

## Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2023/24 учебного года для 11 класса

---

### Задача 1

**В-1** Болельщики должны выбрать 6 лучших хоккеистов чемпионата: одного вратаря, двух защитников и трех нападающих. Среди претендентов: 3 вратаря, 5 защитников, 6 нападающих и 3 «универсала». «Универсал» — игрок, хороший в разных ролях, который поэтому может быть выбран как в качестве защитника, так в качестве нападающего (но не вратаря). Сколько существует способов выбрать эту шестерку? Требуется получить числовое значение.

**Ответ:** 5355

**Решение.** С выбором вратаря проблем нет:  $C_3^1 = 3$  способа. При выборе защитника есть 3 возможности: а) оба защитника выбираются из 5-ти защитников:  $C_5^2 = (5 \cdot 4)/2 = 10$ ; тогда при выборе нападающих есть  $6 + 3 = 9$  претендентов; б) один защитник выбирается из 5-ти защитников, а второй из 3-х «универсалов»; тогда при выборе нападающих есть  $6 + 2 = 8$  претендентов; в) оба защитника выбираются из 3-х «универсалов»; тогда при выборе нападающих есть  $6 + 1 = 7$  претендентов. Таким образом, общее количество вариантов равно:

$$\begin{aligned} & C_3^1(C_5^2 \cdot C_9^3 + C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_8^3 + C_3^2 \cdot C_7^3) = \\ &= 3 \cdot \left( \frac{(5 \cdot 4)}{2} \cdot \frac{(9 \cdot 8 \cdot 7)}{(2 \cdot 3)} + 5 \cdot 3 \cdot \frac{(8 \cdot 7 \cdot 6)}{(2 \cdot 3)} + \frac{(3 \cdot 2)}{2} \cdot \frac{(7 \cdot 6 \cdot 5)}{(2 \cdot 3)} \right) = \\ &= 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot (3 \cdot 8 + 8 \cdot 3 + 3) = 105 \cdot (24 + 24 + 3) = 5355. \end{aligned}$$

---

**В-2** Болельщики должны выбрать 6 лучших хоккеистов чемпионата: одного вратаря, двух защитников и трех нападающих. Среди претендентов: 3 вратаря, 4 защитника, 7 нападающих и 3 «универсала». «Универсал» — игрок, хороший в разных ролях, который поэтому может быть выбран как в качестве защитника, так в качестве нападающего (но не вратаря). Сколько существует способов выбрать эту шестерку? Требуется получить числовое значение.

**Ответ:** 5688

---

**В-3** Болельщики должны выбрать 6 лучших хоккеистов чемпионата: одного вратаря, двух защитников и трех нападающих. Среди претендентов: 2 вратаря, 5 защитников, 6 нападающих и 3 «универсала». «Универсал» — игрок, хороший в разных ролях, который поэтому может быть выбран как в качестве защитника, так в качестве нападающего (но не вратаря). Сколько существует способов выбрать эту шестерку? Требуется получить числовое значение.

**Ответ:** 3570

---

**В-4** Болельщики должны выбрать 6 лучших хоккеистов чемпионата: одного вратаря, двух защитников и трех нападающих. Среди претендентов: 2 вратаря, 4 защитника, 7 нападающих и 3 «универсала». «Универсал» — игрок, хороший в разных ролях, который поэтому может быть выбран как в качестве защитника, так в качестве нападающего (но не вратаря). Сколько существует способов выбрать эту шестерку? Требуется получить числовое значение.

**Ответ:** 3792

---

## Задача 2

**В-1**

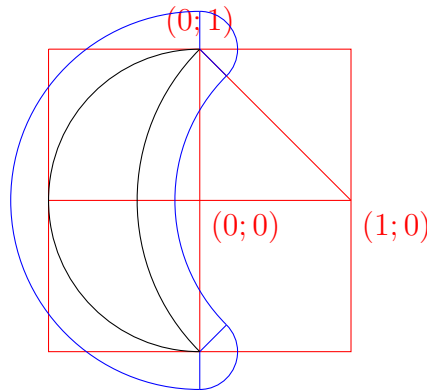
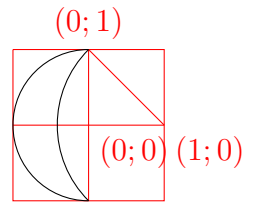
Живописец закрасил акварелью полумесяц на клетчатой бумаге. Контур полумесяца состоит из двух дуг — одна от окружности с центром в  $(0; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ , другая — от окружности с центром в  $(1; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ .

К утру краска расплылась так, что каждая точка полумесяца превратилась в круг радиуса 0.5. Найдите площадь получившейся фигуры.

**Ответ:**

$$1 + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

**Решение.** Пусть рисунок расплылся на радиус  $r$ . К площади полумесяца прибавятся «поля», которые можно разбить на левое, правое и два закругления на концах рогов.



Площадь полумесяца равна половине площади круга радиуса 1 минус сегмент круга радиуса  $\sqrt{2}$ .

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi - 4}{4} = 1.$$

Площадь левого поля — половина от площади кольца с радиусами 1 и  $1 + r$ .

$$\frac{\pi(1+r)^2 - \pi}{2}.$$

Площадь правого поля — четверть от площади кольца с радиусами  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{2} - r$ .

$$\frac{\pi(\sqrt{2})^2 - \pi(\sqrt{2} - r)^2}{4}.$$

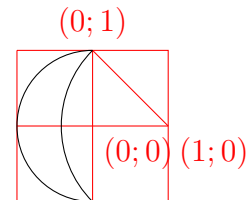
Закругления на концах рогов вместе составляют три четверти окружности радиуса  $r$ .

$$\frac{3}{4}\pi r^2.$$

Вместе получается:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{\pi(1+r)^2 - \pi}{2} + \frac{\pi(\sqrt{2})^2 - \pi(\sqrt{2} - r)^2}{4} + \frac{3}{4}\pi r^2 = \\ & = 1 + \pi r + \frac{\pi}{2}r^2 + \frac{\pi\sqrt{2}r}{2} - \frac{\pi}{4}r^2 + \frac{3\pi}{4}r^2 = 1 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi r + \pi r^2 \end{aligned}$$

Живописец закрасил акварелью полумесяц на клетчатой бумаге. Контур полумесяца состоит из двух дуг — одна от окружности с центром в  $(0; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ , другая — от окружности с центром в  $(1; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ .



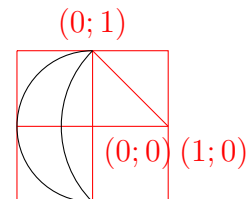
К утру краска расплылась так, что каждая точка полумесяца превратилась в круг радиуса  $0.25$ . Найдите площадь получившейся фигуры.

**Ответ:**

$$1 + \frac{5\pi}{16} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

### В-3

Живописец закрасил акварелью полумесяц на клетчатой бумаге. Контур полумесяца состоит из двух дуг — одна от окружности с центром в  $(0; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ , другая — от окружности с центром в  $(1; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ .



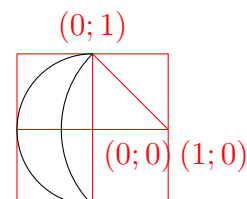
К утру краска расплылась так, что каждая точка полумесяца превратилась в круг радиуса  $1/3$ . Найдите площадь получившейся фигуры.

**Ответ:**

$$1 + \frac{4\pi}{9} + \frac{\pi\sqrt{2}}{6}$$

### В-4

Живописец закрасил акварелью полумесяц на клетчатой бумаге. Контур полумесяца состоит из двух дуг — одна от окружности с центром в  $(0; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ , другая — от окружности с центром в  $(1; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ .



К утру краска расплылась так, что каждая точка полумесяца превратилась в круг радиуса  $\sqrt{2}/2$ . Найдите площадь получившейся фигуры.

**Ответ:**

$$1 + \pi + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

**Задача 3**

**В-1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (xy - 3 + 3x - y)|y - x - 9| = (x - 4)|xy - 3 + 3x - y|, \\ \sqrt{y - x + 9} = y - 4. \end{cases}$$

**Ответ:**  $(1, 8), (-59, 13)$ .

**Решение.**

Из второго уравнения следует, что  $y \geq 4$ , так как корень неотрицателен.

Пусть первое уравнение выполняется из-за того, что  $(xy - 3 + 3x - y) = 0$ . Условие равносильно  $(x - 1)(y + 3) = 0$ . Решение  $y = -3$  не подходит. При  $x = 1$  получаем

$$\sqrt{y + 8} = y - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 4, \\ y^2 - 9y + 8 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow y = 8$$

Пусть теперь  $(xy - 3 + 3x - y) \neq 0$ , но  $(x - 4) = 0$ , и  $(y - x - 9) = 0$ . Тогда  $x = 4$ ,  $y = 13$ , но такой вариант не подходит под второе уравнение. При остальных  $x, y$  исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} (x - 1)(y + 3)(x - 4) > 0, \\ y - x - 9 = \pm(x - 4), \\ \sqrt{y - x + 9} = y - 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(y + 3)(x - 4) > 0, \\ y = 13 \text{ или } y = 2x + 5, \\ \sqrt{y - x + 9} = y - 4. \end{cases}$$

При  $y = 13$  решением будет  $x = -59$ , при  $y = 2x + 5$  получим уравнение

$$\sqrt{x + 14} = 2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -0,5, \\ 4x^2 + 3x - 13 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{217}}{8}, \text{ откуда } y = \frac{17 + \sqrt{217}}{4}.$$

Последняя пара не удовлетворяет условию  $(x - 1)(y + 3)(x - 4) > 0$ .

---

**В-2** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (xy + 3x - 2y - 6)|y - x - 8| = (x - 5)|xy + 3x - 2y - 6|, \\ \sqrt{y - x + 10} = y - 4. \end{cases}$$

**Ответ:**  $(2, 8), (-58, 13)$ .

---

**В-3** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (xy + 4x - y - 4)|y - x - 8| = (x - 4)|xy + 4x - y - 4|, \\ \sqrt{y - x + 10} = y - 3. \end{cases}$$

**Ответ:**  $(1, 7), (-59, 12)$ .

---

**В-4** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (xy + 2x - y - 2)|y - x - 10| = (x - 4)|xy + 2x - y - 2|, \\ \sqrt{y - x + 8} = y - 5. \end{cases}$$

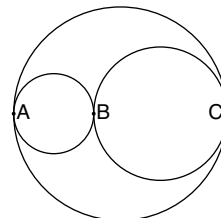
**Ответ:**  $(1, 9), (-59, 14)$ .

---

### Задача 4

В-1

Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на  $180^\circ$ . По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так что любую из дуг  $AB$  длиной 15 км он проезжает за 7 минут, любую из дуг  $BC$  длиной 25 км — за 11 минут, а любую из дуг  $AC$  — за 17 минут. Выехав из точки  $A$ , автомобиль через 1 час 25 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?



**Ответ:** 190

**Решение.** Рассмотрим варианты, которыми находящийся в точке  $A$  автомобиль может в следующий раз впервые снова оказаться в этой точке.

Во-первых, можно сделать это, не проходя через точку  $C$ , т. е. путем  $ABA$ .

Во-вторых, можно одним из двух способов ( $AC$  или  $ABC$ ) добраться до точки  $C$ , сделать несколько кругов  $CBC$  («несколько» может быть и нулем) и вернуться одним из двух способов ( $CA$  или  $CBA$ ) в точку  $A$ .

В любом случае мы либо четное число раз проезжаем по 7-минутной дуге, четное число раз по 11-минутной и четное число раз по 17-минутной, либо наоборот, нечетное число раз по каждому из трех типов дуг.

То же самое можно сказать про неоднократное возвращение в точку  $A$ .

«Четный» случай нам не подходит, так как по условию на каждую дугу уходит целое число минут, а общее время выражается в минутах нечетным числом.

Заметим, что любая тройка нечетных положительных чисел может быть реализована в качестве числа проходов (в любом направлении) дуг 1)  $AB$ , 2)  $BC$ , 3)  $AC$ . Действительно, выехав из точки  $A$  и сделав заданное нечетное число проходов  $AB$ , мы окажемся в точке  $B$ , после чего, сделав заданное нечетное число проходов  $BC$ , мы окажемся в точке  $C$ , а после заданного нечетного числа проходов  $AC$  — снова в точке  $A$ .

Итак, попробуем найти три таких нечетных положительных числа  $i, j, k$ , что

$$7i + 11j + 17k = 60 + 25 = 85.$$

Для  $k$  возможны 3 варианта: 5, 3, 1.

Первый случай отбрасываем, так как для него получаем  $i = j = 0$ .

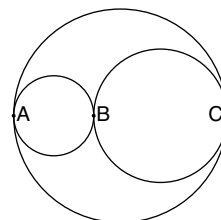
Во втором случае имеем  $7i + 11j = 34$ . Если  $j \geq 3$ , то  $i < 1$ . При  $j = 1$  число  $34 - 11 \cdot 1 = 23$  не делится на 7.

Наконец, при  $k = 1$  имеем  $7i + 11j = 68$ . Для  $j = 5, 3, 1$  получим  $7i = 13, 35, 57$ , откуда  $j = 3, i = 35 : 7 = 5$ , а пройденный путь равен  $15 \cdot 5 + 25 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 190$  (км). Здесь  $40 = 15 + 25$  — длина дуги  $AC$ , которую находим геометрически. ( $AC = \pi R = \pi(r_1 + r_2) = \pi r_1 + \pi r_2 = AB + BC$ , где  $R, r_1, r_2$  — радиусы.)

---

В-2

Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на  $180^\circ$ . По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так что любую из дуг  $AB$  длиной 15 км он проезжает за 5 минут, любую из



дуг  $BC$  длиной 25 км — за 13 минут, а любую из дуг  $AC$  — за 19 минут. Выехав из точки  $A$ , автомобиль через 1 час 35 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?

**Ответ:** 220

---

### В-3

Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на  $180^\circ$ . По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так что любую из дуг  $AB$  длиной 13 км он проезжает за 7 минут, любую из дуг  $BC$  длиной 21 км — за 11 минут, а любую из дуг  $AC$  — за 17 минут. Выехав из точки  $A$ , автомобиль через 1 час 25 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?

**Ответ:** 162

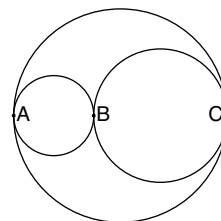
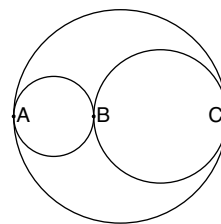
---

### В-4

Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на  $180^\circ$ . По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так что любую из дуг  $AB$  длиной 13 км он проезжает за 5 минут, любую из дуг  $BC$  длиной 27 км — за 13 минут, а любую из дуг  $AC$  — за 19 минут. Выехав из точки  $A$ , автомобиль через 1 час 35 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?

**Ответ:** 212

---



**Задача 5**

**В-1** Функция  $y = f(x)$  такова, что  $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}$ . Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции

$$g(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{10}$$

в точке  $x = 0$ .

**Ответ:**  $\frac{1}{1024}$

**Решение.** Сделаем замену переменных  $t = \frac{x+1}{x-1}$ . Тогда  $x = \frac{t+1}{t-1} \Rightarrow x-1 = \frac{2}{t-1} \Rightarrow f(t) = \frac{t-1}{2}$

То есть, нам дана функция  $f(x) = \frac{x-1}{2}$ . Тогда будем иметь

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = \frac{x-3}{4}.$$

Далее, получим

$$f(f(f(x))) = \frac{\frac{x-3}{4} - 1}{2} = \frac{x-7}{8}.$$

И так далее

$$f(f(f(f(x)))) = \frac{\frac{x-7}{8} - 1}{2} = \frac{x-15}{16};$$

$$\underbrace{f(f(\dots f(x)))}_n = \frac{x - 2^n + 1}{2^n}.$$

Точное обоснование легко получить методом математической индукции

$$\underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{k+1} = \frac{\frac{x-2^k+1}{2} - 2^{k-1}}{2^k} = \frac{x - 2^{k+1} + 1}{2^{k+1}}.$$

угловый коэффициент наклона прямой равен  $\frac{1}{2^n}$ , значит при  $n = 10$  будем иметь  $\frac{1}{1024}$

---

**В-2** Функция  $y = f(x)$  такова, что  $f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$ . Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции

$$g(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{11}$$

в точке  $x = 0$ .

**Ответ:**  $\frac{1}{2048}$

---

**В-3** Функция  $y = f(x)$  такова, что  $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}$ . Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции

$$g(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_9$$

в точке  $x = 0$ .

**Ответ:**  $\frac{1}{512}$

---

**В-4** Функция  $y = f(x)$  такова, что  $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$ . Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции

$$g(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{12}$$

в точке  $x = 0$ .

**Ответ:**  $\frac{1}{4096}$

---

### Задача 6

**В-1** Старинный подземный ход имеет свод параболической формы (то есть в поперечном сечении туннель ограничен полом — осью  $Ox$  и графиком некоторой параболы  $y = a - bx^2$ ). Ширина туннеля (измеряется по полу) равна 24, высота туннеля равна 18. Ход укрепили распорками — на параболе отметили точки  $A, B, C, D$  и соединили их между собой балками. Балки  $AB$  и  $CD$  параллельны полу,  $AD$  пересекается с  $BC$ , и при этом  $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ . Найдите расстояние между балками  $AB$  и  $CD$ .

**Ответ:** 8

**Решение.** Допустим, ширина тоннеля равна  $2l$ , а высота равна  $h$ . Из этих параметров однозначно выводятся параметры параболы:  $x$  принадлежит отрезку  $[-l, l]$ , а  $y(l) = y(-l) = 0$ , так что

$$y(x) = h - \frac{hx^2}{l^2}.$$

Теперь зададим координаты точек так:

$$A = \left(x_1, h \left(1 - \frac{x_1^2}{l^2}\right)\right), B = \left(-x_1, h \left(1 - \frac{x_1^2}{l^2}\right)\right), C = \left(x_2, h \left(1 - \frac{x_2^2}{l^2}\right)\right), D = \left(-x_2, h \left(1 - \frac{x_2^2}{l^2}\right)\right)$$

Так как  $AB$  и  $CD$  параллельны полу, понятно, что ординаты  $A$  и  $B$  одинаковы, значит, абсциссы отличаются только знаком. Аналогично для  $C$  и  $D$ .

Тогда перпендикулярность  $AC$  и  $CB$ ,  $AD$  и  $DB$  можно выразить, например, через равенство нулю скалярных произведений. Достаточно рассмотреть одну пару, так как рисунок симметричен.

$$AC = \left(x_2 - x_1, \frac{h}{l^2}(x_1^2 - x_2^2)\right), \quad CB = \left(-x_1 - x_2, \frac{h}{l^2}(x_2^2 - x_1^2)\right)$$

$$AC \cdot CB = -(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - \frac{h^2}{l^4}(x_2^2 - x_1^2)^2 = -(x_2^2 - x_1^2) - \frac{h^2}{l^4}(x_2^2 - x_1^2)^2 = 0$$

Выносим множитель:

$$-(x_2^2 - x_1^2) \left( \frac{h^2}{l^4}(x_2^2 - x_1^2) + 1 \right) = 0$$

То есть либо  $(x_2^2 - x_1^2) = 0$  (но балки не совпадают, поэтому такой вариант не пойдёт), либо

$$(x_2^2 - x_1^2) = -\frac{l^4}{h^2}.$$

А расстояние между балками — это

$$\left| \frac{h}{l^2}(x_2^2 - x_1^2) \right|,$$

или, после подстановки,

$$\frac{l^2}{h}.$$

**В-2** Старинный подземный ход имеет свод параболической формы (то есть в поперечном сечении туннель ограничен полом — осью  $Ox$  и графиком некоторой параболы  $y = a - bx^2$ ). Ширина туннеля (измеряется по полу) равна 16, высота туннеля равна 8. Ход укрепили распорками — на параболе отметили точки  $A, B, C, D$  и соединили их между собой балками. Балки

$AB$  и  $CD$  параллельны полу,  $AD$  пересекается с  $BC$ , и при этом  $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$  Найдите расстояние между балками  $AB$  и  $CD$ .

**Ответ:** 8

---

**В-3** Старинный подземный ход имеет свод параболической формы (то есть в поперечном сечении туннель ограничен полом — осью  $Ox$  и графиком некоторой параболы  $y = a - bx^2$ ). Ширина туннеля (измеряется по полу) равна 20, высота туннеля равна 10. Ход укрепили распорками — на параболе отметили точки  $A, B, C, D$  и соединили их между собой балками. Балки  $AB$  и  $CD$  параллельны полу,  $AD$  пересекается с  $BC$ , и при этом  $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$  Найдите расстояние между балками  $AB$  и  $CD$ .

**Ответ:** 10

---

**В-4** Старинный подземный ход имеет свод параболической формы (то есть в поперечном сечении туннель ограничен полом — осью  $Ox$  и графиком некоторой параболы  $y = a - bx^2$ ). Ширина туннеля (измеряется по полу) равна 18, высота туннеля равна 9. Ход укрепили распорками — на параболе отметили точки  $A, B, C, D$  и соединили их между собой балками. Балки  $AB$  и  $CD$  параллельны полу,  $AD$  пересекается с  $BC$ , и при этом  $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$  Найдите расстояние между балками  $AB$  и  $CD$ .

**Ответ:** 9

---

### Задача 7

**В-1** Пусть  $S(n)$  означает сумму цифр натурального числа  $n$ . Найти наибольшее 100-значное натуральное число  $n$ , удовлетворяющее условию: для всех натуральных  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) справедливы равенства  $S(mn) = S(n)$ .

**Ответ:**  $n = 10^{100} - 1$ .

**Решение.** Найдем все натуральные числа  $n$  с таким свойством. Среди однозначных чисел таким свойством, очевидно, обладает  $n = 1$ , и несложно проверить, что  $n = 9$  также обладает таким свойством.

Пусть  $n$  —  $k$ -разрядное число ( $k \geq 2$ ). Тогда  $10^{k-1} \leq n < 10^k - 1$ . Очевидно, что число вида  $10^{k-1}$  не обладает этим свойством. Рассмотрим  $n \geq 10^{k-1} + 1$ . Тогда для  $m = 10^{k-1} + 1 \leq n$  должно выполняться равенство

$$S(mn) = S((10^{k-1} + 1)n) = S(n).$$

Пусть  $a$  — старшая цифра числа  $n$  ( $a = \lfloor \frac{n}{10^{k-1}} \rfloor$ ). Тогда

$$S((10^{k-1} + 1)n) = S(n + a) + S(n) - a$$

и равенство  $S((10^{k-1} + 1)n) = S(n)$  возможно только если  $S(n + a) = a$ . Так как у  $n$  цифра  $a$  уже стоит в старшем разряде, это возможно только если число  $n + a$  переходит в следующий разряд, т.е. имеет вид  $10^k - b$  ( $1 \leq b \leq 9$ ). Так как  $S(2n) = S(n)$ , то  $S(2n)$  и  $S(n)$  имеют одинаковый остаток при делении на 9, а значит  $n$  делится на 9.

Несложно проверить, что для  $n = 10^k - 1$  выполнено  $S(mn) = S(n) = 9k$ .

---

**В-2** Пусть  $S(n)$  означает сумму цифр натурального числа  $n$ . Найти наибольшее 75-значное натуральное число  $n$ , удовлетворяющее условию: для всех натуральных  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) справедливы равенства  $S(mn) = S(n)$ .

**Ответ:**  $n = 10^{75} - 1$ .

---

**В-3** Пусть  $S(n)$  означает сумму цифр натурального числа  $n$ . Найти наибольшее 85-значное натуральное число  $n$ , удовлетворяющее условию: для всех натуральных  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) справедливы равенства  $S(mn) = S(n)$ .

**Ответ:**  $n = 10^{85} - 1$ .

---

**В-4** Пусть  $S(n)$  означает сумму цифр натурального числа  $n$ . Найти наибольшее 90-значное натуральное число  $n$ , удовлетворяющее условию: для всех натуральных  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) справедливы равенства  $S(mn) = S(n)$ .

**Ответ:**  $n = 10^{90} - 1$ .

---

### Задача 8

**В-1** Сколько точек пространства с целочисленными координатами принадлежат треугольнику с вершинами  $(3, 4, 5)$ ,  $(11, 10, 6)$ ,  $(5, 8, 9)$ ? Точки на вершинах и сторонах тоже считаются.

**Ответ:** 8

**Решение.** Перенесём треугольник одной вершиной в начало координат. Тогда его можно представлять как точку  $(0, 0, 0)$ , из которой выходят вектора  $u = (8, 6, 1)$  и  $v = (2, 4, 4)$  (аналогичные вектора во всех вариантах, отличаются перестановкой координат).

Тогда внутренность треугольника можно представить как  $\lambda u + \mu v$ , где  $\lambda, \mu$  — действительные числа,  $\lambda, \mu > 0$ , и  $\lambda + \mu < 1$ . Вопрос о целых точках на треугольнике, получается, стоит так: при каких целых  $n, m, k$  система

$$\begin{cases} 8\lambda + 2\mu = n, \\ 6\lambda + 4\mu = m, \\ \lambda + 4\mu = k. \end{cases}$$

имеет решения  $\lambda, \mu$ , укладывающиеся в требования выше.

Мы выделили внутренность, потому что стороны легче рассмотреть отдельно. Три целочисленные вершины лежат в треугольнике по определению. На сторонах точки подсчитать тоже просто — стороны это вектора  $u = (8, 6, 1)$ ,  $v = (2, 4, 4)$ , и третья сторона  $(6, 2, -3)$ . Получить целочисленную точку можно только на середине вектора  $v$ , а у остальных сторон нет общих делителей координат, и через целые точки они не проходят. Значит, на периметре лежат  $3+1=4$  точки.

Переходим к внутренней части треугольника. Вообще, конечно, нет гарантий, что там будет хотя бы одна целочисленная точка — но если такая есть, то её проекции на координатные плоскости тоже будут целочисленные. Поэтому давайте рассмотрим проекцию треугольника на плоскость  $Oxy$ , и отберём на ней потенциально подходящие пары  $(n, m)$ , а после выкинем лишние.

Вообще проецировать треугольник можно на разные плоскости, и наш выбор определяется тем, на какой из них точек будет меньше.

Проецируем треугольник на  $Oxy$  — получается треугольник на плоскости с вершинами  $(0,0)$ ,  $(8,6)$ ,  $(2,4)$ . Внутри него точки попадут такие:  $(1,1)$ ,  $(2,2)$ ,  $(2,3)$ ,  $(3,3)$ ,  $(3,4)$ ,  $(4,4)$ ,  $(5,4)$ ,  $(6,5)$ .

Решаем систему, состоящую из двух первых уравнений:

$$\begin{cases} 8\lambda + 2\mu = n, \\ 6\lambda + 4\mu = m. \end{cases}$$

Ответ будет такой:

$$\lambda = \frac{2n - m}{10}, \quad \mu = \frac{-3n + 4m}{10}.$$

Полученные значения  $\lambda, \mu$  подставляются в третье уравнение  $\lambda + 4\mu = k$ , и если  $k$  оказывается целым — точка найдена. После подстановки получается выражение

$$-n + \frac{3}{2}m = k,$$

то есть  $m$  должна быть чётной. Из 8 кандидатов подойдут только 4:

$$(2, 2) \Rightarrow k = 1,$$

$$(3, 4) \Rightarrow k = 3,$$

$$(4, 4) \Rightarrow k = 2,$$

$$(5, 4) \Rightarrow k = 1.$$

Плюс 4 точки, и всего точек на треугольнике  $4 + 4 = 8$ .

---

**В-2** Сколько точек пространства с целочисленными координатами принадлежат треугольнику с вершинами  $(-7, 4, 3)$ ,  $(1, 5, 9)$ ,  $(-5, 8, 7)$ ? Точки на вершинах и сторонах тоже считаются.

**Ответ:** 8

---

**В-3** Сколько точек пространства с целочисленными координатами принадлежат треугольнику с вершинами  $(-5, -5, -5)$ ,  $(1, 3, -4)$ ,  $(-1, -3, -1)$ ? Точки на вершинах и сторонах тоже считаются.

**Ответ:** 8

---

**В-4** Сколько точек пространства с целочисленными координатами принадлежат треугольнику с вершинами  $(1, 1, 3)$ ,  $(7, 2, 11)$ ,  $(5, 5, 5)$ ? Точки на вершинах и сторонах тоже считаются.

**Ответ:** 8

---

**Олимпиада школьников «Ломоносов», математика**  
**Заключительный этап 2023/2024 учебного года**  
**Баллы за верные решения заданий**

<b>Номер задания</b>	<b>5-6 классы*</b>	<b>7-8 классы*</b>	<b>9 класс*</b>	<b>10 класс**</b>	<b>11 класс**</b>
<b>1</b>	18	15	15	12	12
<b>2</b>	18	15	15	12	12
<b>3</b>	18	15	15	12	12
<b>4</b>	18	15	15	12	12
<b>5</b>	18	15	15	12	12
<b>6</b>	18	15	15	12	12
<b>7</b>	—	15	15	12	12
<b>8</b>	—	—	—	12	12

\*) Если сумма баллов по задачам за работу превышает 100, выставляется оценка 100.

\*\*) Если сумма баллов по задачам за работу равна 96, выставляется оценка 100.