

# 10-11 классы

## Задача 1. Диссоциация

В комнате на столе стоит вертикальный цилиндр с теплопроводящими стенками. Он закрыт тонким невесомым горизонтальным поршнем, который может скользить без трения. В цилиндре находится газовая смесь молекулярного кислорода с озоном ( $\text{O}_3$ ), причем озон составляет  $n = 40\%$  от общего количества вещества. Температура в комнате равна  $T_0 = 273 \text{ K}$ , расстояние от дна цилиндра до поршня равно  $H_0 = 21 \text{ см}$ .

На каком расстоянии от дна цилиндра окажется поршень после того, как весь озон за достаточно большое время самопроизвольно превратится в молекулярный кислород, а окружающий воздух в комнате прогреется от печи до температуры  $T = 286 \text{ K}$ ?

### Возможное решение

1. Пусть первоначальное количество вещества кислорода в цилиндре  $\nu_1$ , а количество вещества озона  $\nu_2$ . Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для смеси газов в цилиндре и такое же уравнение, но только для озона в цилиндре в начальный момент времени (до превращения его в кислород):

$$p_0 V_0 = (\nu_1 + \nu_2) RT \quad (1)$$

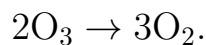
$$p_0 \alpha V_0 = \nu_2 RT \quad (2)$$

Здесь  $\alpha = 0,4$  — это объёмная доля озона, а  $V_0$  — первоначальный объём, занимаемый смесью газов; он равен  $V_0 = SH_0$  ( $S$  — площадь поршня).

2. Поделив уравнение (2) на уравнение (1), выразим  $\nu_2$  через  $\alpha$  и  $\nu_1$ :

$$\nu_2 = \frac{\alpha \nu_1}{1 - \alpha}. \quad (3)$$

3. Запишем уравнение химической реакции превращения озона в кислород:



4. После превращения всего озона  $\text{O}_3$  в кислород  $\text{O}_2$  количество вещества новообразованного кислорода станет:

$$\nu'_2 = \frac{3}{2} \nu_2.$$

5. После превращения всего озона в кислород и повышения температуры уравнение Менделеева–Клапейрона для всего газа в цилиндре будет иметь вид:

$$p_0 V = \left( \nu_1 + \frac{3}{2} \nu_2 \right) RT, \quad (4)$$

где  $T$  — температура воздуха в комнате после прогрева,  $V$  — новый объём, занимаемый кислородом, он равен  $V = SH$ . Здесь  $H$  — новое расстояние от дна цилиндра до поршня.

6. Поделим уравнение (6) на уравнение (1):

$$\frac{V}{V_0} = \frac{SH}{SH_0} = \frac{\nu_1 + \frac{3}{2}\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \frac{T}{T_0}. \quad (5)$$

7. Далее, воспользовавшись соотношением (3), получим:

$$H = H_0 \frac{\nu_1 + \frac{3}{2}\nu_2}{\nu_1 + \frac{3}{2}\nu_2} \frac{T}{T_0} = H_0 \frac{\nu_1 + \frac{3}{2} \frac{\alpha\nu_1}{1-\alpha}}{\nu_1 + \frac{\alpha\nu_1}{1-\alpha}} \frac{T}{T_0}. \quad (6)$$

8. Подставляя численные данные, окончательно получаем:

$$H = H_0 \left( \frac{2 + \alpha}{2} \right) \frac{T}{T_0} = 0,21 \cdot \left( \frac{2 + 0,40}{2} \right) \frac{286}{273} = 0,21 \cdot 1,2 \cdot \frac{13 \cdot 22}{13 \cdot 21} = 26,4 \text{ см}$$

Ответ:  $H = 26,4 \text{ см}$ .

## Критерии

Всего — 25 баллов.

1. Есть правильно применённое уравнение состояния — 10 баллов.
2. Правильно учтена реакция диссоциации озона — 10 баллов.
3. Правильные выкладки при решении — 5 баллов.
4. Арифметическая ошибка — снимается 3 балла.

## Задача 2. Стабилитрон

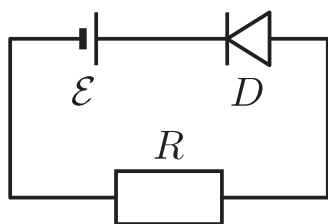


Рисунок 1

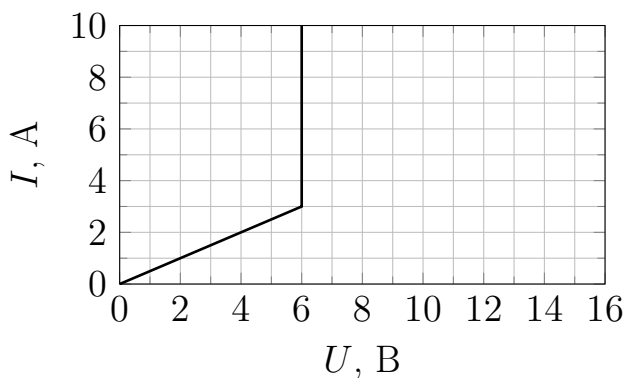


Рисунок 2

В электрическую цепь, схема которой представлена на рисунке 1, включены резистор сопротивлением  $R = 1,5 \text{ Ом}$ , идеальная батарейка с ЭДС  $\mathcal{E} = 12 \text{ В}$  и нелинейный элемент — стабилитрон — вольт-амперная характеристика которого показана на рисунке 2. Какая мощность будет выделяться в стабилитроне в установившемся режиме?

## Возможное решение

1. Закон Ома для полной цепи:

$$\mathcal{E} = IR + U_C, \quad (7)$$

где  $U_C$  — напряжение на стабилитроне.

2. Отсюда ток в цепи равен:

$$I = \frac{\mathcal{E} - U_C}{R}. \quad (8)$$

3. Построим график зависимости  $I(U_C)$  (см. рис. 3). Точка пересечения этой линейной зависимости с ВАХ стабилитрона даст нам силу тока в цепи (и в стабилитроне) и напряжение на стабилитроне.

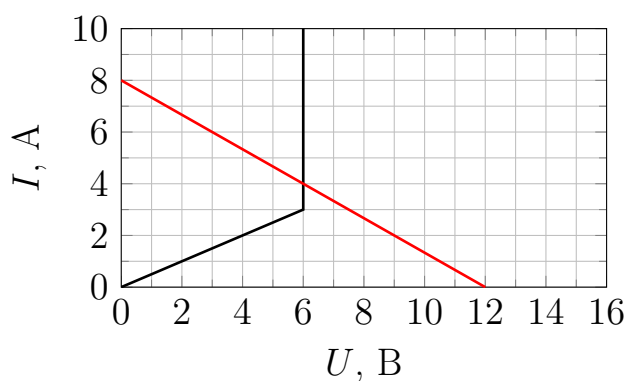


Рисунок 3

4. Так как ЭДС батарейки  $\mathcal{E} = 12$  В, а  $R = 1,5$  Ом, то согласно графику (рис. 3):

$$I_C = 4 \text{ А}; \quad U_C = 6 \text{ В}$$

5. Следовательно, выделяющаяся в стабилитроне мощность

$$P_C = I_C U_C = 4 \text{ А} \cdot 6 \text{ В} = 24 \text{ Вт}.$$

Ответ:  $P_C = 24$  Вт.

## Критерии

Всего — 25 баллов.

1. Правильно записан закон Ома для полной цепи — 5 баллов.
2. Доказано, что напряжение на стабилитроне равно 6В — 15 баллов.
3. Правильно вычислена мощность, выделяемая на стабилитроне — 5 баллов.

### Задача 3. Фосфат церия

Фосфат церия получали взаимодействием  $(\text{NH}_4)_2[\text{Ce}(\text{NO}_3)_6]$  и  $\text{H}_3\text{PO}_4$ . За счет наличия  $\text{HPO}_4^{2-}$  групп продукт  $(\text{Ce}(\text{PO}_4)_x(\text{HPO}_4)_y \cdot n\text{H}_2\text{O})$  обладает катионообменными свойствами. Данные титрования говорят о наличии в структуре вещества кислых протонов, способных к ионному обмену. По данным элементного анализа соотношение атомов церия к атомам фосфора для образца фосфата церия составило 1:1,33. Его ионообменная ёмкость составила 1,4 ммоль/г. По данным термогравиметрии потеря массы протекает в две стадии. На первой из них при нагревании до 300 °С она составляет 10%.

Учитывая протекание в ходе синтеза окислительно-восстановительных процессов укажите химический состав продукта, объясните почему он обладает ионообменной ёмкостью и что происходит в процессе нагревания фосфата церия на первой и на второй стадиях.

### Возможное решение

Для установления состава фосфата церия стоит данные задачи представить в виде системы уравнений и аккуратно её решить. Из условия видно, что

$$x + y = 1,33$$

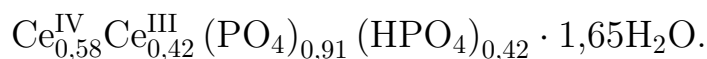
То есть валовый состав напоминает фосфат четырёхвалентного церия  $\text{Ce}_3(\text{PO}_4)_4$ . Но часть фосфатных групп в нем протонированы и находятся в форме  $\text{HPO}_4^{2-}$  (они есть и в условии)  $(\text{Ce}_3(\text{PO}_4)_{4-x}(\text{HPO}_4)_x)$ . Понятно, что к ионному обмену способны только они.

Далее может быть 2 решения.

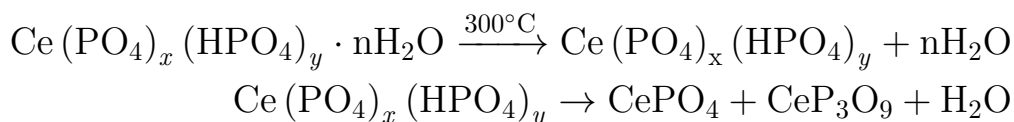
1. Атомные массы  $\text{PO}_4$  и  $\text{HPO}_4$  групп составляют 95 и 96. Разница между ними мала. Можно сказать, что молекулярная масса безводного фосфата церия  $(\text{Ce}(\text{PO}_4)_x(\text{HPO}_4)_y)$  составит  $140 + 95 \cdot 1,33 \approx 266,35$ . До 300 °С очевидно теряется вода, которая составляет 10% массы. Значит, с учетом воды она составит 295,95. А величина  $n$  составляет  $1,64 ((295,95 - 266,35)/18 = 1,64)$  Значит 1 моль содержит  $295,95 \cdot 1,4/1000 = 0,414$   $\text{HPO}_4$  групп (это и есть  $y$ ). То есть итоговая формула  $\text{Ce}(\text{PO}_4)_{0,92}(\text{HPO}_4)_{0,41} \cdot 1,64\text{H}_2\text{O}$ . Можно уточнить массу, тогда цифры чуть подрастут до 0,415 и 1,65. Но это — не принципиально.

Отрицательный заряд анионов равен 3,575. То есть фосфат содержит 57,5% четырёхвалентного и 42,5% трёхвалентного церия.

Тогда полная формула фосфата церия имеет вид:



Полученный фосфат церия обладает ионообменной ёмкостью из-за наличия  $\text{HPO}_4^{2-}$  групп, а схемы процессов происходящих при нагревании фосфата церия можно записать следующим образом:

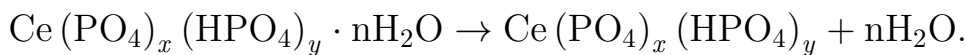


2. Запишем выражение для молярной массы нашего фосфата:

$$M = 140 + 95x + 96y + 18n,$$

$$1,4 \cdot 10^{-3} \cdot (140 + 95x + 96y + 18n) = y.$$

Исходя из молекулярной формулы фосфата, очевидно, что в первый этап нагревания фосфата от него отрываются молекулы воды:



Тогда на основе данных термогравиметрического анализа имеем следующее уравнение:

$$(140 + 95x + 96y + 18n) \cdot 0,1 = n \cdot 18.$$

Теперь имеем итоговую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 1,33 \\ 1,4 \cdot 10^{-3} \cdot (140 + 95x + 96y + 18n) = y \\ (140 + 95x + 96y + 18n) \cdot 0,1 = n \cdot 18 \end{cases}$$

Решим её:

$$\begin{cases} x = 1,33 - y \\ (140 + 95x + 96y + 18n) = \frac{y}{1,4 \cdot 10^{-3}} \\ (140 + 95x + 96y + 18n) = \frac{n \cdot 18}{0,1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0,252n \\ x = 1,33 - 0,252n \\ 140 + 95(1,33 - 0,252n) + 96 \cdot 0,252n + 18n = 180n \end{cases}$$

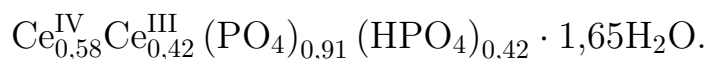
$$\begin{cases} n \approx 1,65 \\ y \approx 0,42 \\ x \approx 0,91 \end{cases}$$

Тогда фосфат церия имеет формулу:  $\text{Ce}(\text{PO}_4)_{0,91} (\text{HPO}_4)_{0,42} \cdot 1,65\text{H}_2\text{O}$ . В исходных реагентах степень окисления церия была +4, также в условии задачи сказано, что в ходе синтеза фосфата церия протекает окислительно-восстановительная реакция, значит, в полученном фосфате есть как Ce (IV), так и Ce (III), его соотношение можно определить из условия электронейтральности:

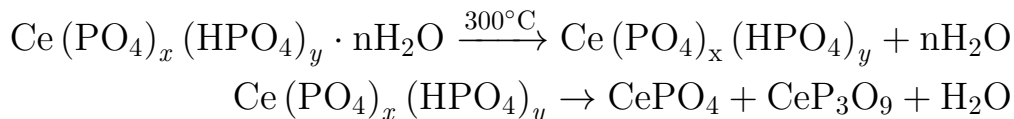
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x + 3y = 0,91 \cdot 3 + 0,42 \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0,57 \\ y = 0,43 \end{cases}$$

Тогда полная формула фосфата церия имеет вид:



Полученный фосфат церия обладает ионообменной ёмкостью из-за наличия  $\text{HPO}_4^{2-}$  групп, а схемы процессов происходящих при нагревании фосфата церия можно записать следующим образом:



## Критерии

1. Полный балл ставится, если была правильно составлена система уравнений и установлена формула фосфата церия (с учётом соотношения между  $\text{Ce}(\text{IV})$  и  $\text{Ce}(\text{III})$ ) и верно написаны схемы термического разложения фосфата церия.

2. Половина баллов ставится за расчёт формулы гидратированного фосфата.

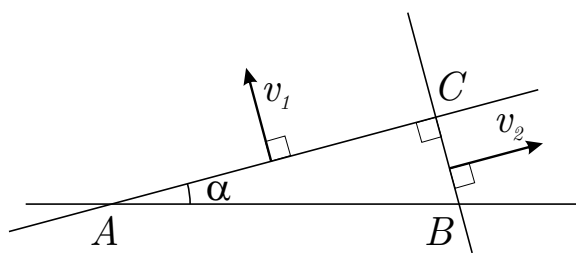
## Задача 4. Площадь треугольника в движущихся прямых

Прямоугольный треугольник с углом  $\alpha$  образован тремя прямыми. В некоторой системе отсчёта прямые, отрезки которых образуют катеты, движутся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , направленными перпендикулярно этим прямым. Прямая, отрезок которой образует гипотенузу, покоится в этой системе отсчёта.

(1) Определить скорость изменения длины гипотенузы треугольника.

(2) Определить скорость удаления точки  $A$  от точки  $B$ .

(3) Определить, чему равна площадь треугольника  $\triangle ABC$  через время  $\tau$  после начала движения, если известно, что в начале движения все прямые пересекались в одной точке.



## Возможное решение

Вопрос 1.

1. Длина гипотенузы изменяется за счёт перемещения точки  $A$  и точки  $B$  со скоростями:

$$v_A = \frac{v_1}{\sin \alpha}, \quad v_B = \frac{v_2}{\cos \alpha}.$$

2. Длина гипотенузы зависит от времени как:

$$AB = \tau(v_A + v_B) = \tau \left( \frac{v_1}{\sin \alpha} + \frac{v_2}{\cos \alpha} \right).$$

Вопрос 2.

1. Точки  $A$  и точки  $B$  движутся со скоростями в противоположные стороны:

$$v_A = \frac{v_1}{\sin \alpha}, \quad v_B = \frac{v_2}{\cos \alpha}.$$

2. Скорость точки  $A$  относительно точки  $B$  равна:

$$v_A^{(отн)} = v_A + v_B = \frac{v_1}{\sin \alpha} + \frac{v_2}{\cos \alpha}.$$

Вопрос 3.

1. Длины катетов зависят от времени:

$$AC = \frac{v_1 \tau}{\operatorname{tg} \alpha} + v_2 \tau, \quad BC = v_2 \tau \operatorname{tg} \alpha + v_1 \tau.$$

2. Площадь треугольника выражается через произведение его катетов:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{\tau^2}{2} (v_1 \operatorname{ctg} \alpha + v_2) (v_2 \operatorname{tg} \alpha + v_1) = \\ &= \frac{\tau^2}{2} (2v_1 v_2 + v_1^2 \operatorname{ctg} \alpha + v_2^2 \operatorname{tg} \alpha). \end{aligned}$$

## Критерии

Всего — 25 баллов.

1. Правильно определено изменение длины катетов — 4 + 4 балла.
2. Правильно определена площадь — 1 балл.
3. Правильно определена скорость точек  $A$  и  $B$  — 4 + 4 балла.
4. Правильно определена относительная скорость — 4 балла.
5. Правильно определено изменение длины гипотенузы — 4 балла