Олимпиада «ЛОМОНОСОВ» по механике и математическому моделированию – 2022/2023

7 – 9 классы

Критерии оценок задач:

Каждая задача оценивается в 20 баллов. Оценка 20 баллов ставится за правильное и полное решение задачи и правильный ответ.

За решение с различными недочетами (недостатки обоснования, неточности и т. д.) ставится 15 баллов. В некоторых задачах ставились также оценки 5 и 10 баллов за частичное продвижение в решении.

Решения задач варианта для 7 – 9 классов

Задача 1. Два деревянных кубика имеют равные размеры, но сделаны из разных пород дерева. Для того, чтобы первый кубик, плотность которого составляет 70% от плотности воды, полностью погрузить в воду, необходимо приложить силу в два раза меньшую, чем та сила, которую надо приложить ко второму кубику, чтобы он полностью погрузился в воду. На сколько процентов плотность второго кубика меньше плотности воды?

Решение. Запишем условие равновесия первого кубика под водой:

$$F_A = F_1 + \rho_1 V g \Rightarrow \rho_0 V g = F_1 + \rho_1 V g \Rightarrow (\rho_0 - \rho_1) V g = F_1.$$

Аналогично для второго кубика: $(\rho_0 - \rho_2) V g = F_2$.

Значит, $\frac{F_2}{F_1} = \frac{\rho_0 - \rho_2}{\rho_0 - \rho_1} \Rightarrow\ 2 = \frac{1-\alpha}{1-0{,}7}\ \left(\text{где } \alpha = \frac{\rho_2}{\rho_0}\right) \Rightarrow\ \alpha = 0{,}4$. Это означает уменьшение на 60%.

Ответ: на 60%.

Задача 2. Гаврила часто ездил в школу на велосипеде, потому что расстояние было немалое – 3 км – пешком идти долго. Однажды он выехал в школу, забыв дома портфель. Папа через какое-то время заметил портфель, сел на мопед и, выехав на 6 минут позже сына, догнал его по дороге в школу, после чего тут же развернулся и поехал домой. Оказалось, что папа вернулся домой в тот же момент времени, в который Гаврила добрался до школы. На каком расстоянии от дома папа догнал Гаврилу, если его скорость на мопеде была равна 20 км/ч?

Решение. Условие задачи можно выразить системой уравнений (S – искомое расстояние, V – скорость велосипеда, t – промежуток времени, за который Гаврила успел проехать путь S):

$$\begin{cases} S = Vt, \\ S = 20\left(t - \frac{1}{10}\right), \\ 3 - S = V\left(t - \frac{1}{10}\right). \end{cases}$$

Исключая S, придем к системе двух уравнений:

$$\begin{cases} Vt = 20\left(t - \frac{1}{10}\right), \\ 3 - Vt = V\left(t - \frac{1}{10}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (20 - V)t = 2, \\ V\left(2t - \frac{1}{10}\right) = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{2 \cdot 2}{20 - V} - \frac{3}{V} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{40}{20 - V} - \frac{30}{V} = 1,$$

откуда $V = 10$, $t = \frac{1}{5}$, $S = Vt = 2$ км.

Ответ: 2 км.

Задача 3. Хоккеист слегка ударил по лежащей неподвижно на льду шайбе и придал ей некоторую горизонтальную скорость, в результате шайба переместилась на 6 м и остановилась. После этого шайбе была придана другая горизонтальная скорость, перпендикулярная первой. Путь до остановки составил 8 м. Наконец, шайбе была придана скорость, равная геометрической сумме векторов первых двух скоростей. Найдите длину пути до полной остановки шайбы после третьего удара.

Решение. По закону сохранения энергии $\frac{mV^2}{2} = kmgS$, $S = \frac{V^2}{2kg}$. Тогда

$$S_1 = \frac{V_1^2}{2kg}, S_2 = \frac{V_2^2}{2kg}, S_3 = \frac{V_3^2}{2kg} = \frac{V_1^2 + V_2^2}{2kg} = S_1 + S_2 = 6 + 8 = 14 \text{ (м)}.$$

Ответ: 14 м.

Задача 4. На дереве висит скворечник в форме параллелепипеда со сторонами 20 см, 15 см и 15 см. После оттепели и заморозков на нем со всех сторон нарос слой льда. Точки на поверхности льда отстоят от поверхности скворечника на расстояние 4 см. На сколько килограммов выросла масса скворечника? Приведите как точный ответ, так и ответ с точностью до десятых. При решении вам могут (но не обязательно) понадобиться какие-то из следующих данных: плотность льда считать равной 0,9 г/см^3; масса скворца 80 г; объем цилиндра $V_c = \pi R^2 H$ (R − радиус основания, H − высота цилиндра); объем шара $V_s = \frac{4}{3}\pi R^3$ (R − радиус шара).

Решение. Образовавшийся нарост состоит из шести параллелепипедов (каждый имеет основание, совпадающее с одной из стенок скворечника, и высоту 4 см), 12 четвертей цилиндров (каждый цилиндр имеет ось, равную ребру исходного параллелепипеда, и радиус 4 см) и 8 шаровых секторов, которые в сумме составляют шар радиусом 4 см.

Суммарный объем этого нароста равен $(20 \cdot 15 + 20 \cdot 15 + 15 \cdot 15) \cdot 2 \cdot 4 + \pi \cdot 4^2 \cdot (20 + 15 + 15) + \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = 6600 + 800\pi + \frac{256\pi}{3} = \frac{19800 + 2656\pi}{3}$ см^3.

Тогда масса нароста равна $\frac{19800+2656\pi}{3} \cdot \frac{9}{10} = 5940 + 796{,}8\pi$ г = 5,94 + 0,7968π кг. Так как $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, то это число лежит в промежутке от 8,441952 до 8,44992. Значит, округленное значение равно 8,4 кг.

Ответ: а) $5{,}94 + 0{,}7968\pi$; б) 8,4 кг.

Критерии оценки: **20 баллов:** правильное решение и правильный ответ;

Округление можно проводить разными способами. Главное требование: оно должно быть основано на строгих оценках, а не на приближенных вычислениях без оценки точности.

Задача 5. Поезд курсирует между городами Альфоград и Бетовск, расстояние между которыми равно 100 км, с постоянной скоростью. Прибыв в конечный пункт, поезд разворачивается и уходит обратно, в следующем конечном пункте снова разворачивается и так далее. На станциях поезд проводит пренебрежимо мало времени. Гаврила, живущий в поселке Гаммово рядом с железной дорогой, каждый день выходит из дома в случайный момент времени, садится на первый пришедший поезд и едет в один из двух этих городов. Он подсчитал, что в течение года он приехал в Альфоград 221 раз, а в Бетовск 144 раза. Найдите наиболее вероятное расстояние вдоль железной дороги между Альфоградом и Гаммово.

Решение. Допустим, скорость поезда равна p км/час. Пусть расстояние АГ равно x, тогда расстояние БГ равно $100 - x$. Считаем, что поезд отправляется из А в момент времени 0. Тогда мимо поселка Г поезд, идущий из А в Б, проходит в момент времени x/p, а поезд, идущий из Б в А, в момент времени $(100 + 100 - x)/p = (200 - x)/p$. В момент времени $200/p$ поезд прибывает в конечный пункт Б, после чего процесс повторяется.

Тогда длина промежутка времени из интервала от 0 до $200/p$, когда первым придет поезд из А в Б, равна $x/p + 200/p - (200 - x)/p = 2x/p$. А длина промежутка времени из интервала от 0 до $200/p$, когда первым придет поезд из Б в А, равна $(200 - x)/p - x/p = (200 - 2x)/p$.

По условию,

$$\frac{(200-2x)\cdot p}{p\cdot 2x} = \frac{221}{144} \Leftrightarrow \frac{100-x}{x} = \frac{221}{144}.$$

Значит, $144(100 - x) = 221x$, $365x = 14400$, $x = \frac{2880}{73} \approx 39{,}45$ км.

Ответ: $\frac{2880}{73} = 39\frac{33}{73} \approx 39{,}45$ км $\approx 39{,}4$ км (принимается любой из этих ответов).