

КОСМОНАВТИКА

2023

КЛАССЫ 10-11

Вариант 3

1. Найдите сумму всех корней уравнения $x + \sqrt[3]{1 - x^3} = \frac{2023}{2022}$

Решение. Обозначим $\frac{2023}{2022} = b$, перенесем x в правую часть и возведем в куб:

$$1 - x^3 = b^3 - 3b^2x + 3bx^2 - x^3 \Leftrightarrow 3bx^2 - 3b^2x + b^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{3b^2 \pm \sqrt{D}}{6b},$$

где $D = 12b - 3b^4 > 0$, так как $b < \sqrt[3]{4}$. Получили два корня, складывая которые, находим ответ: $x_1 + x_2 = b$.

Ответ: $\frac{2023}{2022}$

Критерии проверки:

15 баллов – ответ верный, решение полностью обосновано.

14 баллов – ответ верный, но не доказано, что корни существуют.

10 баллов – ответ неверный вследствие ошибки в формуле корней или в теореме Виета.

0 баллов – все остальное.

2. У жителей двумерной вселенной возникло предположение, что их вселенная представляет собой не плоскость, как им долго казалось, а сферу, вложенную в трехмерное пространство. Они пока не могут ни проникнуть в трехмерный мир, ни облететь свою вселенную кругом, но заметили, что только на сравнительно малых масштабах длина окружности соответствует известной формуле $L = 2\pi r$, где $\pi = 3,1415926535 \dots$ У очень больших окружностей реальная длина меньше расчетной. Например, если радиус окружности r равен одному миллиарду метров (по удивительному совпадению у них тоже есть такая мера длины), то длина окружности составляет 0,9999 расчетной. Если предположение о том, что упомянутая вселенная является сферой, верно, какой должна бы длина пути между двумя ее максимально удаленными точками (путь проходит по поверхности сферы)?

Решение. Пусть на сфере диаметра $D = 2R$ дана окружность радиуса ρ . Эта окружность видна из центра сферы под линейным углом $\alpha = 2 \arcsin \frac{\rho}{R}$. Этот угол стягивает на сфере дугу длины $R\alpha$, которую жители двумерной вселенной воспринимают как диаметр своей окружности. Итак, получаем соотношения $r = R \cdot \arcsin \frac{\rho}{R}$, $L = 2\pi\rho$, то есть отношение $\frac{L}{2r}$, которое жители

сферы называют числом π , действительно не постоянно и равно $\pi \frac{\rho}{R \cdot \arcsin \rho/R}$.

Выразим $\rho = R \cdot \sin \frac{r}{R}$ и получим, что $\frac{L}{2r} = \pi \frac{R}{r} \sin \frac{r}{R}$. Действительно, при малых $r \ll R$ синус почти равен своему аргументу и отношение примерно равно числу π , но для больших r разница становится все более заметной. По условию, при $r = 10^9$ поправочный коэффициент равен $\frac{R}{r} \sin \frac{r}{R} = 0,9999$.

Обозначим $x = \frac{r}{R}$ и найдем корень уравнения $\frac{\sin x}{x} = 0,9999$ подбором:

| | | | | | | |
|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| x | 0,1 | 0,01 | 0,05 | 0,025 | 0,024 | 0,0245 |
| $\sin x / x$ | 0,998334 | 0,999983 | 0,999583 | 0,999896 | 0,999904 | 0,999900 |

Отсюда $R = \frac{r}{x} = \frac{10^9}{0,00245} = 4,08 \cdot 10^{10}$, а искомое расстояние – длина большой полуокружности – равно πR .

Ответ: $1,3 \cdot 10^{11}$ м.

Критерии проверки:

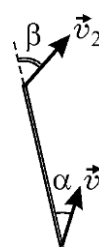
15 баллов – решение верное (даже если единственность корня уравнения $\sin x / x = 0,9999$ не доказано строго).

10 баллов – необоснованно предъявлено некоторое приблизительное значение корня уравнения.

4 балла – получены некоторые верные соотношения между углом, радиусом сферы, радиусом окружности и длиной дуги, далее верных продвижений нет.

0 баллов – все остальное.

3. Однородный стержень скользит по инерции по гладкому горизонтальному столу (см. рисунок). В некоторый момент времени в неподвижной системе отсчета скорости концов стержня составляют с направлением стержня углы $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 45^\circ$. Какой угол γ образует со стержнем в этот момент скорость его центра?



Решение. Скорость движения любой точки стержня есть сумма двух скоростей – скорости движения центра масс стержня и скорости вращения стержня относительно этого центра масс. Стержень однороден, то есть, его центр масс совпадает с серединой стержня. Обозначим длину стержня $2l$, вектор скорости центра v , а угловую скорость вращения ω . Тогда скорость вращения точки стержня, находящейся на расстоянии x от центра, равна по модулю $x\omega$ и направлена перпендикулярно стержню. Введем систему координат, направив ось Oy вдоль стержня (направление вверх на рисунке), а ось Ox перпендикулярно стержню (направление вправо на рисунке).

Проектируя векторы v_1 и v_2 на оси координат, получим систему равенств (через v_x и v_y обозначены проекции вектора v)

$$\begin{cases} v_1 \sin \alpha = v_x - l\omega \\ v_1 \cos \alpha = v_y \\ v_2 \sin \beta = v_x + l\omega \\ v_2 \cos \beta = v_y \end{cases} \Rightarrow \frac{v_x}{v_y} = \frac{v_1 \sin \alpha + v_2 \sin \beta}{2v_y} = \frac{v_1 \sin \alpha}{2v_1 \cos \alpha} + \frac{v_2 \sin \beta}{2v_2 \cos \beta}$$

Пусть γ – искомый угол, тогда $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0,789$.

Ответ: $\gamma = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{2} \right) \approx 38^\circ$

Критерии проверки:

15 баллов – решение верное, полностью обосновано.

7 баллов – удалось верно выразить угол через модули v_1 и v_2 , но не удалось найти связь между v_1 и v_2 .

5 баллов – критерий тот же, что для семи баллов, но скорость v взята как сумма векторов v_1 и v_2 , а не как среднее арифметическое.

2 балла – построен чертеж для мгновенного центра вращения (по сути задача сведена к геометрической), дальше продвижений нет.

0 баллов – все остальное.

4. Карта поверхности Шелезяки разбита на квадраты. Вся карта имеет размер $M \times N$. Каждый квадрат может быть либо пригоден для строительства, либо не пригоден (ржавчина, болота, нехватка машинного масла) – на карте такие квадраты маркируются либо 1, либо 0. Необходимо построить базу космического флота, которая имеет форму прямоугольника. Найдите наибольшую площадь базы, которую можно построить на Шелезяке. Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая принимает на вход два натуральных числа M и N и таблицу $M \times N$ из 0 и 1 – карту Шелезяки. Вывод вашей программы – площадь максимальной прямоугольной подтаблицы из одних единиц в этой таблице.

Входные данные

В первой строке вводятся два натуральных числа M (число строк таблицы) и N (число столбцов) в диапазоне от 1 до 256 каждое. Затем вводятся M строк из N символов каждая (символ в строке может быть 0 или 1, строка вводится без пробелов).

Выходные данные

Одно число – площадь базы (посчитанная в клетках).

Пример

Ввод:

4 5

11011

10101

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

11110

11101

Вывод:

6

Пояснение: Наибольший по площади прямоугольник имеет стороны 2 и 3.

Критерии проверки:

15 баллов – алгоритм реализован верно.

10 баллов – алгоритм содержит недочеты, или в принципе верный, но реализован с ошибками.

5 баллов – задача не доделана, или есть только текстовое описание, или алгоритм/программа содержат принципиальные ошибки.

5. Спутнику Земли, находящемуся на орбите, близкой к геостационарной, необходимо определить параметры своей орбиты, не подавая радиосигналов. С этой целью спутник направляет на Луну звездный датчик (фотокамеру с ПЗС-матрицей размера 200×200 пикселей). В результате съемки получены координаты засвеченных пикселей ПЗС-матрицы. Необходимо найти координаты пикселя – центра Луны. Считаем, что освещенная Солнцем в момент съемки часть Луны полностью попала на снимок, съемка производится не в момент новолуния, т.е. снимок Луны не является пустым, а само Солнце и Земля не находятся в поле съемки.
- а) Опишите алгоритм, позволяющий по списку координат засвеченных пикселей найти координаты центра изображения Луны и ее угловой размер. Входные данные: натуральное число N , список из N пар чисел (x и y координаты пикселей). Выходные данные: три числа – координаты пикселя центра и диаметр изображения Луны (в пикселях). Учтите, что в список координат попали также координаты некоторых звезд, заснятых датчиком. Будем считать, что каждая такая звезда добавляет к списку одну пару координат (то есть звезда засвечивает один пиксель), а число заснятых звезд не превосходит 200. Предположим для простоты, что никакие две звезды не засветили соседние пиксели.
- б) Составьте программу на любимом языке программирования, реализующую ваш алгоритм.

Решение пункта а). Вначале надо «погасить» звезды на снимке. Для этого проходим в цикле все пиксели из списка и проверяем их на условие «пиксель изолированный». Это можно сделать поиском соседей нашего пикселя в нашем списке (двойной цикл). Если пиксель оказался изолированным, то удаляем его из списка. При этом, однако, в списке могут оказаться пиксели,

засвеченные звездами, примыкающими на фотографии к диску Луны – будем считать это допустимой погрешностью.

Теперь проходим еще раз по списку и для каждого пикселя находим наиболее далекий к нему пиксель (двойной цикл). Полученная пара пикселей покажет нам «полюсы» Луны. Действительно, лунный серп на снимке является областью с границей из двух кривых – полуокружности и половины эллипса. Чтобы это доказать, представим себе вначале полностью освещенный шар – его параллельная проекция на произвольную плоскость (нас интересует плоскость снимка) является кругом. Теперь представим шар, освещенный точечным источником – получим полусферу. Линия смены света и тени (терминатор) является окружностью. Снимок же является параллельной проекцией этой окружности на некоторую плоскость, т.е. эллипсом. Для того, чтобы найти на снимке центр Луны теперь достаточно взять полусумму координат «полюсов». Диаметр Луны на снимке равен расстоянию между «полюсами».

Критерии проверки:

20 баллов – алгоритм верный, реализован верно.

19 баллов – верны алгоритм и программа, не найден диаметр.

10 баллов – верно описан алгоритм нахождения центра и алгоритм отделения звезд, пункт б) не решен.

5 баллов – прописан только алгоритм отделения звезд, либо прописан верный алгоритм нахождения центра с учетом ошибки со звездами и, возможно, других ошибок; пункт б) не решен.

0 баллов – все остальное.

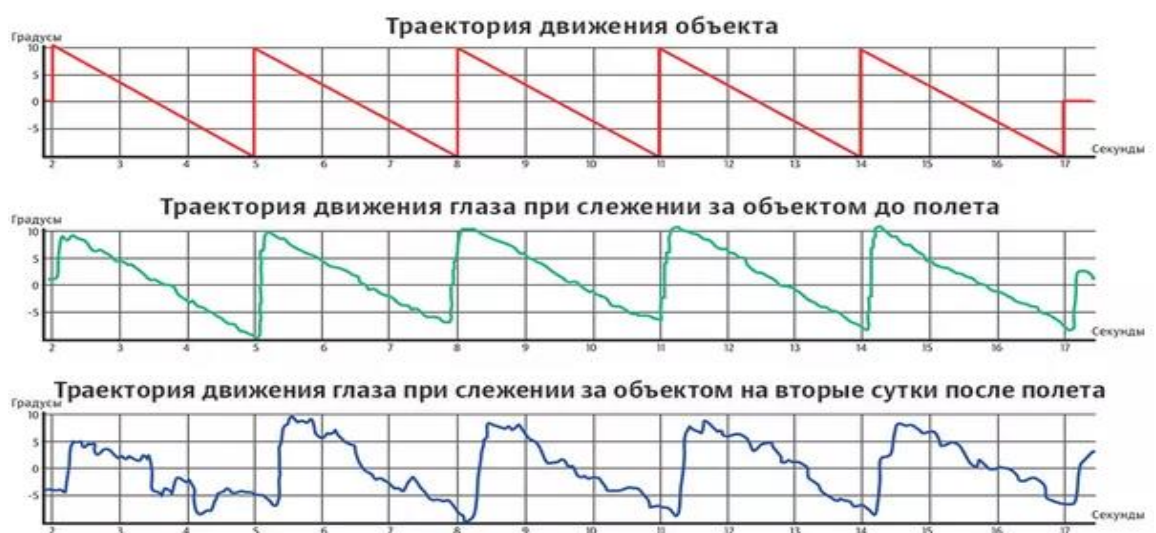
6. При стыковке к космической станции одного из летательных аппаратов (стыковка проводилась в ручном режиме) произошла авария – космонавт, управлявший стыковкой «протаранил» станцию. Расследование показало, что авария произошла не из-за ошибки оператора, а из-за отставания фиксации взора космонавта при поворотах головы. Найденный эффект был затем многократно подтвержден и исследован. Предложите свое объяснение – почему в невесомости фиксация взора происходит с задержкой? Предложите методы уменьшения негативных последствий этого эффекта.

Решение. За восприятие перемещений в пространстве в организме человека отвечает вестибулярный аппарат. Он находится во внутреннем ухе, там же, где и слуховой аппарат, прямо за барабанной перепонкой. Вестибулярный аппарат состоит из двух частей: полукружных каналов, которые воспринимают угловое ускорение, и отолитовых органов, которые воспринимают линейное ускорение, в том числе ускорение свободного

падения. За способность их чувствовать мы обязаны волосковым клеткам, которые находятся внутри вестибулярного аппарата. В каждой из его частей, на самом деле, целое скопление этих клеток, десятки тысяч в каждом органе. Эти клетки имеют выросты, называемые волосками. Волоски в свою очередь погружены в желеобразную массу. Эта масса очень чувствительна к нашим движениям, и в ответ на них, по инерции смещается в противоположную сторону, увлекая за собой погруженные в неё волоски. Когда волоски вместе с желе отклоняются, клетки начинают вырабатывать электрический ток и посылать в нервную систему сигнал о том, что началось движение. Так устроены полукружные каналы. В отолитовых органах всё работает точно также, но дополнительно сверху на желе лежит отолитовая мембрана — это плотный слой кристаллов карбоната кальция. Мембрана выполняет роль дополнительного утяжелителя, она придавливает желе к клеткам под действием силы тяжести, для того чтобы мы могли лучше чувствовать линейные перемещения и наклоны головы.

Благодаря вестибулярному аппарату мы можем ориентироваться в пространстве, воспринимать положение своего тела и скоординированно перемещаться. А ещё вестибулярный аппарат отвечает за стабилизацию наших глаз. Например, при беге мы продолжаем видеть мир чётко, несмотря на то, что голова постоянно движется. Так происходит потому, что глаза компенсируют движения головы. Такая компенсация возможна как раз благодаря обмену информацией о движении головы между вестибулярным аппаратом и глазодвигательными мышцами.

Однако наш вестибулярный аппарат приспособлен к жизни на Земле, в условиях постоянной гравитации. А вот космический полёт превращается для человека и его вестибулярного аппарата в настоящее испытание. Оказалось, что в этом непривычном для человеческого организма состоянии проявляются ориентационные, зрительные и проприоцептивные (ощущение собственного тела) иллюзии. В первую очередь у космонавтов возникает космическая болезнь движения — аналог морской болезни, только из-за



воздействия невесомости. Так же космонавтам трудно ориентироваться, правильно оценить расстояние и направление до цели.

Наряду с иллюзорными реакциями у 72% космонавтов возникали затруднения при слежении за движущейся целью и фиксации на ней взора, отмечались и промашки при попытках схватить предмет, удары головой о панели при "плавании" внутри станции. Анализ с использованием записи глаз и математических методов выявил связь между развитием ориентационных иллюзий и обнаруженными нарушениями глазодвигательных реакций. Такие нетипичные реакции возникают из-за того, что вестибулярный аппарат не может работать также, как на Земле. Отолитовая мембрана больше не создаёт давления на желе и не отклоняет волоски при наклонах головы. Зато в невесомости возникает огромное количество вращений тела из-за свободного плавания, к чему наш организм тоже не приспособлен. Всё это ведёт к неправильному восприятию организмом информации о перемещениях в пространстве, что и приводит к разным нарушениям и иллюзиям.

Эффект задержки слежения был впервые обнаружен в результате расследования аварии на станции «МИР» 25 июня 1997 года. В тот день при попытке ручной стыковки транспортного грузового корабля «Прогресс М-34» со станцией «МИР» произошло столкновение, что привело к разгерметизации модуля «Спектр». Изначально вина за аварию была возложена на экипаж, однако на их защиту встали сотрудники института медико-биологических процессов и доказали, что причиной случившегося может быть запаздывание взора, а не ошибка экипажа. Эти нарушения в невесомости, приводящие к визуальной дезориентации в пространстве, привели к необходимости тренировок членов экипажа перед полётом на МКС.

Для того чтобы подготовиться к жизни в невесомости и уменьшить негативные последствия, космонавты проходят длительную подготовку на тренажерах: вращения на центрифуге, вестибулярные тесты на вращающемся кресле, полёты с кратковременной невесомостью на самолёте ИЛ-76. Всё это помогает «научить» вестибулярный аппарат работать в необычных условиях и приспособливаться к ним. Это, однако, не гарантирует отсутствие проблем – возникновение эффекта запаздывания установления взора индивидуально. Поэтому все космонавты имеют инструкцию – находясь на орбите, делать все движения медленно, сопровождая их паузами. Управление модулем при стыковке сейчас скорректировано так, чтобы оператору не надо было поворачивать голову.

Критерии проверки:

20 баллов – дано полное и достаточное подробное объяснение произошедшего (в том числе, идет речь о вестибулярном аппарате человека); предложены верные пути решения проблемы.

12 баллов – есть как верная идея по поводу причины, так и верное предложение по устранению последствий, подробного объяснения эффекта нет.

7 баллов – есть только одна верная идея (либо по поводу причины, либо по поводу последствий), второй пункт объясняется неверно или не объясняется. Подробного объяснения эффекта нет.

2 балла – есть только некоторые разумные, но неверные соображения.

0 баллов – все остальное.

Вариант 4

1. Известно, что число x_0 является корнем уравнения $x + \frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}} = 2023$.
Образуем последовательность по правилу $x_1 = \frac{x_0}{\sqrt[3]{(x_0)^3-1}}$, $x_2 = \frac{x_1}{\sqrt[3]{(x_1)^3-1}}$, и так далее. Найдите сумму

$$x_0 + x_1 + \dots + x_{2023}.$$

Решение. Заметим, что

$$x_2 = \frac{x_1}{\sqrt[3]{(x_1)^3-1}} = \frac{\frac{x_0}{\sqrt[3]{(x_0)^3-1}}}{\sqrt[3]{\left(\frac{x_0}{\sqrt[3]{(x_0)^3-1}}\right)^3-1}} = x_0$$

Продолжая процесс, видим, что все числа x_n с четными номерами совпадают с x_0 , а все числа с нечетными номерами совпадают с x_1 . Тогда искомую сумму разобьем на пары и увидим, что она равна

$$1012(x_0 + x_1) = 1012 \left(x_0 + \frac{x_0}{\sqrt[3]{(x_0)^3-1}} \right) = 1012 \cdot 2023 = 2\,047\,276.$$

Ответ: 2047276.

Критерии проверки:

15 баллов – ответ верный, полностью обоснован.

10 баллов – верно доказан факт, что $x_{2n} = x_0$, но не удалось довести до ответа (не использовано начальное условие на x_0).

5 баллов – факт $x_n + x_{n+1} = 2023$ используется без доказательства.

0 баллов – все остальное.

2. Жители двумерной вселенной обнаружили, что их вселенная представляет собой не плоскость, как им долго казалось, а сферу, вложенную в трехмерное пространство. Жители пока не могут ни проникнуть в трехмерный мир, ни облететь свою вселенную кругом, но догадались о ее сферичности, заметив, что число π совпадает с $\pi_0 = 3,1415926535 \dots$ только на сравнительно малых масштабах. Длина очень больших окружностей оказывается меньше, чем вычисленная по известной формуле $L = 2\pi r$. Математики двумерной вселенной решили, что число π – не константа, а зависит от радиуса окружности r . Найдите эту зависимость (то есть выразите π через π_0 , r и D , где D – максимальное расстояние между двумя точками сферической вселенной, взятое по поверхности сферы).

Решение. Пусть на сфере диаметра $d = 2R$ дана окружность радиуса ρ . Эта окружность видна из центра сферы под линейным углом $\alpha = 2 \arcsin \frac{\rho}{R}$. Этот угол стягивает на сфере дугу длины $R\alpha$, которую жители двумерный

вселенной воспринимают как диаметр своей окружности. Итак, получаем соотношения $r = R \cdot \arcsin \frac{\rho}{R}$, $L = 2\pi_0 \rho$, то есть, отношение $\frac{L}{2r}$, которое жители сферы называют числом π , действительно не постоянно и равно $\pi_0 \frac{\rho}{R \cdot \arcsin \rho/R}$. Выразим $\rho = R \cdot \sin \frac{r}{R}$ и получим, что $\pi = \frac{L}{2r} = \pi_0 \frac{d}{2r} \sin \frac{2r}{d}$. Действительно, при малых $r \ll R$ синус почти равен своему аргументу и отношение примерно равно числу π , но для больших r разница становится все более заметной. Для ответа выразим D через радиус сферы. Максимальное расстояние между точками сферы – это длина большой полуокружности, то есть, $D = \pi_0 R$, откуда $d = \frac{2D}{\pi_0}$.

Ответ: $\frac{D}{r} \sin \frac{\pi_0 r}{D}$.

Критерии проверки:

15 баллов – решение полностью верное (или верное, но для D – диаметра, а не половины длины окружности).

4 балла – получены некоторые верные соотношения между углом, радиусом сферы, радиусом окружности и длиной дуги; дальше верных продвижений нет.

0 баллов – все остальное.

3. Спутник запущен на круговую орбиту, проходящую на высоте $h = 250$ км над поверхностью Земли. Через некоторое время спутник перевели на другую круговую орбиту, высота которой больше первой на $\Delta h = 25$ км. На какую величину η изменилась при этом кинетическая энергия спутника по отношению к ее первоначальному значению? Радиус Земли $R = 6400$ км.

Решение. По второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения уравнение движения спутника имеет вид: $\frac{mv^2}{R+h} = \frac{GMm}{(R+h)^2}$, где G – гравитационная постоянная, M – масса Земли. Тогда

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{2(R+h)}, \quad \eta = \frac{E_2 - E_1}{E_1} = \frac{E_2}{E_1} - 1 = \frac{R+h_1}{R+h_2} - 1 = \frac{6650}{6675} - 1 = -0,00375$$

Ответ: на $-0,00375$.

Критерии проверки:

15 баллов – решение верное, полностью обосновано.

7 баллов – верно найдено соотношение между силами, но неверно сведено к отношению между энергиями, или наоборот.

2 балла – выписаны некоторые верные соотношения, дальше продвижений нет.

0 баллов – все остальное.

4. Передающее устройство отправило строку из символов русского алфавита. Передача была прервана, и устройство передало две строки – первую, до

разрыва связи, и вторую, после разрыва. При этом (для страховки от потерь данных) передающее устройство могло начать передачу второй строки не с точки разрыва, а с некоторой предыдущей точки. Таким образом, несколько букв в конце первой строки могут совпадать с буквами в начале второй. Вам необходимо написать программу, которая склеивает строки, удаляя повтор (самую длинную часть в конце первой строки, которая одновременно является началом второй). Например, ЛОДКА + КАТЕР = ЛОДКАТЕР. Если общей пары «префикс-постфикс» у слагаемых нет, то просто склеиваем слова: КИТ + КОТ = КИТКОТ.

Входные данные

Вводятся две строки длины не более 100 символов каждая из букв русского алфавита. Строки разделяются пробелом.

Выходные данные

Одна строка – результат «склейки»

Пример

Ввод:

КОШКА КАРАСЬ

Вывод:

КОШКАКАРАСЬ

Критерии проверки:

15 баллов – алгоритм реализован верно.

10 баллов – алгоритм содержит недочеты, или в принципе верный, но реализован с ошибками.

5 баллов – задача не доделана, или есть только текстовое описание, или алгоритм/программа содержат принципиальные ошибки.

5. Найдена экзопланета, очень похожая на Землю – совпадают масса планет $M = 5,97 \cdot 10^{24}$ кг, радиус $R = 6,37 \cdot 10^6$ м, период вращения вокруг своей оси $T = 82400$ с. Есть и различия. Во-первых, планета является практически однородным твердым идеальным шаром. Во-вторых, вся поверхность планеты покрыта водой, уровень которой над поверхностью твердого шара составляет около 1 км. Автоматический спутник провел зондирование одного из меридианов планеты, замеряя на каждой широте уровень воды. Данные зондирования (широта – в градусах и уровень воды над поверхностью – в метрах) приведены в таблице ниже. Предполагается, что где-то на дне океана находятся залежи тяжелых металлов.

а) Найдите место залегания металлов. Подтвердите



свои предположения на качественном уровне.

- б) В предположении, что месторождение металлов представляет собой идеальный однородный шар небольшого радиуса, касающийся поверхности твердого шара планеты (точка касания и центр шара лежат в точности на исследуемом меридиане), найдите размер месторождения (диаметр шара) и плотность металла.

| | | | | | | | | | | |
|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Широта | 90 | 89 | 88 | 87 | 86 | 85 | 84 | 83 | 82 | 81 |
| Уровень воды | 1000,02 | 1000,08 | 1000,14 | 1000,20 | 1000,26 | 1000,32 | 1000,38 | 1000,44 | 1000,50 | 1000,56 |
| Широта | 80 | 79 | 78 | 77 | 76 | 75 | 74 | 73 | 72 | 71 |
| Уровень воды | 1000,61 | 1000,67 | 1000,73 | 1000,79 | 1000,85 | 1000,91 | 1000,97 | 1001,02 | 1001,08 | 1001,14 |
| Широта | 70 | 69 | 68 | 67 | 66 | 65 | 64 | 63 | 62 | 61 |
| Уровень воды | 1001,19 | 1001,25 | 1001,31 | 1001,36 | 1001,42 | 1001,47 | 1001,53 | 1001,58 | 1001,63 | 1001,69 |
| Широта | 60 | 59 | 58 | 57 | 56 | 55 | 54 | 53 | 52 | 51 |
| Уровень воды | 1001,74 | 1001,79 | 1001,84 | 1001,90 | 1001,94 | 1001,99 | 1002,04 | 1002,09 | 1002,14 | 1002,18 |
| Широта | 50 | 49 | 48 | 47 | 46 | 45 | 44 | 43 | 42 | 41 |
| Уровень воды | 1002,23 | 1002,28 | 1002,32 | 1002,37 | 1002,41 | 1002,45 | 1002,50 | 1002,54 | 1002,58 | 1002,62 |
| Широта | 40 | 39 | 38 | 37 | 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 |
| Уровень воды | 1002,66 | 1002,70 | 1002,73 | 1002,77 | 1002,81 | 1002,84 | 1002,88 | 1002,91 | 1002,94 | 1002,97 |
| Широта | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| Уровень воды | 1003,00 | 1003,03 | 1003,06 | 1003,09 | 1003,12 | 1003,14 | 1003,17 | 1003,19 | 1003,22 | 1003,24 |
| Широта | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| Уровень воды | 1003,26 | 1003,28 | 1003,30 | 1003,32 | 1003,34 | 1003,35 | 1003,37 | 1003,39 | 1003,40 | 1003,41 |
| Широта | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| Уровень воды | 1003,42 | 1003,43 | 1003,44 | 1003,45 | 1003,46 | 1003,46 | 1003,47 | 1003,47 | 1003,47 | 1003,48 |
| Широта | 0 | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | -6 | -7 | -8 | -9 |
| Уровень воды | 1003,48 | 1003,48 | 1003,48 | 1003,47 | 1003,47 | 1003,47 | 1003,46 | 1003,46 | 1003,45 | 1003,44 |
| Широта | -10 | -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | -16 | -17 | -18 | -19 |
| Уровень воды | 1003,43 | 1003,42 | 1003,41 | 1003,40 | 1003,38 | 1003,37 | 1003,36 | 1003,34 | 1003,32 | 1003,30 |
| Широта | -20 | -21 | -22 | -23 | -24 | -25 | -26 | -27 | -28 | -29 |
| Уровень воды | 1003,29 | 1003,27 | 1003,24 | 1003,22 | 1003,20 | 1003,18 | 1003,15 | 1003,13 | 1003,10 | 1003,08 |
| Широта | -30 | -31 | -32 | -33 | -34 | -35 | -36 | -37 | -38 | -39 |
| Уровень воды | 1003,05 | 1003,02 | 1002,99 | 1002,96 | 1002,93 | 1002,90 | 1002,87 | 1002,84 | 1002,80 | 1002,77 |
| Широта | -40 | -41 | -42 | -43 | -44 | -45 | -46 | -47 | -48 | -49 |
| Уровень воды | 1002,74 | 1002,70 | 1002,67 | 1002,64 | 1002,60 | 1002,57 | 1002,53 | 1002,50 | 1002,47 | 1002,44 |
| Широта | -50 | -51 | -52 | -53 | -54 | -55 | -56 | -57 | -58 | -59 |
| Уровень воды | 1002,41 | 1002,39 | 1002,37 | 1002,36 | 1002,36 | 1002,38 | 1002,43 | 1002,56 | 1002,85 | 1003,81 |
| Широта | -60 | -61 | -62 | -63 | -64 | -65 | -66 | -67 | -68 | -69 |

| | | | | | | | | | | | |
|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Уровень воды | 1022,41 | 1003,71 | 1002,64 | 1002,24 | 1002,02 | 1001,86 | 1001,74 | 1001,64 | 1001,54 | 1001,46 | |
| Широта | -70 | -71 | -72 | -73 | -74 | -75 | -76 | -77 | -78 | -79 | |
| Уровень воды | 1001,38 | 1001,30 | 1001,23 | 1001,16 | 1001,09 | 1001,03 | 1000,96 | 1000,89 | 1000,83 | 1000,76 | |
| Широта | -80 | -81 | -82 | -83 | -84 | -85 | -86 | -87 | -88 | -89 | -90 |
| Уровень воды | 1000,70 | 1000,64 | 1000,57 | 1000,51 | 1000,45 | 1000,38 | 1000,32 | 1000,26 | 1000,19 | 1000,13 | 1000,07 |

Решение. а) Для неподвижной планеты уровень воды показывает эквипотенциальную линию – линию на которой гравитационный потенциал планеты равен константе. Этот потенциал складывается из потенциала большого шара (всей планеты, где месторождение заменено на вещество с плотностью $\rho_0 = \frac{M}{4/3\pi R^3}$) и малого шара (собственно, месторождения). Считая оба этих шара однородными, можем заменить их потенциалы на потенциалы двух точечных масс, сосредоточенных в центрах шаров. Эти потенциалы, как известно, равны $-\frac{GM}{R}$ и $-\frac{Gm}{d}$ соответственно (мы обозначили через m суммарную массу месторождения за вычетом массы такого же шара при условии однородности планеты, а через d – расстояние до центра месторождения). Видим, что возмущение, вносимое вторым потенциалом тем больше, чем ближе к месторождению мы находимся. Согласно данным зондирования, наибольший подъем уровня океана наблюдается на 60 градусе южной широты, значит, именно там находится центр месторождения.

б) Для точных вычислений надо учесть коррекцию силы тяжести за счет вращения планеты (центробежная сила снижает силу тяжести вблизи экватора). Для этого сравним уровень воды на 60 градусе южной и 60 градусе северной широты, где центробежная сила одинакова. Разность между уровнями покажет нам величину гравитационного потенциала (здесь мы приближенно считаем, что этот потенциал равен нулю на 60 градусе северной широты). Обозначим r радиус месторождения в метрах. Тогда

$$E_{\text{сев}} = \frac{GM}{R + 1001,74} = E_{\text{южн}} = \frac{GM}{R + 1022,41} + \frac{Gm}{r + 1022,41}$$

$$\frac{m}{r + 1022,41} = \frac{M(1022,41 - 1001,74)}{6371002 \cdot 6371022} \approx 3,04 \cdot 10^{12}$$

Одного уравнения недостаточно, чтобы определить два параметра r и m . Посмотрим на данные зондирования для 59 и 61 градусов южной широты – усредним их, чтобы снизить погрешность, которую дает вращение планеты. Теперь сравним эти значения со средним для 59 и 61 градусов северной широты. Получим второе уравнение

$$E_{\text{сев}} = \frac{GM}{R + 1001,74} = E_{\text{южн}} = \frac{GM}{R + 1003,76} + \frac{Gm}{x}$$

$$\frac{m}{x} = \frac{M(1003,76 - 1001,74)}{6371002 \cdot 6371004} = 2,97 \cdot 10^{11} \Rightarrow \frac{x}{r + 1022,41} \approx 10,23$$

Расстояние x найдем из геометрических соображений. Пренебрегая кривизной планеты на расстоянии в 1 градус широты, составим прямоугольный треугольник с катетами $r + 1022$ и $\frac{\pi R}{180} \approx 111195$ (длина одного градуса широты на поверхности планеты). Отсюда

$$\sqrt{(r + 1022)^2 + 111195^2} = 10,23(r + 1022) \Rightarrow r = \sqrt{\frac{111195^2}{10,5^2 - 1}} - 1022$$

$$\approx 9900 \text{ м} \Rightarrow$$

$$m = 3,04 \cdot 10^{12}(r + 1022,41) \approx 3,323 \cdot 10^{16} \text{ кг} \Rightarrow \rho \approx \frac{m}{4/3\pi r^3} \approx 8176 \text{ кг/м}^3$$

Найденная плотность – это искомая добавка к средней плотности планеты. Итак, радиус месторождения около 10 км, а плотность около 13700 кг/м³.

Ответ: радиус месторождения около 10 км, а плотность около 13700 кг/м³.

Критерии проверки:

20 баллов – задача решена полностью верно.

15 баллов – обоснованно верно найден центр, и есть продвижения в нахождении плотности (возможно, с дополнительными предположениями о радиусе).

10 баллов – обоснованно верно найден центр, или есть пробелы в обосновании нахождения центра, но есть продвижения в нахождении плотности (возможно, с дополнительными предположениями о радиусе).

5 баллов – верно найден центр без обоснования.

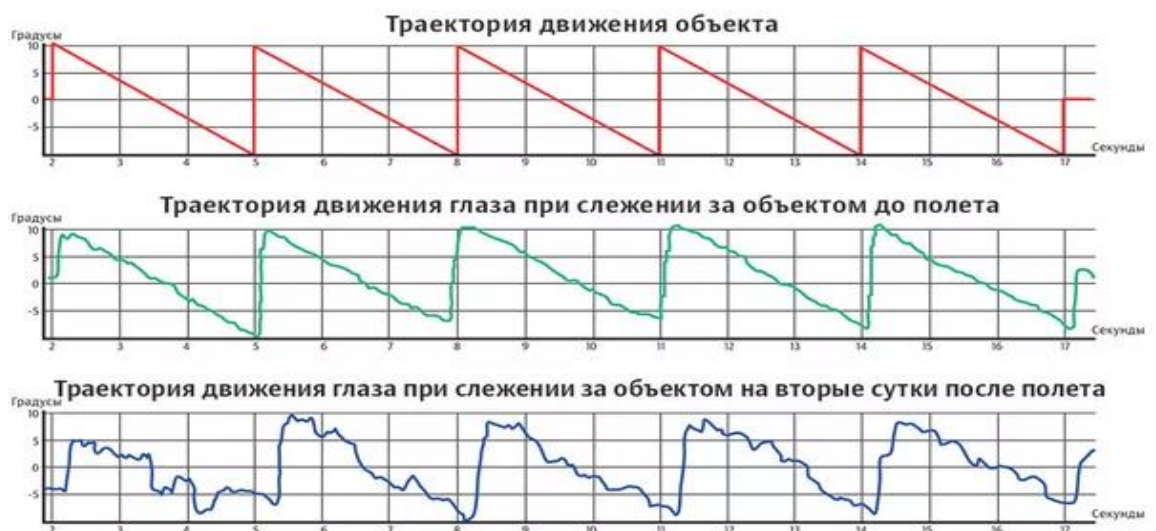
0 баллов – все остальное.

6. При стыковке к космической станции одного из летательных аппаратов (стыковка проводилась в ручном режиме) произошла авария – космонавт, управлявший стыковкой «протаранил» станцию. Расследование показало, что авария произошла не из-за ошибки оператора, а из-за отставания фиксации взора космонавта при поворотах головы. Найденный эффект был затем многократно подтвержден и исследован. Предложите свое объяснение –

почему в невесомости фиксация взора происходит с задержкой? Предложите методы уменьшения негативных последствий этого эффекта.

Решение. За восприятие перемещений в пространстве в организме человека отвечает вестибулярный аппарат. Он находится во внутреннем ухе, там же, где и слуховой аппарат, прямо за барабанной перепонкой. Вестибулярный аппарат состоит из двух частей: полукружных каналов, которые воспринимают угловое ускорение, и отолитовых органов, которые воспринимают линейное ускорение, в том числе ускорение свободного падения. За способность их чувствовать мы обязаны волосковым клеткам, которые находятся внутри вестибулярного аппарата. В каждой из его частей, на самом деле, целое скопление этих клеток, десятки тысяч в каждом органе. Эти клетки имеют выросты, называемые волосками. Волоски в свою очередь погружены в желеобразную массу. Эта масса очень чувствительна к нашим движениям, и в ответ на них, по инерции смещается в противоположную сторону, увлекая за собой погруженные в неё волоски. Когда волоски вместе с желе отклоняются, клетки начинают вырабатывать электрический ток и посылать в нервную систему сигнал о том, что началось движение. Так устроены полукружные каналы. В отолитовых органах всё работает точно также, но дополнительно сверху на желе лежит отолитовая мембрана — это плотный слой кристаллов карбоната кальция. Мембрана выполняет роль дополнительного утяжелителя, она придавливает желе к клеткам под действием силы тяжести, для того чтобы мы могли лучше чувствовать линейные перемещения и наклоны головы.

Благодаря вестибулярному аппарату мы можем ориентироваться в пространстве, воспринимать положение своего тела и скоординировано перемещаться. А еще вестибулярный аппарат отвечает за стабилизацию наших глаз. Например, при беге мы продолжаем видеть мир чётко, не смотря



на то, что голова постоянно движется. Так происходит потому, что глаза компенсируют движения головы. Такая компенсация возможна как раз благодаря обмену информацией о движении головы между вестибулярным аппаратом и глазодвигательными мышцами.

Однако наш вестибулярный аппарат приспособлен к жизни на Земле, в условиях постоянной гравитации. А вот космический полёт превращается для человека и его вестибулярного аппарата в настоящее испытание. Оказалось, что в этом непривычном для человеческого организма состоянии проявляются ориентационные, зрительные и проприоцептивные (ощущение собственного тела) иллюзии. В первую очередь у космонавтов возникает космическая болезнь движения — аналог морской болезни, только из-за воздействия невесомости. Так же космонавтам трудно ориентироваться, правильно оценить расстояние и направление до цели.

Наряду с иллюзорными реакциями у 72% космонавтов возникали затруднения при слежении за движущейся целью и фиксации на ней взора, отмечались и промахи при попытках схватить предмет, удары головой о панели при "плавании" внутри станции. Анализ с использованием записи глаз и математических методов выявил связь между развитием ориентационных иллюзий и обнаруженными нарушениями глазодвигательных реакций. Такие нетипичные реакции возникают из-за того, что вестибулярный аппарат не может работать также, как на Земле. Отолитовая мембрана больше не создаёт давления на желе и не отклоняет волоски при наклонах головы. Зато в невесомости возникает огромное количество вращений тела из-за свободного плавания, к чему наш организм тоже не приспособлен. Всё это ведёт к неправильному восприятию организмом информации о перемещениях в пространстве, что и приводит к разным нарушениям и иллюзиям.

Эффект задержки слежения был впервые обнаружен в результате расследования аварии на станции «МИР» 25 июня 1997 года. В тот день при попытке ручной стыковки транспортного грузового корабля «Прогресс М-34» со станцией «МИР» произошло столкновение, что привело к разгерметизации модуля «Спектр». Изначально вина за аварию была возложена на экипаж, однако на их защиту встали сотрудники института медико-биологических процессов и доказали, что причиной случившегося может быть запаздывание взора, а не ошибка экипажа. Эти нарушения в невесомости, приводящие к визуальной дезориентации в пространстве, привели к необходимости тренировок членов экипажа перед полётом на МКС.

Для того чтобы подготовиться к жизни в невесомости и уменьшить негативные последствия, космонавты проходят длительную подготовку на тренажерах: вращения на центрифуге, вестибулярные тесты на вращающемся кресле, полёты с кратковременной невесомостью на самолёте ИЛ-76. Всё это помогает «научить» вестибулярный аппарат работать в необычных условиях и приспособливаться к ним. Это однако не гарантирует отсутствие проблем – возникновение эффекта запаздывания установления взора индивидуально. Поэтому все космонавты имеют инструкцию – находясь на орбите, делать все движения медленно, сопровождая их паузами. Управление модулем при стыковке сейчас скорректировано так, чтобы оператору не надо было поворачивать голову.

Критерии проверки:

20 баллов – дано полное и достаточное подробное объяснение произошедшего (в том числе, идет речь о вестибулярном аппарате человека); предложены верные пути решения проблемы.

12 баллов – есть как верная идея по поводу причины, так и верное предложение по устранению последствий, подробного объяснения эффекта нет.

7 баллов – есть только одна верная идея (либо по поводу причины, либо по поводу последствий), второй пункт объясняется неверно или не объясняется. Подробного объяснения эффекта нет.

2 балла – есть только некоторые разумные, но неверные соображения.

0 баллов – все остальное.

Итоговая оценка равна сумме баллов за все задачи.