

# 10-11 классы

## Разминка

1. С какой целью на космических аппаратах размещают оптические телескопы для астрономических наблюдений?
  - А. Для наблюдения космических тел с меньшего расстояния, по сравнению с условиями наблюдения с поверхности Земли.
  - Б. Для обеспечения астрономических наблюдений в дневное время суток.
  - В. Для исключения засветки космических тел световым излучением, отражённым от поверхности Земли.
  - Г. Для исключения искажающего влияния земной атмосферы на излучение космических объектов.**
  - Д. Для исключения гравитационного воздействия на оптические элементы телескопов.
2. Какое событие произошло позже других?
  - А. Изобретение радиотелескопов.
  - Б. Изобретение рентгеновских телескопов.
  - В. Астрономические наблюдения датского астронома Тихо Браге.
  - Г. Астрономические наблюдения среднеазиатского астронома Улугбека.
  - Д. Вывод приборов для наблюдения астрономических объектов за пределы атмосферы с помощью космических аппаратов.**
3. Что называется гиперболическим избытком скорости?
  - А. Величина  $v_1(e - 1)$ , где  $v_1$  - первая космическая скорость, а  $e$  – эксцентриситет орбиты.
  - Б. Величина  $v_{max} - v_0$ , где  $v_{max}$  – скорость аппарата в момент наибольшего сближения с планетой, а  $v_0$  – круговая скорость на этой же высоте.
  - В. Предел, к которому стремится величина скорости космического аппарата при пассивном удалении от планеты.**
  - Г. Запас топлива (и, соответственно, скорости) ракеты-носителя, который надо предусмотреть, чтобы обеспечить подъем за пределы атмосферы.
  - Д. Превышение космическим аппаратом максимально допустимой скорости более чем в два раза.
4. Какие точки либрации в системе Солнце – Земля являются устойчивыми?
  - А. Те и только те, которые не находятся на отрезке, соединяющем Солнце и Землю.
  - Б. До сих пор ни одной устойчивой точки либрации не найдено, но и их отсутствие не доказано.
  - В. Те и только те, которые находятся на прямой, проходящей через Солнце и Землю.
  - Г. Те и только те, которые не находятся на прямой, проходящей через Солнце и Землю.**
  - Д. Те и только те, которые находятся на отрезке, соединяющем Солнце и Землю.
5. В рассказе Станислава Лема космонавт выбрасывает из ракеты гаечный ключ, после чего ключ начинает вращаться вокруг ракеты по эллиптической орбите. В романе Жюль Верн космонавт выбрасывает из ракеты тело умершей собаки, после чего тело летит за ракетой на постоянном расстоянии. Что будет происходить в реальности, если из космического аппарата с выключенными двигателями, находящегося вдали от небесных тел, космонавт кинет в космос небольшой предмет?
  - А. Предмет начнет вращаться вокруг аппарата по эллиптической или круговой орбите.
  - Б. Предмет неподвижно «зависнет» на некотором расстоянии от аппарата.

**В. Предмет начнет удаляться от аппарата по прямой с постоянной скоростью.**

Г. Предмет начнет удаляться от аппарата по гиперболе, увеличивая свою скорость.

Д. Предмет притянется к корпусу космического аппарата.

6. При анализе снимков Марса, сделанных в течение трех месяцев автоматическим телескопом, находящимся на орбите Земли, астроном обратил внимание на существенные изменения. На некоторых снимках хорошо видны детали поверхности планеты, а на других планета имеет почти однородный оранжевый цвет. В чем дело?

А. Телескоп неисправен.

Б. Расстояние до планеты увеличилось, и качество снимков упало.

В. Все дело в освещенности Марса Солнцем.

**Г. Часть снимков была сделана, когда на Марсе произошли глобальные пылевые бури.**

Д. На Марсе наступило лето, и прозрачность атмосферы уменьшилась.

7. Наблюдатель, находящийся в России, видит ночью в ясном небе комету – яркую точку (ядро кометы) и отходящий от нее хвост кометы. Как на небесном куполе может расположиться комета?

А. Как угодно

**Б. Ядро кометы обязательно ниже над горизонтом, чем хвост.**

В. Как угодно, но только не в зените

Г. Если продлить прямую линию, проходящую через ядро и хвост кометы, то она обязательно пройдет через зенит.

Д. Если продлить прямую линию, проходящую через ядро и хвост кометы, то она обязательно пройдет через Полярную звезду.

8. На околоземной орбите пилот Пиркс дождался нужного момента и включил ракетные двигатели, направив тягу по вектору скорости (рис. 1). За несколько минут корабль разогнался с первой космической скорости до второй, а затем еще немного, и Пиркс выключил двигатели – теперь корабль летел по вытянутой орбите вокруг Солнца. В апогелии он приблизится к неизведанному астероиду, и Пиркс опять включит двигатели – чтобы затормозить и стать спутником астероида. Осталось выяснить: куда направить реактивную тягу при подлете к астероиду? Варианты показаны на рисунке стрелками с номерами.

**А. Вариант 1**

Б. Вариант 2

В. Вариант 3

Г. Вариант 4

Д. Не надо включать двигатель – корабль сам притянется к Весте.

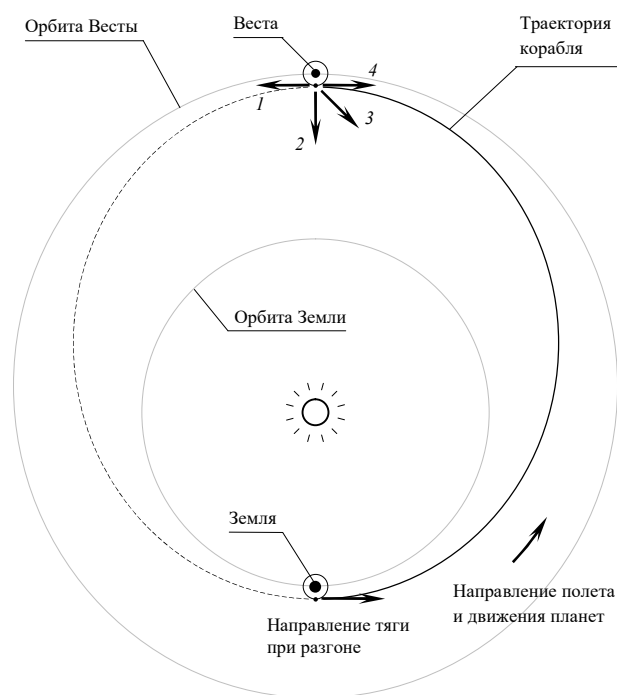
9. Назовите самую известную планету с двумя солнцами

**А. Татуин.**

Б. Альдераан.

В. Эндор.

Г. Корусант.



Д. Хот.

10. Путешественник находится в точке А где-то в России. Направление на точку В (она находится достаточно далеко от точки А и тоже где-то в России) – в точности на юго-запад. Путешественник отправляется в путь, держа компас перед глазами. Какой азимут ему следует выдерживать на компасе, чтобы идти кратчайшим путем?

А. Надо все время идти на юго-запад

**Б. Первую часть пути надо слегка отклоняться от юго-западного азимута к западу, а вторую часть пути – к югу.**

В. Первую часть пути надо слегка отклоняться от юго-западного азимута к югу, а вторую часть пути – к западу.

Г. Первую половину пути надо двигаться строго на юг, а вторую половину пути на запад.

Д. Первую половину пути надо двигаться строго на запад, а вторую половину пути на юг.

## Задача 1

В центре города оказалась обширная площадь, окруженная двух- и трехэтажными зданиями. Площадь была асфальтирована, посередине зеленел садик.

Аркадий и Борис Стругацкие «Понедельник начинается в субботу»

Площадь квадратной формы решили замостить одинаковыми квадратными плитами. При перевозке 7 плит оказались разрушенными и в результате замостили прямоугольную площадку, в длину которой уложили на 9 плит больше, чем в ширину. Какое число плит было заказано?

**Решение.** Обозначим  $x$  исходную сторону квадрата (в плитах), а через  $y$  - получившуюся ширину прямоугольника. Тогда надо решить в целых числах уравнение  $x^2 = y(y + 9) + 7$ . Домножим его на четыре и выделим квадрат в правой части  $4x^2 = (2y + 9)^2 - 53$ . Отсюда  $(2y + 9 - 2x)(2y + 9 + 2x) = 53$ , а поскольку 53 простое число, то первая скобка равна 1, а вторая 53. Складывая два уравнения получим  $4y + 18 = 54$ , то есть  $y = 9$ . Значит, было заказано  $9 \cdot 18 + 7 = 169$  плит.

**Ответ:** 169.

## Задача 2

- Эксперимент, согласно просьбе Амвросия Амбруазовича, будет произведен сегодня в десять ноль-ноль. Ввиду того, что эксперимент будет сопровождаться значительными разрушениями, которые едва не повлекут за собой человеческие жертвы, местом эксперимента назначаю дальний сектор полигона в пятнадцати километрах от городской черты.

Аркадий и Борис Стругацкие «Понедельник начинается в субботу»

Площадку полигона решили сделать в виде выпуклого четырехугольника. К каждой стороне четырехугольника примыкает квадратная вспомогательная площадка (сторона квадрата равна стороне четырехугольника). Общая площадь полигона и четырех вспомогательных площадок оказалась равна 25. Какую максимальную площадь может иметь центральный четырехугольник?

**Решение.** Обозначим длины сторон центрального четырехугольника  $a, b, c, d$ . Тогда площадь его равна  $S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha + \frac{1}{2}cd \sin \beta$ , а значит,  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{2}ab \sin \alpha + \frac{1}{2}cd \sin \beta = 25$ . Заметим, что

$$\frac{1}{2}ab \sin \alpha + \frac{1}{2}cd \sin \beta \leq \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cd \leq \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

Подставляя это неравенство в наше уравнение, получаем

$$25 \leq \frac{5}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 20 \Rightarrow S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha + \frac{1}{2}cd \sin \beta \leq 5.$$

С другой стороны, если взять центральный четырехугольник квадратом со стороной  $\sqrt{5}$ , то его площадь равна 5, а площадь всего полигона 25.

**Ответ: 5.**

### Задача 3

Я пошел вдоль стены. Я ничему не удивлялся. Мне было просто очень интересно.  
«Вода живая. Эффективность 52%. Допустимый осадок 0,3»  
(старинная прямоугольная бутылка с водой, пробка залита цветным воском).  
«Схема промышленного добывания живой воды». «Макет живоводоперегонного куба».

Аркадий и Борис Стругацкие «Понедельник начинается в субботу»

Живоводоперегонный куб сложен из  $2022^3$  одинаковых кубиков (кубики расположены стандартным образом, т.е. каждое ребро большого куба разделено на 2022 равные части). Некоторые из маленьких кубиков стеклянные, а все остальные сделаны из железа. При каком наименьшем числе железных кубиков существует подобная конструкция без единого стеклянного ряда (то есть ряда из 2022 стеклянных кубиков, проходящего насквозь большого куба вдоль одного из трех измерений)?

**Решение.** Разделим куб (мысленно) на  $2022^2$  вертикальных рядов. Они не пересекаются и каждый нам надо «перекрыть» железным кубиком, то есть число железных кубиков не меньше, чем  $2022^2$ . Покажем, что этим количеством можно обойтись. Разделим куб (мысленно) на 2022 квадрата, расположенных горизонтально. В каждом квадрате есть 2022 строки и 2022 столбца, которые нам надо «перекрыть». Это можно сделать, например, если расположить по диагонали квадрата 2022 железных кубика. Поступим так с первым (например, верхним) квадратом. Второй сверху квадрат обработаем так: расположим 2021 кубик на диагонали над главной диагональю (то есть, на местах  $(1,2), (2,3), \dots, (n-1, n)$ ), а в последней строке поместим железный кубик на первое место. Третий квадрат сверху обработаем аналогично – еще раз сдвинем диагональ (то есть, расположим железные кубики на местах  $(1,3), (2,4), (3,5), \dots, (n-2, n)$ ), а оставшиеся два кубика поместим на места  $(n-1, 1)$  и  $(n, 2)$ . Продолжим этот процесс. Последний нижний квадрат будет заполнен железными кубиками так: диагональ  $(2,1), (3,2), (4,3), \dots, (n, n-1)$  и один кубик на месте  $(1, n)$ . В результате, в каждом квадрате перекрыт каждый столбик и каждая строчка. Кроме того, для каждой пары  $(i, j)$  найдется квадрат, в котором на этом месте стоит железный кубик. Это означает, что мы перекрыли все вертикальные ряды, то есть выполнили условие задачи, используя  $2022^2$  железных кубиков.

**Ответ:  $2022^2$ .**

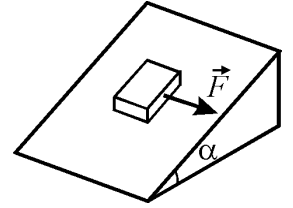
### Задача 4

Изба заколебалась, как лодка на волнах. Двор за окном сдвинулся в сторону, а из-под окна вылезла и вонзилась когтями в землю исполинская куриная нога, провела в траве глубокие борозды и снова скрылась.

Пол круто накренился, я почувствовал, что падаю,  
схватился руками за что-то мягкое,  
стукнулся боком и головой и свалился с дивана.

Аркадий и Борис Стругацкие «Понедельник начинается в субботу»

Тело массой  $m = 1$  кг покоится на шероховатой поверхности, составляющей с горизонтальной плоскостью угол  $\alpha = 30^\circ$ . С какой минимальной силой  $F_{\min}$ , направленной горизонтально вдоль линии пересечения плоскостей, нужно подействовать на тело, чтобы стронуть его с места? Коэффициент трения тела о плоскость  $\mu = 0,7$ . Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .



**Решение.** Пусть сила  $\vec{F}$ , приложенная к телу, недостаточна, чтобы сдвинуть его с места. В плоскости, на которой покоится тело, на него действуют силы, изображенные на рисунке, где через  $F_{\text{тр}x}$  и  $F_{\text{тр}y}$  обозначены проекции силы трения покоя на оси  $Ox$  и  $Oy$ , соответственно. Из условий равновесия тела находим, что  $F_{\text{тр}x} = F$ ,  $F_{\text{тр}y} = mg \sin \alpha$ . Согласно закону сухого трения, модуль силы трения покоя  $F_{\text{тр}} = \sqrt{F_{\text{тр}x}^2 + F_{\text{тр}y}^2} \leq \mu N = \mu mg \cos \alpha$ . Отсюда находим, что  $F_{\min} = mg \sqrt{\mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ .

**Ответ:**  $F_{\min} = mg \sqrt{\mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \approx 3,4 \text{ Н}$ .

## Задача 5

Сначала Роман ни с того ни с сего заявил,  
что теперь он знает тайну Тунгусского метеорита.  
Он пожелал сообщить ее нам немедленно,  
и мы с радостью согласились, как ни парадоксально это звучит.

Аркадий и Борис Стругацкие «Понедельник начинается в субботу»

Противометеоритная ракета вылетела с поверхности земли под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0 = 100 \text{ м/с}$ . Промахнувшись мимо метеорита, ракета в верхней точке траектории взорвалась, в результате чего образовались два одинаковых осколка, скорости которых сразу после взрыва направлены горизонтально. На каком расстоянии  $l$  друг от друга упадут осколки, если кинетическая энергия, сообщенная им при взрыве,  $E = 1800 \text{ Дж}$ , а масса ракеты  $m = 10 \text{ кг}$  (в полете масса не меняется)? Сопротивлением воздуха можно пренебречь, ускорение свободного падения примите равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**Решение.** Перейдем в систему отсчета, равномерно движущуюся со скоростью, которую имела ракета непосредственно перед разрывом. В этой системе суммарный импульс осколков равен нулю, поэтому их скорости после разрыва противоположны по направлению и, в силу равенства их масс, равны по величине. В результате взрыва осколки приобретают кинетическую энергию  $E$ , которая поровну делится между ними. Обозначив через  $v$  модуль скорости каждого из осколков, имеем:

$E = \frac{m}{2} \cdot \frac{v^2}{2} + \frac{m}{2} \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$ , откуда  $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ . Время

падения осколков:  $t_0 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ . За это время каждый из осколков смещается по горизонтали на расстояние  $vt_0$ . Расстояние между точками падения равно  $l = 2vt_0$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $l = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \sqrt{\frac{2E}{m}} \approx 190$  м. Ответ не зависит от выбора системы отсчета, поскольку расстояние между двумя точками во всех системах отсчета одинаково.

**Ответ:** 190 м.

## Задача 6

Увечный астролетчик стал в позу и разразился речью, в которой призывал все человечество поголовно лететь на планету Хош-ни-Хош системы звезды Эоэллы в Малом Магеллановом Облаке освобождать братьев по разуму, стенающих (он так и сказал: стенающих) под властью свирепого кибернетического диктатора.

Аркадий и Борис Стругацкие «Понедельник начинается в субботу»

В затменной двойной системе, состоящей из двух звезд с массами 0.3 и 0.2 массы Солнца, есть экзопланета с массой 10 масс Юпитера, обращающаяся вокруг центральной двойной с периодом 100 суток. Орбита планеты лежит практически в плоскости луча зрения и не проецируется ни на каком участке на диск хотя бы одной из компонент центральной двойной. Можно ли узнать о наличии этой планеты при помощи фотометрических наблюдений (оцените количественно)?

**Решение.** Используем третий закон Кеплера, который можно записать в форме

$$P_{orb} = 0,08 \frac{a^{3/2}}{M^{1/2}}$$

где  $P_{orb}$  - орбитальный период в сутках,  $a$  - большая полуось системы в радиусах Солнца,  $M$  - суммарная масса системы в массах Солнца. Получаем, что большая полуось системы <двойная звезда + планета> (центр масс двойной и планета обращаются вокруг центра масс тройной) составляет  $\approx 92.7R_{\odot}$ . Отношение масс центральной двойной и планеты составляет 50, это значит, что большая полуось центра масс двойной системы  $a_1$  вокруг центра масс тройной составляет 1/51 от значения  $a$ , то есть,  $a_1 \approx 1,8R_{\odot}$ . Если рассмотреть случай, когда происходит видимое земному наблюдателю затмение, то обе звезды находятся на одном и том же луче зрения (возможен небольшой наклон орбиты, так как по условию транзитов планеты по дискам звезд с Земли не видно). Максимально возможная разница в расстоянии до системы, следовательно, составляет  $2a_1$  (максимальная величина, на которую смещает третье тело центральную двойную). Это выражается в том, что затмения системы для наблюдателя наступят либо раньше, либо позже, чем если бы третьего тела не было (то есть, в системе есть световое уравнение), полная амплитуда задержки составит время, необходимое для того, чтобы свет преодолел  $2a_1 \approx 3,6R_{\odot}$ .

**Ответ:** можно узнать по наличию вариации орбитального периода с периодом обращения третьего тела (планеты) с полной амплитудой около 8,5 секунд.

## Задача 7

- У нас будет сегодня заголовок или нет?
- Будет. Я уже букву «К» нарисовал.
- Какую «К»? При чем здесь «К»?
- А что, не надо было?

– Я сейчас умру. Газета называется «За передовую магию».  
Покажи мне там хоть одну букву «К»!

Аркадий и Борис Стругацкие «Понедельник начинается в субботу»

Запишем по кругу заглавные русские буквы подряд по алфавиту от А до Я. Теперь построим последовательность из этих букв по следующему принципу:

- возьмем первую гласную букву (мы движемся по кругу, начиная с буквы А),
- продолжая движение, возьмем следующие две согласные,
- продолжая движение, возьмем следующие три гласные,
- затем следующие четыре согласные, и так далее.

Получаем последовательность:

А Б В Е Ё И Й К Л М О У Ы Э Ю Б В Г Д Ж З И О У Ы Э Ю Я Б В Г Д Ж З Й К ...

Напишите программу на вашем любимом языке программирования, выводящую по заданному  $k$  член последовательности с номером  $k$ .

Программа должна вводить с клавиатуры число  $k$  от 1 до 1000 и выводить соответствующую букву.

**Пример:**

*Ввод:* 17

*Вывод:* В

## Задача 8

Однако завтра с самого утра мне пришлось заняться своими прямыми обязанностями. «Алдан» был починен и готов к бою, и, когда я пришел после завтрака в электронный зал, у дверей уже собралась небольшая очередь дублей с листками предлагаемых задач.

Аркадий и Борис Стругацкие «Понедельник начинается в субботу»

Заданы целые числа  $A, B$ , причем  $A$  не обязательно меньше  $B$ , и натуральное число  $N$ . Напишите программу на вашем любимом языке программирования, вводящую с клавиатуры числа  $A, B, N$  и выводящую все числа в диапазоне между  $A$  и  $B$ , кратные  $N$ . Решите эту задачу, не используя условных операторов в вашей программе.

**Пример**

*Входные данные:*

14 3 5

*Выходные данные:*

5 10