льду озера лежит достаточно длинная доска массой $M = 1$ кг. На край доски ставят модель автомобиля с включённым двигателем, развивающим постоянную мощность $N = 2$ Вт. Все колёса автомобиля являются ведущими, а его масса в $n = 3$ раза меньше массы доски. Автомобиль начинает движение вдоль оси доски с проскальзыванием колёс. Коэффициент трения колёс о доску равен $\mu = 0{,}3$. Считая колёса автомобиля лёгкими, определите расстояние x, на которое сместится автомобиль относительно доски к моменту, когда колёса перестанут проскальзывать. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

Вопросы. Как определяется импульс системы материальных точек? Сформулируйте закон сохранения импульса.

1.3.1. Решение. Будем решать задачу в системе отсчёта, связанной со льдом. Пусть к интересующему моменту автомобиль разогнался до скорости, модуль которой равен v, а доска приобрела скорость по модулю равную V. Согласно закону сохранения импульса $mv - MV = 0$, где $m = M/n$ – масса автомобиля. При этом доска сместилась на расстояние L, а автомобиль проехал расстояние $l = nL$ в противоположную сторону. При проскальзывании колёс мощность двигателя затрачивалась на разгон автомобиля и доски под действием сил трения скольжения между колёсами и доской и увеличение внутренней энергии взаимодействующих тел. Проскальзывание колёс прекратилось в тот момент, когда модули скоростей автомобиля и доски стали удовлетворять соотношению: $(v+V)\cdot\mu mg = N$, где g – модуль ускорения свободного падения. В дальнейшем модули скоростей увеличивались, а силы трения перестали быть силами трения скольжения и уменьшились по модулю. За время проскальзывания колёс кинетическая энергия автомобиля стала равной $\dfrac{mv^2}{2} = \mu mgl$, а доски – $\dfrac{MV^2}{2} = \mu mgL$. Из составленных уравнений получаем, что $x = L + l = \dfrac{N^2 n^3}{2\mu^3 g^3 M^2 (1+n)}$. **Ответ:** $x = \dfrac{N^2 n^3}{2\mu^3 g^3 M^2 (1+n)} = 0{,}5$ м.

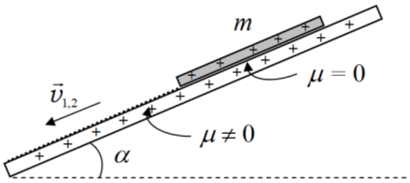
2.2.1. Задача. Горизонтально расположенный цилиндр разделен подвижным поршнем массой $m = 5$ кг на две равные части объемом $V = 1$ л каждая. С одной стороны от поршня находится насыщенный водяной пар при температуре $t = 100\ ^\circ\mathrm{C}$, с другой – воздух при той же температуре. Цилиндр поставили вертикально так, что снизу оказался пар. На какое расстояние x опустится поршень, если температуру в обеих частях цилиндра поддерживают неизменной? Площадь основания цилиндра $S = 0{,}01$ м^2. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2, а нормальное атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Вопросы. Дайте определения влажности и относительной влажности воздуха.

Решение. Когда цилиндр расположен горизонтально, давление воздуха равно давлению насыщенного водяного пара $p_н$, которое при $t = 100\ ^\circ\mathrm{C}$ равно нормальному атмосферному давлению p_0. Записывая уравнение состояния воздуха, имеем $p_0 V = \nu_в RT$, откуда количество молей воздуха $\nu_в = \dfrac{p_0 V}{RT}$. Когда цилиндр поставили вертикально, давление водяного пара осталось прежним, а давление воздуха, как это следует из уравнения равновесия поршня, стало равным $p_0 - mg/S$. При перемещении поршня на расстояние x объем воздуха увеличился на xS и уравнение состояния воздуха приняло вид: $\left(p_0 - \dfrac{mg}{S}\right)(V + xS) = \nu_в RT = p_0 V$. Из последнего соотношения легко найти величину x, а именно: $x = \dfrac{mgV}{S(p_0 S - mg)}$.

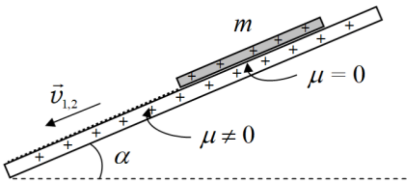
Ответ: $x = \dfrac{mgV}{S(p_0 S - mg)} \approx 5{,}3$ мм.

3.5.1. Задача. Длинная диэлектрическая плита наклонена под углом к горизонту и имеет две г покоится, располагаясь целиком на шероховатой части, если угол наклона плиты не превышает $\alpha_{пр} = 30°$. Пластинку смещают вдоль плиты так, что её нижний край совпадает с границей шероховатой части, и отпускают без начальной скорости. Скорость пластинки к моменту, когда она целиком окажется на шероховатой части плиты равна υ_1. Если же по плите равномерно распределён заряд с поверхностной плотностью $\sigma = +3$ мкКл/м^2, а по пластинке заряд $q = +3$ мкКл, скорость пластинки в том же положении окажется равной υ_2. Во сколько раз υ_1 меньше υ_2? Электрическую постоянную примите равной $\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, а ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Поляризационными эффектами можно пренебречь.



Вопросы. Дайте определение электроемкости. Запишите формулу для электроемкости плоского конденсатора.

3.5.1. Решение. Незаряженная пластинка покоится на шероховатой части наклонной плоскости при условии $0 = mg \cdot \sin\alpha_{пр} - \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha_{пр}$. При соскальзывании из нового положения сила трения скольжения между пластинкой и плитой изменяется по линейному закону от нуля до значения μN, поэтому работа силы трения $A_{тр} = -\frac{1}{2}\mu N \cdot b$. Скорость движения пластинки удобно находить,

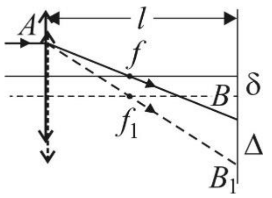


используя закон изменения механической энергии: $mg \cdot b\sin\alpha + A_{тр} = \frac{m\upsilon_{1,2}^2}{2}$. В отсутствии электрического заряда нормальная составляющая силы реакции опоры равна $N_1 = mg \cdot \cos\alpha_{пр}$. Напряжённость электрического поля, созданного заряженной плитой равна $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, поэтому нормальная составляющая уменьшается до значения $N_2 = mg \cdot \cos\alpha_{пр} - qE$ (в случае одинаковых знаков зарядов). Решая систему приведённых уравнений, находим искомое отношение скоростей $\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \sqrt{1 + \frac{q\sigma \cdot \mathrm{tg}\,\alpha_{пр}}{2\varepsilon_0 mg \cdot \sin\alpha_{пр}}}$. **Ответ:** $\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \sqrt{1 + \frac{q\sigma \cdot \mathrm{tg}\,\alpha_{пр}}{2\varepsilon_0 mg \cdot \sin\alpha_{пр}}} \approx 1{,}26$.

4.3.1. Задача. Узкий световой пучок падает на тонкую собирающую линзу параллельно ее главной оптической оси и образует светлое пятно на экране, параллельном плоскости линзы и расположенном за ней на расстоянии l = 20 см. Когда линзу передвинули на расстояние δ = 0,5 см в направлении, перпендикулярном ее главной оптической оси, центр пятна сместился на величину Δ = 1 см. Найдите фокусное расстояние линзы f.

4.3.1. Вопросы. Дайте определения фокусного расстояния и оптической силы тонкой линзы.

Решение. Ход одного из лучей, образующих пучок, изображен на рисунке для случая, когда $l > f$. Сплошные линии соответствуют исходному положению линзы, штриховые – смещенному. Из подобия $\Delta A f f_1$ и ΔABB_1 следует, что $f = \dfrac{l\delta}{\Delta}$.



Аналогично рассматривается случай, когда $l < f$. Наконец, если перемещение линзы выходит из плоскости рисунка, то лучи, преломленные линзой в исходном и смещенном ее положениях, по прежнему будут лежать в одной плоскости, в которой можно рассмотреть такие же подобные треугольники. Следовательно, связь между смещениями линзы и светового пятна на экране во всех случаях имеет один и тот же вид.

Ответ: $f = \dfrac{l\delta}{\Delta} = 10$ см.

Критерии оценки

Задачи (каждая задача оценивается максимально в 15 баллов)

1. Задача вовсе не решалась – **0 баллов**.
2. Задача не решена, но сделан поясняющий рисунок (если требуется), частично сформулированы необходимые физические законы – **1 – 5 баллов**.
3. Задача не решена, но правильно сформулированы физические законы и правильно записаны основные уравнения, необходимые для решения задачи – **6 – 10 баллов**.
4. Задача решена, но допущены незначительные погрешности – **11-14 баллов**.
5. Задача решена полностью и получен правильный ответ – **15 баллов**.

Теоретические вопросы (максимальная оценка 10 баллов)

1. Ответ по существу обеих частей вопроса полностью отсутствует – **0 баллов.**
2. Ответ является неполным (дан ответ только на одну часть вопроса) – **1 – 5 балла**.
3. Ответ является неполным (даны формально ответы на обе части вопроса, но отсутствуют или не полностью приведены необходимые пояснения) – **6 – 9 баллов**
4. Ответ является полным (содержит по обеим частям вопроса необходимые физические понятия и величины с пояснением их смысла) – **10 баллов.**