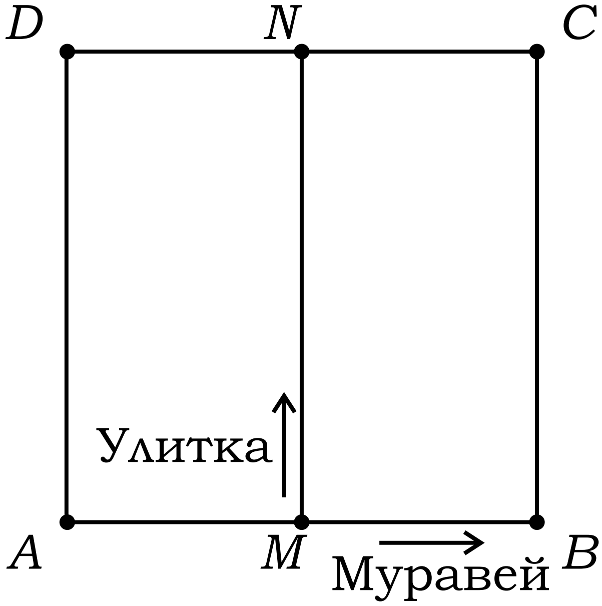
# 5-7 классы

### Задача 1. Улитка и муравей

На полу лежит квадратная рамка $ABCD$ со стороной $a$. Середины противоположных сторон $AB$ и $CD$ соединены перемычкой $MN$. Улитка и Муравей одновременно начинают равномерно ползти из точки $M$. Улитка ползёт по перемычке $MN$, а Муравей движется по сторонам квадрата против часовой стрелки (по траектории $MBCDAM$). Через некоторое время они встречаются в точке $N$, причем Муравей за время движения Улитки успевает обежать вокруг квадрата 2,5 раза.

После встречи в точке $N$ Муравей продолжает свое движение по квадрату в том же направлении и с той же скоростью, а Улитка движется в точку $M$ по траектории $NCBM$ со скоростью, вдвое превышающей её первоначальную скорость.




Вопросы:
(1) Во сколько раз скорость Муравья была больше скорости Улитки, пока она ползла из точки $M$ в точку $N$ по перемычке?
(2) Сколько раз Муравей повстречает Улитку, пока она ползет из точки $N$ в точку $M$ по траектории $NCBM$? Встреча в точке $N$ не считается.
Ответ: (1) 10, (2) 3.

### Возможное решение

1. При движении от точки $M$ к точке $N$ Улитка пройдет расстояние, равное длине стороны квадрата $a$.

2. Муравей за это же время пробежит периметр квадрата дважды и ещё половину периметра квадрата, т.е. расстояние, равное $10a$.

3. Отношение скорости Муравья к Улитки равно отношению расстояний, пройденных ими за время движения, т.е. скорость Муравья была больше скорости Улитки в 10 раз.

4. На втором этапе движения Улитка пройдет расстояние $2a$ — сторона квадрата и две половинки стороны квадрата.

5. Скорость Улитки на втором этапе вдвое больше её первоначальной скорости, поэтому она потратит на то, чтобы вернуться в точку $M$, то же самое время, что и при движении на первом этапе по перемычке $MN$.

6. За это время Муравей, сохраняя свою первоначальную скорость, пробежит то же самое расстояние, что и на первом этапе, — $10a$, то есть обежит квадрат еще 2,5 раза и встретит улитку в точке $M$.

7. Получаем, что Муравей встретит улитку три раза на втором этапе движения.

## Критерии

Всего — 25 баллов

0. Ответ верный, но решения нет — 5 баллов за каждый вопрос.

1. Решена первая часть задачи — 10 баллов: определён путь Улитки (3 балла), определён путь Муравья (3 балла), указано, что пути пройдены за одинаковое время (2 балла), получено отношение скоростей (2 балла).

2. Решена вторая часть задачи — 15 баллов: определён путь Улитки (3 балла), определено время движения Улитки (4 балла), определён путь Муравья (4 балла), определено число встреч без учёта встречи в точке $M$ (2) учтена встреча в точке $M$ (2 балла).

## Задача 2. Стрекоза и машина

Стрекоза подлетает к пешеходному переходу, состоящему из чередующихся $n = 5$ белых и $n = 5$ жёлтых полос шириной $h = 40$ см каждая. Переход начинается с белой полосы. Стрекоза знает, что она делает крыльями $N = 96000$ взмахов в минуту. Стрекоза летит вдоль перехода (соблюдает правила пересечения улиц) и движется перпендикулярно полосам. Так как про метры стрекоза ничего не знает, то она считает жёлтые полосы и измеряет свою скорость в единицах полос/взмах. При этом её скорость $v_c = \dfrac{1}{64}$ полос/взмах. В это время вдоль улицы едет автомобиль со скоростью $v_a = 45$ км/ч. В тот момент, когда стрекоза подлетела к первой белой полосе перехода, автомобиль находился на расстоянии $l = 10$ м от перехода. На каком расстоянии от перехода может находиться автомобиль в тот момент, когда стрекоза закончит перелёт перехода?

Ответ: 7,5 м, 12,5 м.

## Возможное решение

1. Переведём скорость стрекозы в метры в секунду. Так как она считает жёлтые полосы, а пройденное расстояние при этом равно сумме длин белой и жёлтых полос, то в единицах измерения скорости полос/взмах, одна полоса имеет длину $h_1 = 2h = \dfrac{4}{5}$ м.

2. Так как один взмах стрекоза делает за $\Delta t = \dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{1600}$ секунды, то её скорость будет равна

$$v = \frac{v_c \cdot h_1}{\Delta t} = \frac{0{,}8 \cdot 1600}{64} = 20 \text{ м/с}.$$

3. Найдём время, за которое стрекоза пролетит переход. Для этого поделим длину перехода на скорость стрекозы:

$$t = \frac{n \cdot h_1}{v} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \text{ с}.$$

4. За это время автомобиль пройдёт расстояние

$$S = v_a \cdot t = \frac{45}{36/10} \cdot \frac{1}{5} = 2{,}5 \text{ м}.$$

Тогда автомобиль может находиться расстоянии 7,5 м или 12,5 м от перехода.

### Критерии

Всего — 25 баллов
1. Верно посчитано количество взмахов на полосу или переход — 3 балла.
2. Верно вычислено время пролета целого перехода — 7 балла.
3. Верно вычислено расстояние, которое преодолел автомобиль, — 5 баллов.
4. Идея решения верная — 5 баллов.
5. Ответ верный — 5 баллов.

### Задача 3. Смешивание жидкостей

Опыт показывает, что при смешивании двух разных сортов нефти суммарный объём смеси $V$ оказывается равным сумме объёмов исходных жидкостей: $V = V_1 + V_2$. Определите, какую массу будет иметь 1 литр смеси двух различных сортов нефти, если известно, что массовая доля первого сорта в смеси составляет $\alpha_1 = \dfrac{1}{5}$. Литр первого сорта нефти имеет массу $m_1 = 1$ кг, а литр второго сорта — $m_2 = \dfrac{4}{5}$ кг.

*Указание.* Массовой долей вещества в смеси, состоящей из двух компонент, называется отношение массы одного из веществ к массе всего раствора:

$$\alpha = \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

где $m_1$, $m_2$ — массы компонент, входящих в смесь.
Например, если растворить 100 граммов соли в 300 граммах воды, массовая доля будет вычисляться как:

$$\alpha = \frac{100}{100 + 300} = \frac{1}{4}.$$

2. Часто оказывается, что итоговый объём $V$ раствора меньше суммы объёмов компонент, входящих в него: $V < V_1 + V_2$. Это явление называется «контракция».

Пусть в научных целях смешали $V_1 = \frac{2}{5}$ литра воды и $V_2 = \frac{3}{10}$ литра спирта. Если бы такой раствор имел объём 1 литр, то он бы имел массу $m = \frac{97}{100}$ кг.

Определите, происходит ли контракция в данном эксперименте. Если да, вычислите, на сколько объём получившегося раствора отличается от исходного суммарного объёма спирта и воды.

Литр воды имеет массу $m_1 = 1$ кг, а литр спирта имеет массу $m_2 = \frac{4}{5}$ кг.

<u>Ответ</u>: 1. $\frac{5}{6}$ кг, 2. контракция происходит, $\frac{39}{970}$ л.

### Возможное решение

1. По условию:

$$\frac{1}{5} = \frac{m_I}{m_I + m_{II}} \Rightarrow \frac{m_{II}}{m_I} = 4.$$

Литр первого сорта нефти имеет массу в $\frac{5}{4}$ раз больше второго сорта нефти, следовательно,

$$4 = \frac{m_{II}}{m_I} = \frac{m_2 V_2}{m_1 V_1} = \frac{4}{5}\frac{V_2}{V_1} \Rightarrow 5V_1 = V_2.$$

Сумма объёмов нефти первого и второго сортов равна 1 литру, поэтому первая жидкость занимает $\frac{1}{6}$ л, а вторая — $\frac{5}{6}$ л.

Масса 1 литра смеси двух сортов нефти равна:

$$m = \frac{1}{6} \cdot m_1 + \frac{5}{6} \cdot m_2 = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{5}{6} \text{ кг}.$$

2. Определим массу получившегося раствора воды и спирта:

$$m_\Sigma = m_I + m_{II} = m_1 V_1 + m_2 V_2 = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{5} = \frac{32}{50} \text{ кг}.$$

Суммарный объём компонент:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10} \text{ л}.$$

Тогда один литр воды и спирта, взятых в нужном соотношении (но ещё не смешанных), имеет массу:

$$M = m_\Sigma \cdot \frac{10}{7} = \frac{32}{35} \text{ кг} < \frac{97}{100} \text{ кг}.$$

Следовательно, явление контракции происходит.

Заметим, что суммарный объём раствора относится к объёму одного литра раствора как суммарная масса раствора к массе одного литра раствора:

$$\frac{V_\Sigma}{1 \text{ л}} = \frac{m_\Sigma}{97/100 \text{ кг}}.$$

Тогда $V_\Sigma = \dfrac{1 \text{ л} \cdot m_\Sigma}{97/100} = \dfrac{64}{97}$ л. Следовательно, уменьшение объёма:

$$\Delta V = V - V_\Sigma = \frac{7}{10} - \frac{64}{97} = \frac{39}{970} \text{ л.}$$

**Критерии**

Вопрос 1 - всего 6 баллов:
1. Правильно определено отношение между массами — 2 балла.
2. Правильно определены объёмы — 2 балла.
3. Правильно определена масса смеси — 2 балл.

Вопрос 2 - всего 19 баллов:
1. Правильно посчитана масса раствора — 2 балла.
2. Правильно посчитан объём компонент — 3 балла.
3. Правильно определена масса 1 л раствора — 5 баллов.
4. Правильно сделан вывод про контракцию — 2 балла.
5. Вывод про контракцию обоснован — 3 балла.
6. Правильно рассчитано, насколько уменьшился объём — 4 балла.

## Задача 4. Контейнер с мячами

В очень большой прямоугольный грузовой контейнер насыпали $N = 4000$ футбольных мячей, которые заполнили его целиком. При этом центры мячей оказались расположены в ящике так, как показано на рис. 1 (то есть в вершинах кубических «ячеек»). При транспортировке из-за тряски футбольные мячи перераспределились и стали занимать лишь часть объема контейнера. Сколько еще мячей возможно добавить в контейнер, если считать, что и лежавшие в контейнере, и добавляемые в него мячи будут уложены одинаковым образом, а их центры будут расположены так, как показано на рис. 2. Радиус мяча можно считать существенно меньшим размера контейнера. Объём куба с длиной ребра $L$ равен $L \cdot L \cdot L$, а диагональ куба в $\dfrac{17}{10}$ раза больше длины его ребра. При обоих способах укладки мячи касаются друг друга. Учтите, что размеры кубических «ячеек» при разных способах укладки могут быть не одинаковыми.

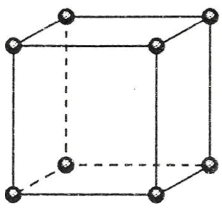


Рисунок 1

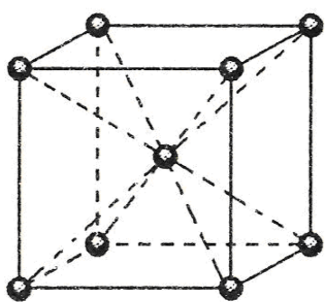


Рисунок 2

<u>Ответ</u>: 913 мячей.

## Возможное решение

При первом способе укладки мячей на одну «ячейку» приходится в среднем один мяч (так как каждый из восьми мячей принадлежит восьми «ячейкам»). Длина ребра этой «ячейки» равна $a = 2R$. Поэтому на один мяч приходится объём контейнера $V_1 = a^3 = 8R^3$.

При втором способе укладки на одну «ячейку» приходится в среднем два мяча, а на диагонали куба должно укладываться два диаметра мяча, то есть расстояние $4R$.

Если ребро «ячейки» при втором способе укладки равно $b$, то

$$\frac{17}{10}b = 4R \Rightarrow b = \frac{40}{17}R.$$

Объём контейнера, приходящийся на один мяч, во втором случае равен

$$V_2 = \frac{b^3}{2} = \frac{64000}{2 \cdot 4913} \cdot R^3 = \frac{32000}{4913} \cdot R^3.$$

Если сначала в контейнер вмещалось $N = 4000$ мячей, то его объём $V_0 = V_1 N = 8R^3 N = 32000R^3$. Поэтому при новой укладке в контейнер влезет количество мячей

$$N_1 = \frac{V_0}{V_2} = \frac{32000\ R^3}{32000\ R^3} \cdot 4913 = 4913.$$

Получается, что можно будет добавить 913 мячей — почти 25 % от их исходного количества!

## Критерии

Всего — 25 баллов.

1. Правильно посчитано количество мячей на «ячейку» для случая 1 — 2 балла.
2. Правильно посчитано количество мячей на «ячейку» для случая 2 — 4 балла.
3. Правильно определено, какой объём приходится на 1 мяч для случая 1 — 6 балла.
4. Правильно рассчитано ребро «ячейки» для случая 2 – 2 балла.
5. Правильно определено, какой объём приходится на 1 мяч для случая 2 — 7 баллов.
6. Правильно определено количество добавляемых мячей — 4 балла.

# 8-9 классы

## Задача 1. Изменение структуры вещества

При изменении температуры веществ они могут испытывать фазовые переходы. Не все фазовые переходы сопровождаются сменой агрегатного состояния, некоторые из них связаны с изменением структуры вещества. Одним из примеров такого «необычного» фазового перехода является перестроение кристаллической решётки железа при температуре 917 °C. Этот эффект можно наблюдать экспериментально, если натянуть раскалённую до 1000 °C железную проволоку, имеющую в этом состоянии длину $l = 5$ м и диаметр $d = 1$ мм, а затем следить за её остыванием. По мере уменьшения температуры ярко светящаяся проволока будет укорачиваться, а её свечение будет тускнеть из-за остывания. При достижении температуры 917 °C произойдёт превращение $\gamma$–железа с гранецентрированной кубической решёткой (см. рис. 1) в $\alpha$–железо с объёмноцентрированной кубической решёткой (см. рис. 2). В этот момент будет наблюдаться увеличение объёма проволоки. Одновременно с этим будет выделяться теплота фазового перехода (аналогичная теплоте кристаллизации и конденсации), которая частично пойдёт на кратковременное нагревание проволоки, из-за чего яркость её свечения на мгновение заметно увеличится.

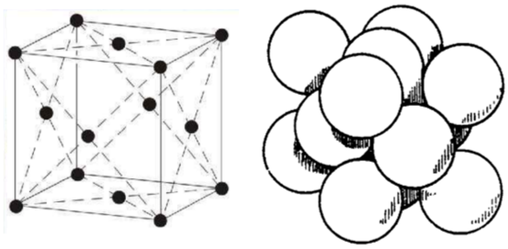


Рисунок 3. Гранецентрированная кубическая решётка (соответствует $\gamma$–состоянию)

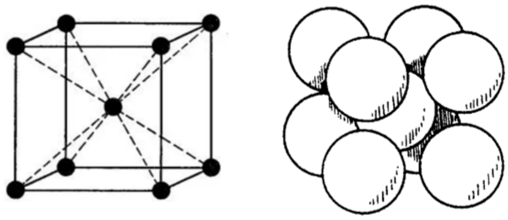


Рисунок 4. Объёмноцентрированная кубическая решётка (соответствует $\alpha$–состоянию)

1. Оцените диаметр $D$ атома железа, если известно, что при комнатной температуре металл, находящийся в $\alpha$–состоянии, имеет плотность $\rho_\alpha = 7800$ кг/м$^3$, а масса атома железа равна $m_A = 56$ а.е.м $= 9{,}2 \cdot 10^{-23}$ г. При расчётах тепловым расширением железа можно пренебречь.

2. Оцените плотность проволоки в $\gamma$–состоянии и величину изменения её объёма при переходе в $\alpha$–состояние.

3. Оцените, на сколько градусов должна была нагреться проволока, если бы всё выделившееся при фазовом переходе количество теплоты пошло на её нагревание. Удельная теплота данного фазового перехода равна $q = 16$ Дж/г. Считайте, что теплоёмкость одного моля всех металлических твёрдых тел равна $C_\nu = 25$ Дж/К и не зависит от температуры и от структуры кристаллической решётки.

Ответ: **1.** $D \approx 2{,}5$ Å, **2.** $\rho_\gamma \approx 8{,}5$ г/см$^3$, $\Delta V \approx 0{,}35$ см$^3$, **3.** $\Delta T \approx 36$ °C.

## Возможное решение

1. Можно заметить, что на одну ячейку в $\alpha$–состоянии приходится 2 атома, $2D = \sqrt{3}a$, где $a$ — размер ячейки кристаллической решётки.

Выражение для плотности:

$$\rho_\alpha = \frac{2 \cdot m_A}{a^3} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{2m_A}{\rho_\alpha}} \approx 2{,}9 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

Диаметр атома равен:

$$D = \frac{\sqrt{3}}{2}a \approx 2{,}5 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 2{,}5 \text{ Å}.$$

2. Можно заметить, что на одну ячейку в $\gamma$–состоянии приходится 4 атома, $2D = \sqrt{2}b$, где $b$ — размер ячейки. Выражение для плотности:

$$\rho_\gamma = \frac{4m_A}{b^3} = \frac{4m_A}{(\sqrt{2}D)^3} \approx 8{,}5 \text{ г/см}^3.$$

Масса проволоки:

$$m = \rho_\gamma V_\gamma = \rho_\gamma l \cdot \frac{\pi d^2}{4} \approx 33{,}4 \text{ г.}$$

$$\Delta V = \frac{m}{\rho_\alpha} - \frac{m}{\rho_\gamma} \approx 0{,}35 \text{ см}^3.$$

3. Уравнение теплового баланса:

$$Q = q \cdot m = C_\nu \nu \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{q \cdot m}{C_\nu \nu} = \frac{q \cdot m}{C_\nu \cdot m/\mu} = \frac{q \cdot \mu}{C_\nu} \approx 36 \text{ °C}.$$

## Критерии

Всего — 25 баллов.

1. Есть обоснованная оценка для диаметра атома железа — 15 баллов.
2. Есть оценка плотности проволоки и изменения объёма — 5 баллов.
3. Есть оценка температуры нагревания — 5 баллов.

## Задача 2. Шаловливые студенты

В один прекрасный солнечный день студенты остались в лабораторном практикуме без преподавателя, устроились поудобнее у окна и начали смешивать попавшиеся под руку реактивы. В тот день им под руку попались разбавленные водные растворы бромида и гидроксида калия, а также нитрата серебра. Напишите реакции, которые могут привести к получению новых веществ в ходе такого неосмотрительного времяпровождения в лаборатории? Рассчитайте массу вещества, содержащего бром в максимальной степени окисления, которую студенты могут теоретически получить исходя из $V = 10$ мл раствора нитрата серебра концентрации $C = 0{,}05$ М и неограниченного количества двух других реагентов.

Требования к ответу
Ответ выразите в миллиграммах и запишите в виде числа, округлив десятых, без указания единиц измерения.
Ответ: 33,8.

## Возможное решение

1. Запишем перечень возможных реакций:
(а) $2KOH + 2AgNO_3 \rightarrow \underline{Ag_2O} + \underline{2KNO_3} + H_2O$ (2 новых вещества)
(б) $AgNO_3 + KBr \rightarrow \underline{AgBr} + KNO_3$ ( еще 1 новое вещество)
(в) $2AgBr \rightarrow \underline{Ag} + \underline{Br_2}$ (2 новых вещества, реакция протекает на солнечном свету)
(г) $Br_2 + 2KOH \rightarrow KBr + \underline{KBrO} + H_2O$ (еще 1 новое вещество)
(д) $3Br_2 + 6KOH \rightarrow 5KBr + \underline{KBrO_3} + 3H_2O$ (еще 1 новое вещество)

2. Таким образом, максимальная степень окисления брома среди всех полученных веществ — Br (+5) наблюдается в бромате калия, $\underline{KBrO_3}$.

3.Суммируя реакции (б) – (г), получаем формальную реакцию, отражающую тот факт, что количество образующегося бромата калия в шесть раза меньше, чем количество нитрата серебра:

$$6AgNO_3 + KBr + 6KOH \rightarrow 6Ag + 6KNO_3 + KBrO_3 + 3H_2O,$$

$$n(KBrO_3) = n(AgNO_3)/6,\ M(KBrO_3) = 167\text{г/моль},$$

$$m(KBrO_3) = (10\text{мл} \cdot 0{,}05 \cdot 167\text{г/моль})/6 = 13{,}9\text{мг}$$

## Критерии

Всего — 25 баллов.

1. За реакции (а) и (б) — по 2 балла. 2. За реакцию (в) — 4 балла. 3. За реакцию (г) и (д) — по 5 баллов. 4. Рассчитана масса бромата калия — 7 баллов.

## Задача 3. Неизвестная жидкость

В глубокую цилиндрическую мензурку с площадью дна $S_м$ налита неизвестная жидкость. Опущенная в неё пустая тонкостенная цилиндрическая пробирка с площадью дна $S_п$ плавает вертикально, погрузившись в жидкость на глубину $h = 5$ см. В пробирку аккуратно положили кубик массой $m = 240$ г и объёмом $V_к = 125$ см$^3$. Оказалось, что после этого уровень жидкости в мензурке понизился на $\Delta h = 1{,}25$ см. Известно, что рычажные весы уравновешиваются, если поместить на их левую чашу тот же кубик, а на правую — ту же пробирку, в которую налита эта же неизвестная жидкость объёмом $V = 50$ см$^3$. Найдите плотность жидкости, если $\dfrac{S_м}{S_п} = 2$.

Ответ: $\rho = 0{,}8\ \dfrac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

### Возможное решение

Запишем условие равновесия плавающей пробирки:

$$S_{\text{п}} h \rho g = m_{\text{п}} g.$$

Согласно условию, после того, как в пробирку положили кубик, уровень жидкости в мензурке понизился. Из этого следует, что пробирка утонула, и жидкость залилась в часть пробирки, не занятую кубиком. Тогда изменение объёма жидкости в мензурке равно:

$$\Delta h = \frac{S_{\text{п}} h - V_{\text{к}}}{S_{\text{м}}}.$$

Условие равновесия весов имеет вид:

$$V\rho + m_{\text{п}} = m.$$

Решив систему из этих уравнений с учетом того, что $\dfrac{S_{\text{м}}}{S_{\text{п}}} = 2$, найдём плотность жидкости:

$$\rho = m \frac{(h - 2\Delta h)}{h V_{\text{к}} + V(h - 2\Delta h)} = 0{,}8\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

### Критерии

Всего — 25 баллов

1. Записано уравнение для условия равновесия плавающей пробирки — 5 баллов.
2. Записано уравнение равновесия для рычажных весов — 5 баллов.
3. Записано уравнение для понижения уровня жидкости в мензурке — 5 баллов.
4. Записано итоговое уравнение для плотности неизвестной жидкости — 5 баллов.
5. Правильно рассчитана плотность неизвестной жидкости — 5 баллов.

### Задача 4. Муравьи и соломинка

Через камешек с острым краем перекинута прочная прямая однородная соломинка массой $M$. На соломинке находятся муравьи с одинаковыми массами $m$. На левом конце соломинки сидят пять муравьев, а на другом её конце — один муравей. При этом соломинка расположена горизонтально и опирается только на край камня. Трое из пятерки начинают идти по соломинке со скоростью $v$. Одновременно с ними муравей, сидевший на противоположном конце, начинает идти им на встречу со скоростью $3v$. Встретившись, муравьи останавливаются. При этом соломинка всё время остается в горизонтальном положении. Найдите отношение масс $\dfrac{M}{m}$ соломинки и одного муравья.

Ответ: $\dfrac{M}{m} = 2$.

## Возможное решение

Пусть $l_1$ — длина левого плеча рычага, $l_2$ — длина правого плеча рычага. Так как соломинка однородная, положение её центра масс (относительно левого конца) можно найти следующим образом:

$$l_c = \frac{l_1 + l_2}{2}.$$

До начала движения соломинка была неподвижна, следовательно можно записать условие её равновесия:

$$5 \cdot mg \cdot l_1 = Mg \cdot (l_c - l_1) + mg \cdot l_2.$$

Так как соломинка всё время находится в равновесии, то муравьи встретились в точке опоры рычага. Тогда из соотношения скоростей получим $3l_1 = l_2$.

Подставляя все необходимые величины в уравнение моментов, получим:

$$5ml_1 = M\left(\frac{l_1 + l_2}{2} - l_1\right) + ml_2 = M\left(\frac{l_1 + 3l_1}{2} - l_1\right) + 3ml_1 = Ml_1 + 3ml_1.$$

Сокращая на $l_1$ получим:

$$5m = M + 3m \;\Rightarrow\; 2m = M \;\Rightarrow\; \frac{M}{m} = 2.$$

## Критерии

Всего — 25 баллов.

1. Есть рисунок (или словесное описание) для двух случаев — 5 баллов.
2. Есть условие равновесия системы до начала движения муравьев — 5 баллов.
3. Рассчитано положение центра масс — 5 баллов.
4. Получено и решено уравнение моментов — 10 баллов.