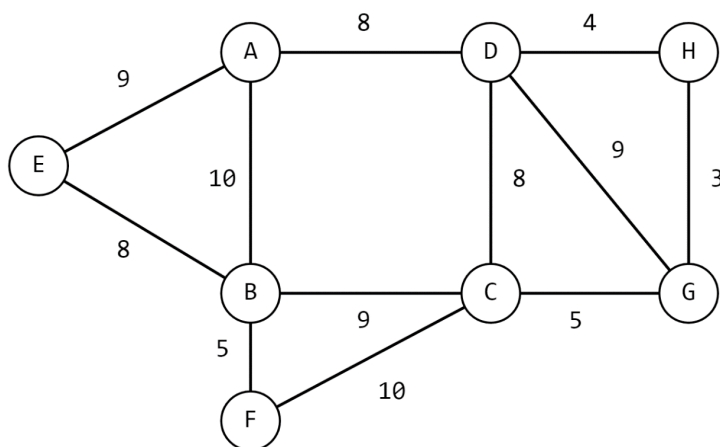


1. Почтальон собирается развезти письма. Для этого ему нужно посетить все улицы, на которых живут адресаты (см. схему). Почтальон находится в отделении почты (на схеме обозначено точкой  $A$ ). После доставки всех писем ему нужно вернуть в почтовое отделение. Почтальон хотел бы сделать это за наименьшее время.



Схема

Отрезками на схеме обозначены улицы. Кругами на схеме обозначены перекрестки, где почтальон может поменять направление движения. Цифрами на схеме обозначено время в минутах, которое потребуется почтальону, чтобы проехать по данной улице. Все указанные на схеме улицы почтальон должен посетить хотя бы по одному разу.

Какое наименьшее время в минутах потребуется почтальону на то, чтобы доставить все письма и вернуться в свое почтовое отделение? Для простоты считайте, что почтальон раскладывает письма по ящикам моментально.

Ответ: 103 мин.

Решение

На схеме представлен ненаправленный граф.

Поскольку почтальон должен посетить все ребра хотя бы по одному разу, то он потратит времени не меньше, чем суммарное время проезда по всем улицам по одному разу:

$$9 + 8 + 10 + 5 + 9 + 10 + 4 + 3 + 9 + 8 + 5 + 8 = 88 \text{ (мин.)}$$

Так как из каждой вершины, кроме двух ( $A$ ,  $G$ ), выходит только четное число дорог, то для того, чтобы обойти весь граф, посетив каждое из ребер по разу, то можно начать в вершине  $A$  и при этом вернуться в вершину  $G$ . Значит, после прохода по всем ребрам, почтальон должен будет вернуться из вершины  $G$  в вершину  $A$  кратчайшим путём.

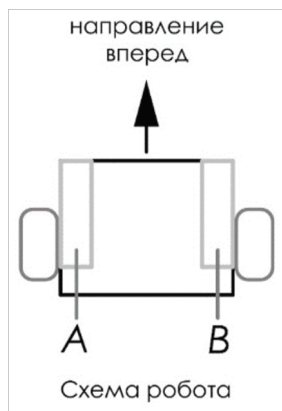
В данном случае минимальный путь – это  $G-H-D-A$ .

Получается, что почтальон может управиться за следующее время:

$$88 + 3 + 4 + 8 = 88 + 15 = 103 \text{ (мин.)}$$

Ответ: 103 мин.

2. Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, радиус каждого из колёс робота равен 7 см. Левым колесом управляет мотор *A*, правым колесом управляет мотор *B*. Колёса напрямую подсоединены к моторам (см. *схему робота*). Ширина колеи робота (расстояние между центрами колёс) равна 20 см.



Робот совершает танковый разворот на месте (колеса вращаются с равной скоростью в противоположных направлениях). Во время поворота робота ось мотора *A* (*при работающем моторе B*) повернулась на  $240^\circ$ .

Определите градусную меру угла, на который повернулся робот. При расчётах примите  $\pi \approx 3,14$ . Ответ дайте в градусах, округлив результат до целого.

Чтобы получить более точный ответ, округление стоит производить только при получении финального ответа.

Ответ:  $168^\circ$ .

Решение

Длину дуги окружности, которую проехало колесо, можно вычислить следующим образом:

$$2 * 3,14 * 7 * 240^\circ : 360^\circ$$

Длина окружности, диаметр которой равен ширине колеи:

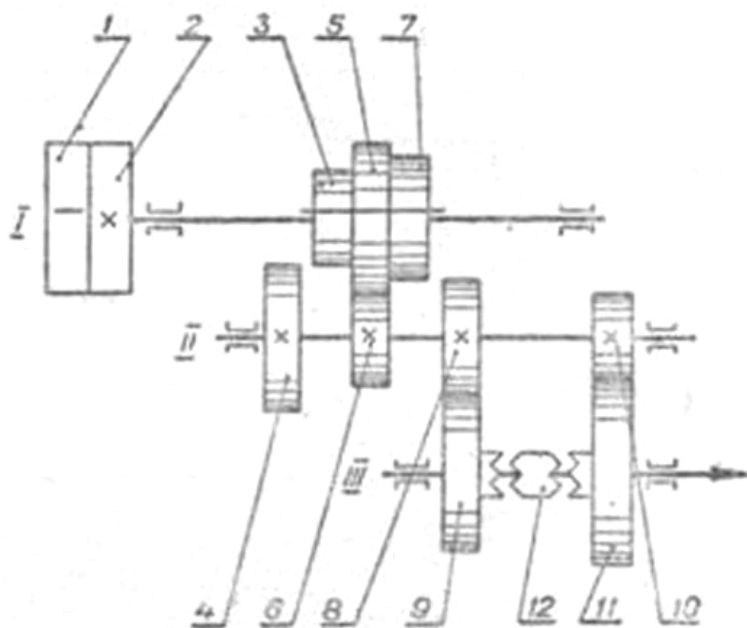
$$3,14 * 20$$

Тогда градусная мера угла, на которую повернулся робот, будет равна:

$$(2 * 3,14 * 7 * 240^\circ : 360^\circ) * 360^\circ : (3,14 * 20) = \\ = 240^\circ * 7 : 10 = 168^\circ$$

Ответ:  $168^\circ$ .

3. Рассмотрим устройство коробки скоростей токарного станка (см. *Рисунок*). Изменение чисел оборотов шпинделей достигается в коробках скоростей переключением колёс, составляющих кинематические цепи от вала привода к шпинделю станка.



*Рисунок*

На конце ведущего вала I насажены рабочий шкив 2 и холостой шкив 1, которые приводятся в движение от трансмиссионного вала или электродвигателя. На валу вдоль его оси могут перемещаться по направляющей шпонке зубчатые колёса 3, 5 и 7, изготовленные в виде одного блока. На промежуточном валу II закреплены зубчатые колёса 4, 6, 8 и 10. Передвигая блок зубчатых колёс 3, 5 и 7 вдоль вала I влево, можно включать в зацепление колесо 3 с колесом 4; в среднем положении блока сцеплены зубчатые колёса 5 и 6; передвигая блок вправо, можно включать в зацепление колёса 7 и 8.

На валу III, который является шпинделем станка, свободно посажены зубчатые колёса 9 и 11, находящиеся в постоянном зацеплении с зубчатыми колёсами 8 и 10. Между зубчатыми колёсами 9 и 11 на шпинделе передвигается по направляющей шпонке кулачковая двусторонняя муфта 12, которая своими выступами может сцепляться с выступами на ступицах зубчатых колёс 9 и 11 и соединять с валом III то одно, то другое зубчатое колесо (см. *Таблица №1*). Мастер выставил такую конфигурацию коробки, что в зацеплении находятся колёса 3 и 4, кулачковая двусторонняя муфта сцеплена с колесом 9. Вал I совершает 144 оборота за 3 минуты.

<i>№ элемента на рисунке</i>	<i>Описание</i>	<i>Число зубьев (для зубчатых колёс)</i>
1	Холостой шкив	
2	Рабочий шкив	
3	Зубчатое колесо	20
4	Зубчатое колесо	30
5	Зубчатое колесо	35
6	Зубчатое колесо	15
7	Зубчатое колесо	24
8	Зубчатое колесо	26
9	Зубчатое колесо	52
10	Зубчатое колесо	14
11	Зубчатое колесо	64
12	Кулачковая двусторонняя муфта	

*Таблица №1*

Определите, сколько оборотов за 5 минут сделает шпиндель станка, приведя результат с точностью до целых. Чтобы получить более точный ответ, округление стоит производить только при получении финального ответа.

Ответ: 80 об.

Решение

Поскольку мастер выставил такую конфигурацию коробки, что в зацеплении находятся колёса 3 и 4, а кулачковая двусторонняя муфта сцеплена с колесом 9, то мы получили двухступенчатую передачу. Ведущая шестерня 3 через шестерню 4 передает движение на вал II, с которого шестерня 8 передает вращение на колесо 9, которая с помощью кулачковой муфты 12 передаёт вращение посредством вала III на шпиндель.

За одну минуту ведущий вал совершает:

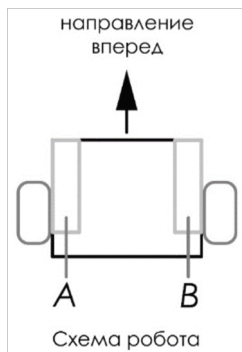
$$144 : 3 = 48 \text{ (об./мин.)}$$

Определим число оборотов, которое совершит шпиндель за 5 минут:

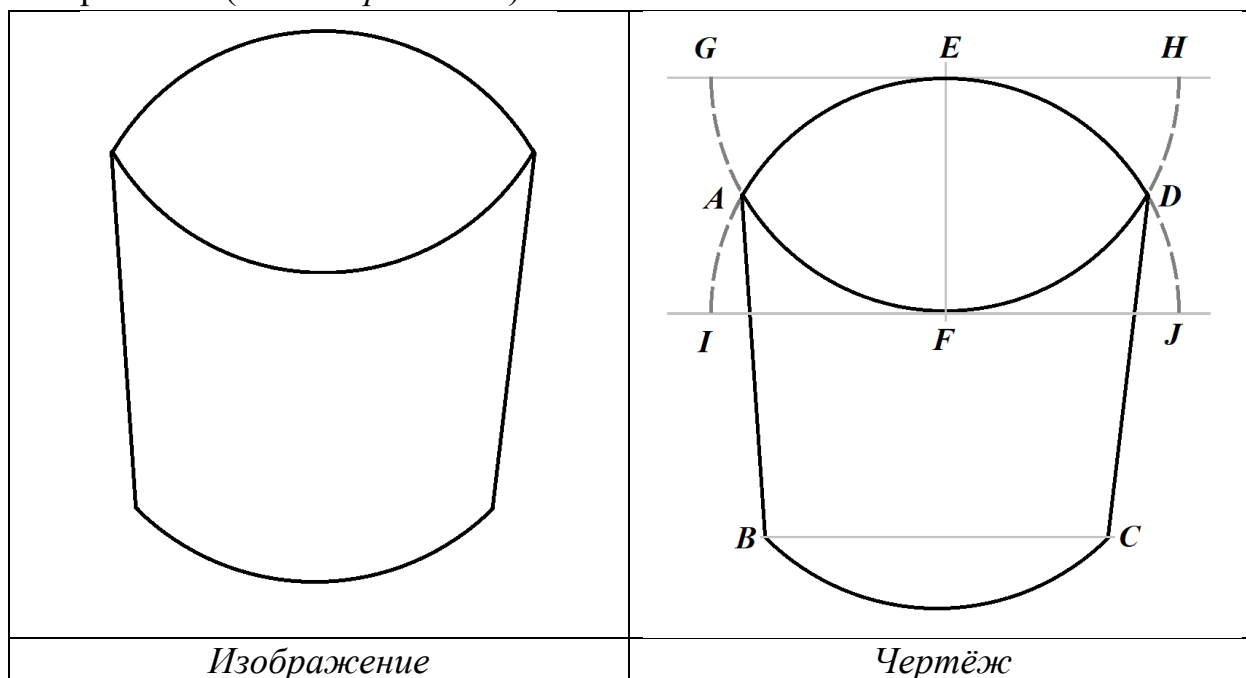
$$48 * \frac{20}{30} * \frac{26}{52} * 5 = 80 \text{ (об.)}$$

Ответ: 80 об.

4. Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, радиус каждого из колёс робота равен 8 см. Левым колесом управляет мотор *A*, правым колесом управляет мотор *B*. Колёса напрямую подсоединены к моторам (см. *схему робота*). Ширина колеи робота (расстояние между центрами колёс) равна 20 см.



Робот, с помощью маркера, закреплённого по середине между колёс, наносит изображение (см. *изображение*).



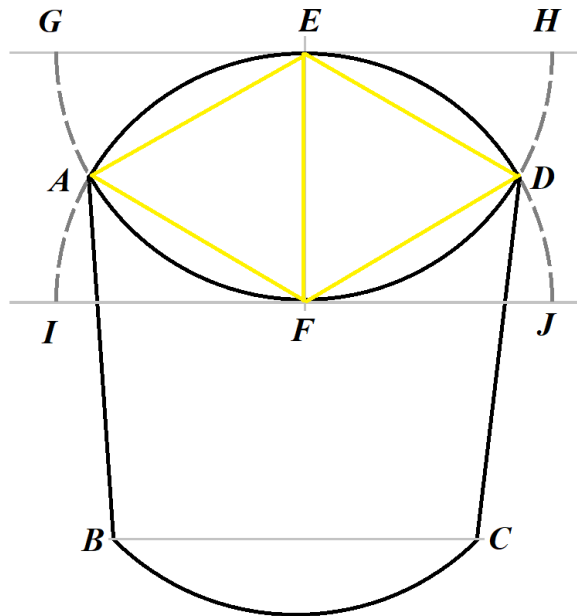
Дуги *AED* и *AFD* (см. *чертёж*) имеют равные градусные меры. Точки *A* и *D* получены путем пересечения полуокружностей *GFH* и *IEJ*. Точка *E* – точка касания прямой *GH* дуги *IEJ*. Точка *F* – точка касания прямой *IJ* дуги *GFH*.  $GH = IJ = AB = DC = 2$  м.

Известно, что градусная мера дуги *BC* равна  $90^\circ$ , радиус дуги равен 1,5 м. Определите, чему равна длина кривой, изображённой роботом. При расчётах примите  $\pi \approx 3,14$ . Ответ дайте в сантиметрах, округлив результат до целого. Чтобы получить более точный результат, округление стоит производить только при получении финального ответа.

Ответ: 1054 см.

Решение

Рассчитаем градусные меры дуг  $AED$  и  $AFD$ . Для этого сделаем дополнительное построение:



Проведем отрезки  $EA$ ,  $ED$ ,  $EF$ ,  $FA$ ,  $FD$ .

Так как  $EA$ ,  $ED$ ,  $EF$  – это радиусы одной и той же окружности, то

$$EA = ED = EF.$$

Так как  $EF$ ,  $FA$ ,  $FD$  – это радиусы одной и той же окружности, то

$$EF = FA = FD.$$

Значит,  $EA = ED = EF = FA = FD$ .

Получается, что треугольники  $AEF$  и  $DEF$  – равносторонние.

Тогда углы  $AEF$ ,  $FED$ ,  $AFE$ ,  $EFD$  – равны и их градусные меры равны по  $60^\circ$ .

Тогда градусные меры углов  $AFD$  и  $AED$  равны по  $120^\circ$ .

Так как углы  $AFD$  и  $AED$  являются центральными углами для дуг  $AFD$  и  $AED$ , то градусные меры дуг совпадают с градусными мерами соответствующим им центральным углам.

Значит, градусная мера каждой из дуг равна  $120^\circ$ .

Посчитаем длину фигуры, составленной из дуг  $AFD$  и  $AED$ :

$$2 * \frac{200 * \pi * 120^\circ}{360^\circ} = \frac{400}{3} \pi \text{ (см)}$$

Посчитаем длину дуги  $BC$ :

$$\frac{2 * \pi * 150 * 90^\circ}{360^\circ} = 75\pi \text{ (см)}$$

Посчитаем длину кривой:

$$\frac{400}{3} \pi + 75\pi + 2 * 200 = 3,14 * \frac{400 + 225}{3} + 400 = 1054,166 \dots \approx 1054 \text{ (см)}$$

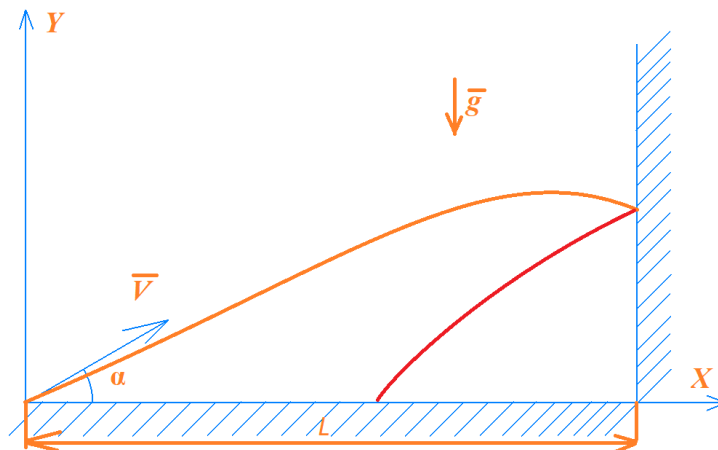
Ответ: 1054 см.

5. Небольшой робот находится в зале на расстоянии  $L = 2$  м от стены. Высота потолков в зале равна  $H = 5$  м. Робот выстреливает в стену шариком со скоростью  $V = 3$  м/с, под углом  $\alpha = 40^\circ$  к горизонту. Шарик долетает до стены, ударяется о неё абсолютно упруго, отскакивает и падает на пол. Определите, на каком расстоянии от точки выстрела упал шарик. Размерами робота и сопротивлением воздуха можно пренебречь. При расчетах примите  $g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ . Ответ дайте в сантиметрах, приведя с точностью до целых. Чтобы получить более точный результата, округление стоит производить только при получении финального ответа.

Ответ: 90 см.

Решение

Сделаем рисунок, введем оси  $OX$  и  $OY$ :



Так как удар о стенку шара происходит абсолютно упруго, и масса стены гораздо больше массы шара, то в момент удара модуль скорости шара сохранится, а направление движения сменится на противоположное. Угол падения шара будет равен углу отражения шара от стены. Соответственно, шар продолжит двигаться так, будто стенки не было, но в противоположном направлении.

Обозначим за  $b$  расстояние, на котором упадет шар от стены. Можно утверждать, что расстояние  $L+b$  будет равно расстоянию, на которое бы улетел шар, если бы не было стенки.

Запишем уравнение изменения радиуса вектора шара, брошенного под углом к горизонту в поле тяжести Земли:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}$$

Спроецируем данное уравнение на оси координат.

ОХ:

$$X = 0 + V_0 t \cdot \cos \alpha + 0$$

ОУ:

$$Y = 0 + V_0 t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Определим время, когда шар находился на полу, то есть  $Y=0$ :

$$0 = V_0 t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

$$t(gt - 2V_0 \cdot \sin \alpha) = 0$$

Получаем два решения:

$$t = 0 \text{ и } gt - 2V_0 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$t = \frac{2V_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

Значение  $t=0$  соответствует моменты старта, а второе значение – моменту падения шара на пол. Соответственно, расстояние, на которое улетел бы шар, если бы не было стены, будет равно:

$$X = V_0 \frac{2V_0 \cdot \sin \alpha}{g} = \frac{2V_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

Посчитаем это расстояние:

$$X = \frac{V_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} = \frac{3^2 \cdot \sin (80^\circ)}{9,81} = 0,9034 \dots \text{ м}$$

$$0,9034 \dots \text{ м} = 90,34 \dots \text{ см} \approx 90 \text{ см}$$

Так как  $90 \text{ см} < 2 \text{ м}$ , то после выстрела шар не долетает до стены и падает на расстоянии 90 см.

Ответ: 90 см.



### Ответы и критерии проверки

№	Ответ	Баллы
1	103 мин.	20 баллов за полностью правильный ответ, приведённый в требуемой форме
2	168°	30 баллов за полностью правильный ответ, приведённый в требуемой форме
3	80 об.	20 баллов за полностью правильный ответ, приведённый в требуемой форме
4	1054 см	20 баллов за полностью правильный ответ, приведённый в требуемой форме
5	90 см	10 баллов за полностью правильный ответ, приведённый в требуемой форме

**Олимпиада школьников «Ломоносов», робототехника**  
**Отборочный этап 2022/2023 учебного года**  
**Баллы за верные ответы на задания**

<b>Номер задания</b>	<b>5-7 классы</b>	<b>8-9 классы</b>	<b>10-11 классы</b>
<b>1</b>	20	20	20
<b>2</b>	20	20	30
<b>3</b>	20	30	20
<b>4</b>	20	20	20
<b>5</b>	20	10	10