**Олимпиада «ЛОМОНОСОВ» по механике и математическому моделированию – 2022/2023**

**10 – 11 классы**

**Критерии оценок задач:**

Каждая задача оценивается в 20 баллов. Оценка 20 баллов ставится за правильное и полное решение задачи и правильный ответ.

За решение с различными недочетами (недостатки обоснования, неточности и т. д.) ставится 15 баллов. В некоторых задачах ставились также оценки 5 и 10 баллов за частичное продвижение в решении.

**Внимание!** ***Итоговый балл участника равен сумме баллов за пять задач из шести, то есть худшая из шести оценок за задачи в сумму баллов не входит.***

**Решения задач варианта 231. Ответы ко всем вариантам.**

**Задача 1.** Хоккеист слегка ударил по лежащей неподвижно на льду шайбе и придал ей некоторую горизонтальную скорость, в результате шайба переместилась на 6 м и остановилась. После этого шайбе была придана другая горизонтальная скорость, перпендикулярная первой. Путь до остановки составил 8 м. Наконец, шайбе была придана скорость, равная геометрической сумме векторов первых двух скоростей. Найдите длину пути до полной остановки шайбы после третьего удара.

**Решение.** По закону сохранения энергии $\frac{mV^2}{2} = kmgS$, $S = \frac{V^2}{2kg}$. Тогда

$$S_1 = \frac{V_1^2}{2kg}, S_2 = \frac{V_2^2}{2kg}, S_3 = \frac{V_3^2}{2kg} = \frac{V_1^2+V_2^2}{2kg} = S_1 + S_2 = 6 + 8 = 14 \text{ (м)}.$$

**Ответ:** 14 м.

**Ответ к варианту 232**: 17 м.

**Задача 2.** На дереве висит скворечник в форме параллелепипеда со сторонами 20 см, 15 см и 15 см. После оттепели и заморозков на нем со всех сторон нарос слой льда. Точки на поверхности льда отстоят от поверхности скворечника на расстояние 4 см. На сколько выросла масса скворечника? Считать плотность льда равной 0,9 г/см$^3$. Ответ дайте в килограммах. Приведите как точный ответ, так и ответ с точностью до сотых.

**Решение.** Образовавшийся нарост состоит из шести параллелепипедов (каждый имеет основание, совпадающее с одной из стенок скворечника, и высоту 4 см), 12 четвертей цилиндров (каждый цилиндр имеет ось, равную ребру исходного параллелепипеда, и радиус 4 см) и 8 шаровых секторов, которые в сумме составляют шар радиусом 4 см.

Суммарный объем этого нароста равен

$$(20 \cdot 15 + 20 \cdot 15 + 15 \cdot 15) \cdot 2 \cdot 4 + \pi \cdot 4^2 \cdot (20 + 15 + 15) + \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 =$$

$$= 6600 + 800\pi + \frac{256\pi}{3} = \frac{19800+2656\pi}{3} \text{ см}^3.$$

Тогда масса нароста равна $\frac{19800+2656\pi}{3} \cdot \frac{9}{10} = 5940 + 796{,}8\pi$ г = 5,94 + 0,7968π кг. Так как $3{,}141 < \pi < 3{,}142$, то это число лежит в промежутке от 8,4427488 до 8,4435456. Значит, округленное значение равно 8,44 кг. (Отметим, что оценка $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ не позволяет сделать нужный вывод)

**Ответ:** а) $5{,}94 + 0{,}7968\pi$; б) 8,44 кг.

**Ответ к варианту 232**: а) $5{,}76 + 0{,}7968\pi$; б) 8,26 кг.

Округление можно проводить разными способами. Главное требование: оно должно быть основано на строгих оценках, а не на приближенных вычислениях без оценки точности.

**Задача 3.** Гаврила часто ездил в школу на велосипеде, потому что расстояние было немалое – 3 км – пешком идти долго. Однажды он выехал в школу, забыв дома портфель. Папа через какое-то время заметил портфель, сел на мопед и, выехав на 6 минут позже сына, догнал его по дороге в школу, после чего тут же развернулся и поехал домой. Оказалось, что папа вернулся домой в тот же момент времени, в который Гаврила добрался до школы. На каком расстоянии от дома папа догнал Гаврилу, если его скорость на мопеде была равна 20 км/ч?

**Решение.** Условие задачи можно выразить системой уравнений ($S$ – искомое расстояние, $V$ – скорость велосипеда, $t$ – промежуток времени, за который Гаврила успел проехать путь $S$):

$$\begin{cases} S = Vt, \\ S = 20\left(t - \frac{1}{10}\right), \\ 3 - S = V\left(t - \frac{1}{10}\right). \end{cases}$$

Исключая $S$, придем к системе двух уравнений:

$$\begin{cases} Vt = 20\left(t - \frac{1}{10}\right), \\ 3 - Vt = V\left(t - \frac{1}{10}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (20 - V)t = 2, \\ V\left(2t - \frac{1}{10}\right) = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{2\cdot 2}{20 - V} - \frac{3}{V} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{40}{20 - V} - \frac{30}{V} = 1,$$

откуда $V = 10$, $t = \frac{1}{5}$, $S = Vt = 2$ км.

**Ответ:** 2 км.

**Ответ к варианту 232**: 2 км.

**Задача 4.** Поезд курсирует между городами Альфоград и Бетовск, расстояние между которыми равно 100 км, с постоянной скоростью. Прибыв в конечный пункт, поезд разворачивается и уходит обратно, в следующем конечном пункте снова разворачивается и так далее. На станциях поезд проводит пренебрежимо мало времени. Гаврила, живущий в поселке Гаммово рядом с железной дорогой, каждый день выходит из дома в случайный момент времени, садится на первый пришедший поезд и едет в один из двух этих городов. Он подсчитал, что в течение года он приехал в Альфоград 221 раз, а в Бетовск 144 раза. Найдите наиболее вероятное расстояние вдоль железной дороги между Альфоградом и Гаммово.

**Решение.** Допустим, скорость поезда равна $p$ км/час. Пусть расстояние АГ равно $x$, тогда расстояние БГ равно $100 - x$. Считаем, что поезд отправляется из А в момент времени 0. Тогда мимо поселка Г поезд, идущий из А в Б, проходит в момент времени $x/p$, а поезд, идущий из Б в А, в момент времени $(100 + 100 - x)/p = (200 - x)/p$. В момент времени $200/p$ поезд прибывает в конечный пункт Б, после чего процесс повторяется.

Тогда длина промежутка времени из интервала от 0 до $200/p$, когда первым придет поезд из А в Б, равна $x/p + 200/p - (200 - x)/p = 2x/p$. А длина промежутка времени из интервала от 0 до $200/p$, когда первым придет поезд из Б в А, равна $(200 - x)/p - x/p = (200 - 2x)/p$.

По условию,

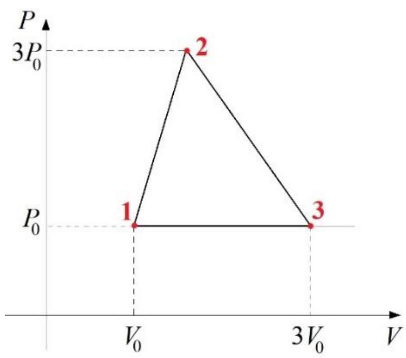
$$\frac{(200-2x)\cdot p}{p\cdot 2x}=\frac{221}{144}\Leftrightarrow\frac{100-x}{x}=\frac{221}{144}.$$

Значит, $144(100 - x) = 221x$, $365x = 14400$, $x=\frac{2880}{73}\approx 39{,}45$ км.

**Ответ:** $\frac{2880}{73}=39\frac{33}{73}\approx 39{,}45$ км $\approx 39{,}4$ км (принимается любой из этих ответов).

**Ответ к варианту 232**: $\frac{2860}{73}=39\frac{13}{73}\approx 39{,}18$ км $\approx 39{,}2$ км.

**Задача 5.** С одним молем одноатомного идеального газа осуществляется цикл, который в осях $P - V$ (давление – объем) представляет собой треугольник (см. рисунок). В состоянии 2 значение объема $V_2\in[V_0,3V_0]$. Найдите область возможных значений к.п.д. цикла, если известно, что на некотором участке отрезка 2-3 цикла газ получает тепло.




**Решение.** Для замкнутого цикла к.п.д. цикла определяется формулой $\eta=\frac{A}{Q_1}$, где $A$ – работа газа за цикл, $Q_1$ –количество тепла, полученное газом за цикл. Работа $A$ вычисляется как площадь треугольника1-2-3: $A=2p_0V_0$.

Для определения величины $Q_1$ проанализируем, на каких участках цикла газ получал тепло. На малом элементе участка 1-2 имеем $\Delta Q=\Delta A+\Delta U>0$, так как $\Delta A=p\Delta V\geq 0$ (объем растет), $\Delta U=\frac{3}{2}R\Delta T>0$ (с ростом давления и объема температура $T$ увеличивается).

Таким образом, на отрезке 1-2 газ всюду получает тепло. Общее количество полученного на этом участке тепла определяется в соответствии с первым началом термодинамики $Q_{12}=A_{12}+\Delta U_{12}$. Обозначим $V_2=xV_0$ ($x\in[1{,}3]$).

Закон М-К в состоянии 1 ($P_1V_1 = RT_1, P_1 = P_0, V_1 = V_0$) и в состоянии 2 ($P_2V_2 = RT_2, P_2 = 3P_0, V_2 = xV_0$) позволяют выразить изменение внутренней энергии и работы через начальные значения давления и объема.

Изменение внутренней энергии будет равно $\Delta U_{12} = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}(3x - 1)p_0V_0$. Работа газа, как площадь под кривой $A_{12} = \frac{1}{2}(3P_0 + P_0)(xV_0 - V_0) = 2(x - 1)p_0V_0$. Таким образом, $Q_{12} = \frac{1}{2}(13x - 7)P_0V_0$.

Рассмотрим переход из состояния 3 ($3P_0V_0 = RT_3$) в состояние 1 ($P_0V_0 = RT_1$). В этом случае работа газа отрицательна, так как его объем уменьшается. И изменение внутренней энергии тоже отрицательно, так как температура уменьшается из-за уменьшения объема и давления.

Изменение внутренней энергии будет равно $\Delta U_{31} = -3P_0V_0$. Работа газа, как площадь под кривой $A_{31} = -2P_0V_0$. Тогда из первого начала: $Q_{31} = -5P_0V_0$. Заметим, что изменение внутренней энергии за цикл равно нулю, а работа равна $A = 2P_0V_0$.

Рассмотрим переход из состояния 2 ($3P_0V_2 = RT_2$) в состояние 3 ($3P_0V_0 = RT_3$). Отрезок 2–3 лежит на прямой, являющейся графиком линейной функции $P = C - BV$. Так как координаты точек 2 и 3 известны $2(xV_0; 3P_0)$ и $3(3V_0;\ P_0)$ , то константы $C$, $B$ равны:

$A = \frac{(9-x)P_0}{3-x}$ и $B = \frac{2P_0}{V_0(3-x)}$.

Для каждого малого шага вдоль этой прямой 2–3 имеем: $\Delta Q = \Delta A + \Delta U = P\,\Delta V + \frac{3}{2}R\Delta T = P\,\Delta V + \frac{3}{2}\Delta(P\,V) = \frac{5}{2}\ P\Delta V + \frac{3}{2}\ V\,\Delta P$.

Но $P = C - BV \Rightarrow \Delta P = -B\Delta V$. Таким образом, $\Delta Q = \frac{1}{2}\ (5C - 8BV)\,\Delta V$. Условие $\Delta Q > 0$ выполнено при $V < V_4 = \frac{5C}{8B} = \frac{5}{16(9-x)V_0}$. Легко видеть, что при всех $x \in [1; 3]$ имеем $V_4 < 3V_0$. Требование $V_4 > xV_0$ приводит к ограничению $x < \frac{45}{21}$. Это значит, что только при $x \in \left[1; \frac{45}{21}\right)$ на отрезке 2–3 имеется участок, на котором газ получает тепло. Этот участок 2–4 соответствует $V \in [V_2;\ V_4]$. Полученное газом на 2–4 тепло можно найти либо по формуле $Q_{24} = A_{24} + \Delta U_{24}$, либо как площадь под графиком $\frac{1}{2}(5C - 8BV)$ при $V \in [V_2;\ V_4]$.

В результате получим $Q_{24} = \frac{9}{64}\frac{25x^2-418x+1353}{3-x}$. Тогда тепло, полученное газом за цикл, равно:

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{24} = f(x)P_0V_0, \text{где } f(x) = \frac{1}{64}\frac{25x^2 - 418x + 1353}{3 - x}.$$

Производная $f'^{(x)} = -\frac{1}{64}\frac{25x^2-250x-99}{(3-x)^2} = \frac{1}{64}\frac{324-25(x-3)^2}{(3-x)^2} > 0$ для всех $x \in [1; \frac{45}{21})$.

Следовательно, областью значений непрерывной и монотонно возрастающей на $[1; \frac{45}{21})$ функции $f(x)$ является промежуток $\left[f(1);\ f\left(\frac{45}{21}\right)\right)$. Имеем $f(1) = \frac{15}{2}$, $f\left(\frac{45}{21}\right) = \frac{73}{7}$.

Значит, $\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{2P_0V_0}{f(x)P_0V_0}\ \in \left(\frac{14}{73};\ \frac{4}{15}\right]$.

**Ответ:** $\left(\frac{14}{73};\ \frac{4}{15}\right]$.

**Ответ к варианту 232**: $\left(\frac{14}{73};\ \frac{4}{15}\right]$.

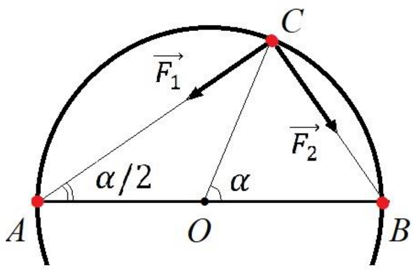
**Задача 6.** В точках $A$ и $B$ расположены материальные точки с массами 1 г и 2 г соответственно. Третья материальная точка с массой 3 г находится в такой точке C окружности, построенной на $AB$ как на диаметре, в которой величина суммарной силы, действующей на третью материальную точку со стороны точек, расположенных в $A$ и $B$, минимальна. Найдите угловую меру дуги $BC$.

**Решение.** Обозначим массы двух точек как $m$ и $\gamma m,$ массу третьей точки $m_0$.

Обозначим $AB = d,$ $O$ – центр окружности, $\cup$BC = $\angle COB = \alpha$. Тогда $\angle CAB = \frac{\alpha}{2}$, $\angle ACB = 90°$,

$AC = d_1 = d\cos\frac{\alpha}{2}$, $BC = d_2 = d\sin\frac{\alpha}{2}$.

Действующие силы: $F_1 = \frac{D}{d_1^2}$, $F_2 = \frac{D\gamma}{d_1^2}$, где $D = Gmm_0$.




Суммарная сила $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}.$ Так как $\overrightarrow{F_1} \perp \overrightarrow{F_2}$ , то $F^2 = F_1^2 + F_2^2$.

Обозначив $z = \cos^2\frac{\alpha}{2}$, получим $F^2 = D^2\left(\frac{1}{d_1^4} + \frac{\gamma^2}{d_2^4}\right) =$

$\frac{D^2}{d^4}\left(\frac{1}{\cos^4\frac{\alpha}{2}} + \frac{\gamma^2}{\sin^4\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{D^2}{d^4}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{\gamma^2}{(1-z)^2}\right)$. Так как $\alpha \in (0;\ \pi)$, то

$\frac{\alpha}{2} \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $z \in (0; 1)$.

Рассмотрим функцию $f\ (z) = \frac{1}{z^2} + \frac{\gamma^2}{(1-z)^2}$. Ее производная $f'(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{2\gamma^2}{(1-z)^3}$ равна нулю при

$(1-z)^3 = \gamma^2 z^3 \Rightarrow 1 - z = \gamma^{\frac{2}{3}} z \Rightarrow z = \frac{1}{1+\gamma^{\frac{2}{3}}}$. В данной точке производная меняет знак с «–» на «+», то есть это точка минимума.

Значит, минимальное значение силы достигается при $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^{\frac{2}{3}}}} \Rightarrow \alpha = 2\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^{\frac{2}{3}}}}\right)$.

Приданных числовых данных: $\alpha = 2\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{4}}}\right)$.

**Ответ:** $2\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{4}}}\right) = \arccos\left(\frac{1-\sqrt[3]{4}}{1+\sqrt[3]{4}}\right)$

**Ответ к варианту 232**: $2\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{9}}}\right) = \arccos\left(\frac{1-\sqrt[3]{9}}{1+\sqrt[3]{9}}\right)$.