

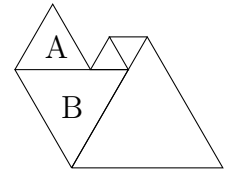
**Задача 1**

**В-1**

Каждый треугольник на этом рисунке имеет равные стороны. Периметр (сумма всех сторон) треугольника  $A$  равен 6, периметр  $B$  равен 9. Какой периметр (сумма всех внешних границ) у всей фигуры?

**Ответ:** 17

**Решение.**



Сторона треугольника  $A$  равна 2 (делим периметр  $A$  на три), сторона треугольника  $B$  равна 3, сторона маленького треугольника равна  $3 - 2 = 1$ , сторона большого равна  $3 + 1 = 4$ . Периметр всей фигуры равен  $4 + 4 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 17$

---

### Задача 2

**В-1** На 5 квадратных дощечках написано по одной букве, из которых составлено слово «АКУЛА». Сколько можно составить из этих дощечек различных 4-буквенных слов (возможно, бессмысленных или непронизносимых)?

**Ответ:** 60

**Решение.** Давайте посмотрим, сколькими способами можно расставить эти дощечки в пятибуквенное слово.

На первом месте может быть одна из 5 дощечек, на втором — одна из оставшихся четырёх, на третьем — одна из трёх, на четвёртом — одна из двух, и на пятое место остаётся только одна. Всего  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  вариантов.

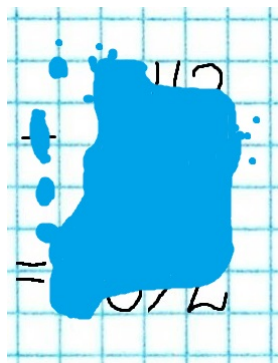
Так как после четырёх дощечек пятую выбирать уже не из чего, и ставится она однозначно — можно считать, что число четырёхбуквенных слов равно числу пятибуквенных.

Только мы насчитали больше слов, чем надо, потому что дощечки с буквами А считались разными, но буквы на них одинаковые. Если поменять местами дощечки с буквами А, слово не изменится — но изменится расстановка досок. Получается, что одно и то же слово описывается двумя разными расстановками дощечек. Значит, мы насчитали вдвое больше слов, чем надо, и ответ равен  $60 = \frac{120}{2}$ .

---

### Задача 3

**В-1** Учитель залил синими чернилами арифметический пример «в столбик», в котором ни одна из цифр не повторялась. Восстановите его. Высота цифр — 2 клетки.



**Ответ:**  $743 - 51 = 692$

**Решение.** Шаги решения давайте записывать в строчку, где на неизвестных позициях стоит кружок.

Пока даже непонятно, это пример на сложение, или на вычитание. Можно утверждать, что снизу справа стоит двойка, потому что ни у какой другой цифры нет похожих очертаний.

$$\bullet \bullet \bullet \pm \bullet \bullet \bullet = \bullet \bullet \bullet 2$$

Теперь становится понятна цифра в правом верхнем углу — загибающийся налево крючок есть только у 2 и 3, а 2 уже нашлась. Значит, там стоит 3. Также две торчащие вверх чёрточки однозначно выдают 4 (в написании «Ч») перед цифрой 3.

$$\bullet 43 \pm \bullet \bullet \bullet = \bullet \bullet \bullet 2$$

Либо это пример на сложение, либо на вычитание. Если это пример на сложение, то получить двойку мы могли, только прибавив к 3 девятку. То есть:

$$\bullet 43 + \bullet \bullet 9 = \bullet \bullet \bullet 2$$

Посмотрим на цифру около двойки. Из доступных нам цифр такой торчащий вниз под углом хвостик может быть только у семёрки.  $\bullet 43 + \bullet \bullet 9 = \bullet \bullet 72$ . Но в этом случае под 4 придётся написать 2, которая уже была — противоречие показывает, что пример был на вычитание.

То, что в нижнем ряду клякса достаточно широка, чтобы накрыть 4 цифры (а вычитанием из трёхзначного числа четырёхзначного не получить) — ничего не доказывает, под кляксой вполне может быть пустое место. Число снизу, получается, трёхзначное.

Возвращаемся назад. Значит, пример на вычитание:

$$\bullet 43 - \bullet \bullet \bullet = \bullet \bullet 2$$

Чтобы получить 2, мы вычитали 1.

$$\bullet 43 - \bullet \bullet 1 = \bullet \bullet 2$$

Какая цифра стоит около двойки, в нижней строке? Судя по хвостику — либо 9, либо 7. Но чтобы получить 7, нам бы пришлось вычесть из 4 другую 7, получается повтор цифры. Значит, там была 9.

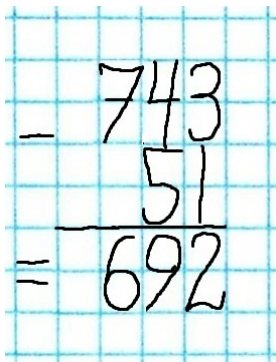
$$\bullet 43 - \bullet \bullet 1 = \bullet 92$$

Сладовательно, из 4 вычиталась 5.

$$\bullet 43 - \bullet 51 = \bullet 92$$

Из цифр оставили только 0, 6, 7, 8. Около девятки что-то стоит — судя по закруглению, это либо 0, либо 6, либо 8. 0 мог бы быть, если снизу у нас четырёхзначное число, но в примере на вычитание мы бы его получить не смогли (верхняя строка точно трёхзначная). Если около 9 стоит 8, то её неоткуда получить. Остаётся 6, и для получения 6 мы вынуждены поставить 7 перед 4, а все остальные клетки признать незанятыми.

$$743 - 51 = 692$$


$$\begin{array}{r} 743 \\ - 51 \\ \hline = 692 \end{array}$$

Вот пример, каким он был до кляксы.

*Примечание:* если участник по форме хвостика решит, что около двойки может стоять 5, и придёт к какому-нибудь из перечисленных решений:  $743 + 109 = 852$ ,  $743 - 91 = 652$ ,  $143 + 709 = 852$  — такое решение тоже стоит принять.

---

### Задача 4

**В-1**

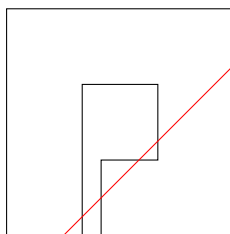
На бумаге закрашена фигура указанной формы. Бумагу разрезают по прямой. Как сделать разрез, чтобы у получившихся кусков фигуры было как можно больше углов? В ответе приведите чертёж, а также укажите это максимальное число углов.

Пропорции рисунка: квадрат имеет размеры 3 на 3, квадратный вырез размеров 1 на 1, расположен ровно посередине, к нему ведёт прорезь шириной 0.25.



**Ответ:** 22

**Решение.** Мы получаем новые углы, когда разрез проходит через отрезки, так что самый выгодный разрез проходит через наибольшее число отрезков. Вот пример разреза, когда прямая проходит через 6 отрезков (возможны и другие примеры разреза, проходящего через 6 отрезков).



После такого разреза можно насчитать  $3 + 3 + 9 + 7 = 22$  угла.

---

### Задача 5

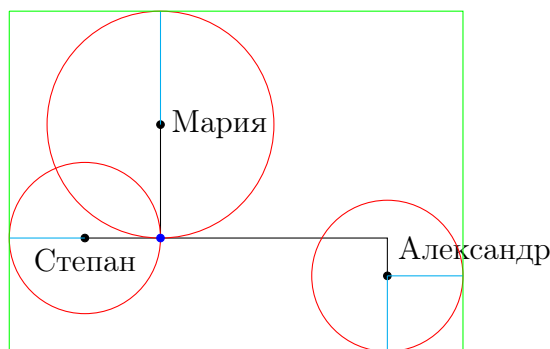
**В-1** На большой квадратной кровати (3 на 3 метра) отдыхали три мыши — Мария, Степан и Александр. Сначала они сидели ровно посередине кровати, но потом расползлись — Мария отползла на 30 сантиметров прямо, к изголовью, Степан — на 20 сантиметров налево, а нелюбимый Александр отошёл на 60 сантиметров направо и потом на 10 сантиметров прочь от изголовья.

Тем временем хозяин кровати хочет разом накрыть всех трёх мышей прямоугольным одеялом (стороны одеяла параллельны сторонам кровати). Но мышей не застать врасплох, они заметят одеяло и побегут, каждая — в случайном направлении. Пока одеяло падает, Степан и Александр успеют пробежать по 20 сантиметров, а шустрая Мария пробежит 30 сантиметров.

Найдите минимальные размеры одеяла, которым можно гарантированно накрыть всех троих.

**Ответ:** 120 сантиметров в ширину, 90 сантиметров в высоту

**Решение.** Нарисуем мышей и места, где они могут оказаться. Кровать достаточно большая, чтобы вместить такой рисунок целиком, поэтому края кровати рисовать не будем. Синяя точка — середина кровати, где мыши сидели в самом начале. Чёрные линии показывают маршрут перемещений мышей. Красные круги — места, куда мыши могут успеть добежать, пока летит одеяло (одеяло должно накрыть все красные точки рисунка). Зелёным изображены очертания одеяла.



Габариты одеяла = 120 сантиметров в ширину  $(20 + 20 + 60 + 20)$  и 90 сантиметров в высоту  $(30 + 30 + 10 + 20)$ .

### Задача 6

**В-1** Выпускники класса договорились встретиться в актовом зале школы в определённый день. На встречу пришли 4 человека. Каждый из них пришёл в какой-то момент, пробыл в зале некоторое время и ушёл. Известно, что в зале каждый смог поздороваться за руку с каждым.

а) Значит ли это, что в какой-то момент времени в зале были все четверо сразу?

б) Те же условия, но ровно один из гостей выходил подышать воздухом на 5 минут. А теперь можно ли утверждать, что в какой-то момент времени в зале были все четверо сразу?

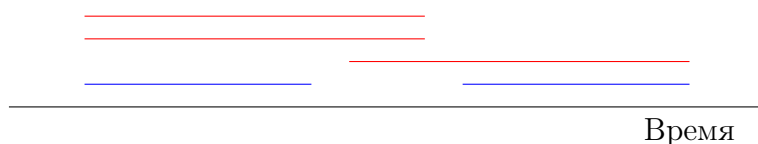
**Ответ:** а) да; б) нет.

**Решение.** а) Давайте посмотрим на моменты, когда приходили и уходили люди. Значит, в зал 4 раза входили и из него 4 раза выходили (причём эти события не обязательно происходят подряд). Пусть  $t_1$  — последний раз, когда в зал кто-то входил, а  $t_2$  — первый раз, когда из зала кто-то уходил. Без дополнительных условий  $t_1$  и  $t_2$  могли бы быть расположены во времени как угодно, однако в этой задаче оказывается, что  $t_1 < t_2$ . Почему?

- Если в  $t_1$  и  $t_2$  приходил и уходил один и тот же человек, то, само собой,  $t_1 < t_2$ , потому что он бы не мог бы уйти до того, как сам пришёл.
- Если  $t_1$  и  $t_2$  принадлежат разным людям, то в случае, если  $t_2$  произошло до  $t_1$ , эти двое полностью разминутись бы по времени и не смогли бы пожать друг другу руки — а условие говорит обратное, каждый поздоровался с каждым. Значит, в этом случае тоже  $t_1 < t_2$ .

Так или иначе, получается  $t_1 < t_2$ , что значит, что между этими моментами все уже пришли, но никто ещё не ушёл. Между  $t_1$  и  $t_2$  в зале находились все четверо. Отметим, что такое рассуждение верно для любого количества гостей, не только для 4-х. Ответ в этом случае — «да».

б) Приведём пример, когда все гости друг с другом поздоровались, но одновременно всех застать не получилось. Изобразим присутствие гостей во времени графически. Синей линией — время присутствия того, кто выходил подышать (с перерывом в 5 минут), красными — остальных гостей. В те 5 минут, пока один из гостей выходил подышать, пришёл последний гость, а потом двое первых ушли.



Этот пример показывает, что в пункте б) ответ «нет».

*Примечание.* Участник может посчитать, что  $t_1 = t_2$ , что гости здоровались с кем-либо в тот же момент, как вошли или ушли. Такие ходы не влияют на правильность решения.

---

### Задача 1

**В-1** На 5 квадратных дощечках написано по одной букве, из которых составлено слово «АКУЛА». Сколько можно составить из этих дощечек различных 4-буквенных слов (возможно, бессмысленных или непронизносимых)?

**Ответ:** 60

**Решение.** Давайте посмотрим, сколькими способами можно расставить эти дощечки в пятибуквенное слово.

На первом месте может быть одна из 5 дощечек, на втором — одна из оставшихся четырёх, на третьем — одна из трёх, на четвёртом — одна из двух, и на пятое место остаётся только одна. Всего  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  вариантов.

Так как после четырёх дощечек пятую выбирать уже не из чего, и ставится она однозначно — можно считать, что число четырёхбуквенных слов равно числу пятибуквенных.

Только мы насчитали больше слов, чем надо, потому что дощечки с буквами А считались разными, но буквы на них одинаковые. Если поменять местами дощечки с буквами А, слово не изменится — но изменится расстановка досок. Получается, что одно и то же слово описывается двумя разными расстановками дощечек. Значит, мы насчитали вдвое больше слов, чем надо, и ответ равен  $60 = \frac{120}{2}$ .

---

### Задача 2

**В-1** Бросается стандартная игральная кость (кубик, от 1 до 6 очков на грани, сумма очков на противоположных гранях равна семи). После броска записываем результат, перекатываем кубик случайным образом на одну из соседних граней, записываем новый результат, потом снова случайно перекатываем кубик на одну из соседних граней, и записываем третий результат.

Сколько разных возрастающих последовательностей очков мы можем получить?

**Ответ:** 14

**Решение.** Мы получаем последовательность цифр  $x - y - z$  с цифрами от 1 до 6. Возможна не каждая последовательность — числа с каждым ходом меняются, при этом невозможны соседства 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4, так как они располагаются на противоположных гранях, и одним перекатом между ними не перейти. Выпишем и подсчитаем все возрастающие последовательности чисел, подходящие под такие условия.

4-5-6

3-5-6

2-3-5

2-3-6

2-4-5

2-4-6

1-2-3

1-2-4

1-2-6

1-3-5

1-3-6

1-4-5

1-4-6

1-5-6

Всего их 14.

---

### Задача 3

В-1

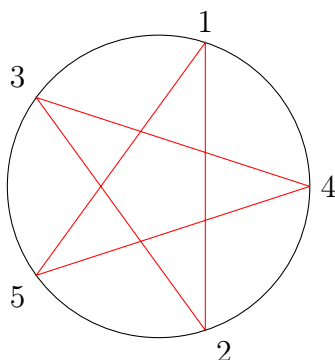
Пять светлячков с лазерными указками ползают по окружности, каждый — с постоянной скоростью. Первый за пять минут успевает проползти три круга, второй движется вдвое быстрее первого, третий — втрое быстрее первого, и так далее. Каждый светлячок не сводит луча своей лазерной указки со следующего по номеру жука, а пятый светлячок светит на первого. Все они начали ползти из одной точки в одну сторону. Через какое время лучи лазерных указок в первый раз изобразят правильную «звезду» (неважно как повернутую, но с вершинами на одинаковом расстоянии)?



**Ответ:** 40 секунд.

**Решение.** Скорость  $v$  первого жука равна трём пятым окружности в минуту. Так как поворот звёздочки нам не важен, можно считать, что первый жук стоит на месте, а у остальных скорости на  $v$  меньше:  $0, v, 2v, 3v, 4v$ .

Для того, чтобы получилась звёздочка, нужно, чтобы второй жук обгонял первого на целое число оборотов  $n_1$  плюс две пятых оборота, чтобы третий обгонял первого на целое число оборотов  $n_2$  плюс четыре пятых, четвёртый обгонял первого на целое число оборотов  $n_3$  плюс одна пятая, а пятый обгонял первого на целое число оборотов  $n_4$  плюс три пятых. Также годится зеркальный аналог этой расстановки.



Иными словами, в момент времени  $t$  выполнено

$$\begin{cases} vt = n_1 + 2/5 \\ 2vt = n_2 + 4/5 \\ 3vt = n_3 + 1/5 \\ 4vt = n_4 + 3/5. \end{cases}$$

Подставим  $v$ , равную  $3/5$  оборота в минуту, и домножим каждое уравнение на 5.

$$\begin{cases} 3t = 5n_1 + 2 \\ 2 \cdot 3t = 5n_2 + 4 \\ 3 \cdot 3t = 5n_3 + 1 \\ 4 \cdot 3t = 5n_4 + 3. \end{cases}$$

По первому уравнению видно, что  $3t$  — целое число. Попробуем его подобрать.  $3t = 0, 1$  не подходят, а вот  $3t = 2$  годится:  $2 = 5 \cdot 0 + 2, 2 \cdot 2 = 5 \cdot 0 + 4, 3 \cdot 2 = 5 + 1, 4 \cdot 2 = 5 + 3$ . Если рассмотреть зеркальную расстановку, получится  $3t = 3$ , но  $3 > 2$ , оставляем 2. Значит, время  $t = \frac{2}{3}$  минуты, то есть 40 секунд.

---

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2023/24 учебного года для 7–8 класса

---

Задача 4

**В-1** Попугай решил измерить Удава. Если Попугай идет клювом вперед, то длина его шага равна  $X = 9$  см, а если спиной вперед — то в  $Y = 3$  раз меньше. Чтобы измерить Удава, Попугай прошагал вдоль него в направлении от хвоста до головы, идя то клювом вперед, то спиной. При этом Попугай насчитал  $Z = 38$  шагов. Затем он прошел обратно, от головы до хвоста, и насчитал то ли  $T = 40$ , то ли  $T+1 = 41$  шагов. Однако наблюдавшая за ним Мартышка сказала, что всего шагов, которые Попугай прошел клювом вперед, было  $R = 59$ . Какова длина Удава?

**Ответ:** 294 см.

**Решение.** Пусть Попугай прошел  $m_1$  шагов клювом вперед, а  $n_1$  шагов — спиной вперёд, когда шел от хвоста до головы. И пусть, соответственно,  $m_2$  шагов клювом вперед, а  $n_2$  шагов — спиной вперёд, когда шел обратно. Из условия имеем равенства  $9m_1 + 3n_1 = 9m_2 + 3n_2$ ,  $m_1 + n_1 = 38$ ,  $m_1 + m_2 = 59$ ,  $m_2 + n_2 = 40$  или  $41$ . Если во второй раз Попугай прошел 41 шаг, то при решении системы уравнений сверху получаются нецелые значения для  $m_1, n_1, m_2, n_2$ , чего не может быть. Значит, во второй раз он прошел 40 шагов. Решая указанную систему, получаем  $m_1 = 30, n_1 = 8, m_2 = 29, n_2 = 11$ . Откуда длина Удава равна  $9 \cdot 30 + 3 \cdot 8 = 294$  см.

Систему можно решить, например, так. Пусть  $m_2 + n_2 = x$ . Выразим  $m_1$  из равенства  $m_1 + m_2 = 59$  и подставим найденное значение в остальные уравнения. Получим:

$$3(59 - m_2) + n_1 = 3m_2 + n_2, \quad 59 - m_2 + n_1 = 38, \quad m_2 + n_2 = x.$$

Далее, выразим  $m_2$  из равенства  $59 - m_2 + n_1 = 38$  и подставим найденное значение в остальные уравнения. Получим:

$$3(59 - (21 + n_1)) + n_1 = 3(21 + n_1) + n_2, \quad 21 + n_1 + n_2 = x.$$

Из первого равенства находим  $n_2 = 51 - 5n_1$ . Подставляя данное значение в оставшееся уравнения, получаем  $21 + n_1 + 51 - 5n_1 = x$ , откуда  $n_1 = \frac{72-x}{4}$ . Значение  $x = 41$  не подходит, поскольку число  $\frac{31}{4}$  нецелое. Значит,  $x = 40$ , откуда  $n_1 = 8, n_2 = 51 - 5n_1 = 11, m_2 = 21 + n_1 = 29, m_1 = 59 - m_2 = 30$ .

---

### Задача 5

В-1

На бумаге закрашена фигура указанной формы. Бумагу складывают пополам, потом сложенную бумагу разрезают по прямой. Затем все куски разворачиваются. Где провести сгиб и как сделать разрез, чтобы у получившихся кусков фигуры было как можно больше углов? В ответе приведите чертёж, а также укажите это максимальное число углов.



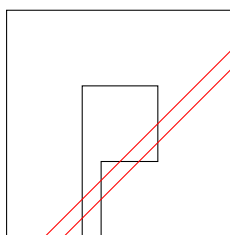
Пропорции рисунка: квадрат имеет размеры 3 на 3, квадратный вырез размеров 1 на 1, расположен ровно посередине, к нему ведёт прорезь шириной 0.25.

**Ответ:** 34

**Решение.** Мы получаем новые углы, когда разрез проходит через отрезки, так что самый выгодный разрез проходит через наибольшее число отрезков. Сгиб и разрезание на самом деле аналогичны разрезанию по двум параллельным прямым (сгиб расположен параллельно разрезам посередине между ними), или разрезанию по двум лучам, выходящим из одной точки (сгиб — это биссектриса такого угла). Сам «угол» из двух лучей тоже может добавить углов на нарезанных фигурках, но здесь нам будет выгоднее провести две параллельные.

Вот пример разрезания, на котором каждый разрез проходит через 6 отрезков.

Рисунок не единственный, а в ответе не обязательно должны быть параллельные разрезы — но нужно, чтобы разрез и его «отражение» проходили через 6 отрезков каждый.



С такими разрезами мы насчитаем  $3 + 4 + 3 + 4 + 4 + 9 + 7 = 34$  угла.

---

### Задача 6

**В-1** В кино пришли 5 девочек, 3 мальчика и учительница. Все они расселись в первом ряду, в котором места пронумерованы от 1 до 10. По пути в кинотеатр 5 девочек начали активно общаться, и учительница решила, что сажать их рядом небезопасно. Между любыми двумя девочками должно быть минимум одно место: или незанятое, или занятое мальчиком или учительницей. Сколько различных способов рассадки имеется? (Два способа отличаются, если хотя бы один из участников группы сидит на местах с разными номерами.)

**Ответ:** 86400

**Решение.** Обозначим девочек буквой Д (таких букв 5). Между буквами Д должен быть какой-то из «разделителей» (или больше одного разделителя): или мальчик, или учительница, или свободное место. Обозначим разделитель буквой Р – таких букв  $3 + 1 + 1 = 5$ . Расположим девочек слева направо и расположим между ними по одному разделителю: Д – Р – Д – Р – Д – Р – Д – Р – Д. В результате останется вставить еще одну букву Р. Это можно сделать 6 способами (получаются варианты типа Р – Д – Р – Д – Р – Д – Р – Д – Р – Д, Д – Р – Д – Р – Д – Р – Р – Д – Р – Д и т. п.). В каждом из указанных вариантов так как все девочки – разные, и все «разделители» разные, есть  $5! \cdot 5!$  способов переставить их местами, оставаясь в рамках данного варианта. Таким образом, количество способов рассадки равно:  $6 \cdot 5! \cdot 5! = 6 \cdot 120^2 = 86400$ .

---

### Задача 7

**В-1** Расположите числа по возрастанию:

$$A = \frac{\overbrace{1111 \dots 1110}^{2024}}{\underbrace{1111 \dots 1111}_{2024}}, \quad B = \frac{\overbrace{2222 \dots 2221}^{2024}}{\underbrace{2222 \dots 2223}_{2024}}, \quad C = \frac{\overbrace{3333 \dots 3331}^{2024}}{\underbrace{3333 \dots 3334}_{2024}}$$

**Ответ:**  $A < C < B$

**Решение.**

$$A = \frac{\overbrace{1111 \dots 1110}^{2024}}{\underbrace{1111 \dots 1111}_{2024}} = \frac{\overbrace{1111 \dots 1111}^{2024} - 1}{\underbrace{1111 \dots 1111}_{2024}} = 1 - \frac{1}{\underbrace{1111 \dots 1111}_{2024}}$$

$$B = \frac{\overbrace{2222 \dots 2221}^{2024}}{\underbrace{2222 \dots 2223}_{2024}} = \frac{\overbrace{2222 \dots 2223}^{2024} - 2}{\underbrace{2222 \dots 2223}_{2024}} = 1 - \frac{2}{\underbrace{2222 \dots 2223}_{2024}} = 1 - \frac{2}{\underbrace{2222 \dots 2222}_{2024} + 1} = 1 - \frac{1}{\underbrace{1111 \dots 1111}_{2024} + \frac{1}{2}}$$

$$C = \frac{\overbrace{3333 \dots 3331}^{2024}}{\underbrace{3333 \dots 3334}_{2024}} = \frac{\overbrace{3333 \dots 3334}^{2024} - 3}{\underbrace{3333 \dots 3334}_{2024}} = 1 - \frac{3}{\underbrace{3333 \dots 3334}_{2024}} = 1 - \frac{3}{\underbrace{3333 \dots 3333}_{2024} + 1} = 1 - \frac{1}{\underbrace{1111 \dots 1111}_{2024} + \frac{1}{3}}$$

Отсюда понятен ответ :  $A < C < B$ .

---

**Задача 1**

**В-1** Различные целые числа  $m$  и  $n$  таковы, что числа  $\left(\frac{1}{m} - 2\right)$  и  $\left(\frac{1}{n} - 2\right)$  являются корнями квадратного трехчлена  $x^2 + ax + b$  с целыми коэффициентами. Найти все возможные значения выражения  $a + b$ .

**Ответ:** 7

**Решение.** Числа  $\frac{1}{m} - 2$  и  $\frac{1}{n} - 2$  являются рациональными. По теореме Виета имеем:

$$\begin{aligned}\frac{1}{m} - 2 + \frac{1}{n} - 2 &= -a \in \mathbb{Z}; \\ \left(\frac{1}{m} - 2\right) \cdot \left(\frac{1}{n} - 2\right) &= b \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Из первого уравнения следует, что  $m + n = (4 - a)mn$ . Тогда из второго уравнения имеем:

$$\frac{1 - 2(m + n)}{mn} = b - 4, \Rightarrow \frac{1 - 2(4 - a)mn}{mn} = b - 4, \Rightarrow \frac{1}{mn} - 2(4 - a) = b - 4, \Rightarrow \frac{1}{mn} = b - 2a + 4 \in \mathbb{Z}.$$

Значит,  $mn = \pm 1$ , следовательно, так как они целые и различные, то либо  $m = 1, n = -1$ , либо  $m = -1, n = 1$ . То есть  $-3$  и  $-1$  — корни квадратного трехчлена. Тогда (по теореме Виета)  $a = 4, b = 3, a + b = 7$ .

---

### Задача 2

**В-1** Бросается стандартная игральная кость (кубик, от 1 до 6 очков на грани, сумма очков на противоположных гранях равна семи). После броска записываем результат, перекатываем кубик случайным образом на одну из соседних граней, записываем новый результат, потом снова случайно перекатываем кубик на одну из соседних граней, и записываем третий результат. Сколько разных возрастающих последовательностей очков мы можем получить?

**Ответ:** 14

**Решение.** Мы получаем последовательность цифр  $x - y - z$  с цифрами от 1 до 6. Возможна не каждая последовательность — числа с каждым ходом меняются, при этом невозможны соседства 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4, так как они располагаются на противоположных гранях, и одним перекатом между ними не перейти. Выпишем и подсчитаем все возрастающие последовательности чисел, подходящие под такие условия.

4-5-6

3-5-6

2-3-5

2-3-6

2-4-5

2-4-6

1-2-3

1-2-4

1-2-6

1-3-5

1-3-6

1-4-5

1-4-6

1-5-6

Всего их 14.

---

**Задача 3**

**В-1** Найдите минимальное значение выражения

$$\frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} + \frac{2ca - 2b^2 + 2b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c}, \quad a, b, c > 0.$$

**Ответ:** 3

**Решение.** Проведем цепочку упрощающих преобразований:

$$\frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} + \frac{2ca - 2b^2 + 2b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c} = \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c + 3$$

В соответствии с неравенством о среднем можно заметить, что

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq 2c; \quad \frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} \geq 2b; \quad \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a.$$

При этом равенства достигается при  $a = b = c$ .

Отсюда следует, что

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$$

Это значит, что минимум всего исходного выражения равен 3 и достигается при  $a = b = c$

---

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2023/24 учебного года для 9 класса

---

Задача 4

**В-1** В кино пришли 5 девочек, 3 мальчика и учительница. Все они расселись в первом ряду, в котором места пронумерованы от 1 до 10. По пути в кинотеатр 5 девочек начали активно общаться, и учительница решила, что сажать их рядом небезопасно. Между любыми двумя девочками должно быть минимум одно место: или незанятое, или занятое мальчиком или учительницей. Сколько различных способов рассадки имеется? (Два способа отличаются, если хотя бы один из участников группы сидит на местах с разными номерами.)

**Ответ:** 86400

**Решение.** Обозначим девочек буквой Д (таких букв 5). Между буквами Д должен быть какой-то из «разделителей» (или больше одного разделителя): или мальчик, или учительница, или свободное место. Обозначим разделитель буквой Р – таких букв  $3 + 1 + 1 = 5$ . Расположим девочек слева направо и расположим между ними по одному разделителю: Д – Р – Д – Р – Д – Р – Д – Р – Д. В результате останется вставить еще одну букву Р. Это можно сделать 6 способами (получаются варианты типа Р – Д – Р – Д – Р – Д – Р – Д – Р – Д, Д – Р – Д – Р – Д – Р – Р – Д – Р – Д и т. п.). В каждом из указанных вариантов так как все девочки – разные, и все «разделители» разные, есть  $5! \cdot 5!$  способов переставить их местами, оставаясь в рамках данного варианта. Таким образом, количество способов рассадки равно:  $6 \cdot 5! \cdot 5! = 6 \cdot 120^2 = 86400$ .

---

**Задача 5**

**В-1** На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  отмечены такие точки  $M$  и  $N$ , что  $\angle ABM = 15^\circ$ ,  $\angle MBN = 45^\circ$  и  $\angle NBC = 75^\circ$ , а сумма и произведение площадей треугольников  $ABM$  и  $NBC$  равны 5 и 3 соответственно. Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

**Ответ:** 6

**Решение.** Обозначив  $S = S_{\triangle ABC}$  и  $s = S_{\triangle MBN}$ , имеем

$$\begin{aligned} S - s &= S_{\triangle ABM} + S_{\triangle NBC} = 5, \quad Ss = \frac{1}{2}AB \cdot BC \sin(15^\circ + 45^\circ + 75^\circ) \cdot \frac{1}{2}MB \cdot NB \sin 45^\circ = \\ &= \frac{1}{8}AB \cdot BC \cdot MB \cdot NB = 2 \cdot \frac{1}{2}AB \cdot BM \sin 15^\circ \cdot \frac{1}{2}NB \cdot BC \sin 75^\circ = 2S_{\triangle ABM} \cdot S_{\triangle NBC} = 6, \end{aligned}$$

так как  $\sin(90^\circ + 45^\circ) \sin 45^\circ = \sin^2 45^\circ = \frac{1}{2}$  и  $\sin 15^\circ \sin 75^\circ = \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$ . Поэтому числа  $S$  и  $-s$  образуют пару корней квадратного трёхчлена  $\sigma^2 - 5\sigma - 6 = (\sigma - 6)(\sigma + 1)$ , откуда  $S = 6$ .

---

### Задача 6

**В-1** В кувшин залили 7 литров воды. Ровно через сутки в кувшин добавили 5 литров воды, и эту операцию повторяли каждые очередные сутки. В промежутках между доливаниями из кувшина успевали выпить ровно половину воды, имевшейся после предыдущей заливки.

а) Какого минимального объёма должен быть кувшин, чтобы он никогда не мог наполниться при данных условиях?

б) На какой день кувшин такого объёма впервые окажется наполнен не менее, чем на 99,9 процента?

**Ответ:** 10 литров, 10-й день.

**Решение.** Пусть в начале в кувшин налили  $b$  литров воды, по прошествии каждых суток оставалось  $100 \cdot q$  процентов имевшейся на начало суток воды, и доливалось  $c$  литров воды. Обозначим через  $a_k$  количество воды в кувшине после долива очередных  $c$  литров в  $k$ -тый день. Тогда

$$a_1 = b, \quad a_2 = qb + c, \quad a_3 = q^2b + qc + c, \quad \dots,$$

$$a_k = q^{k-1}b + q^{k-2}c + \dots + qc + c = q^{k-1}b + c \frac{1 - q^{k-1}}{1 - q} = \frac{c}{1 - q} + q^{k-1} \left( b - \frac{c}{1 - q} \right).$$

Таким образом, поскольку во всех задачах выполнено условие  $b - c(1 - q)^{-1} < 0$ ,  $q < 1$ , кувшин никогда не наполнится, если его объём будет не менее  $V = c(1 - q)^{-1}$  литров. В условиях задачи  $c = 5$ , а  $q = \frac{1}{2}$ , поэтому  $V = 10$ .

Ответом на второй вопрос задачи будет наименьшее натуральное решение неравенства

$$a_k \geq 0,999 \cdot V \Leftrightarrow V + q^{k-1}(b - V) \geq 0,999 \cdot V \Leftrightarrow k \geq 1 + \log_{q^{-1}} \frac{V - b}{V} 10^3.$$

То есть

$$k \geq 1 + \log_2 \frac{10 - 7}{10} 10^3 = 1 + \log_2 300$$

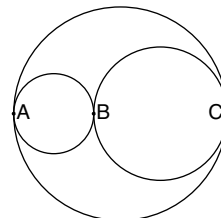
Такой логарифм больше 8, но меньше 9 (т.е.  $2^8 = 256 < 300 < 512 = 2^9$ ), так что  $k$  равно 10.

---

### Задача 7

В-1

Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на  $180^\circ$ . По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так что любую из дуг  $AB$  длиной 15 км он проезжает за 7 минут, любую из дуг  $BC$  длиной 25 км — за 11 минут, а любую из дуг  $AC$  — за 17 минут. Выехав из точки  $A$ , автомобиль через 1 час 25 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?



**Ответ:** 190

**Решение.** Рассмотрим варианты, которыми находящийся в точке  $A$  автомобиль может в следующий раз впервые снова оказаться в этой точке.

Во-первых, можно сделать это, не проходя через точку  $C$ , т. е. путем  $ABA$ .

Во-вторых, можно одним из двух способов ( $AC$  или  $ABC$ ) добраться до точки  $C$ , сделать несколько кругов  $CBC$  («несколько» может быть и нулем) и вернуться одним из двух способов ( $CA$  или  $CBA$ ) в точку  $A$ .

В любом случае мы либо четное число раз проезжаем по 7-минутной дуге, четное число раз по 11-минутной и четное число раз по 17-минутной, либо наоборот, нечетное число раз по каждому из трех типов дуг.

То же самое можно сказать про неоднократное возвращение в точку  $A$ .

«Четный» случай нам не подходит, так как по условию на каждую дугу уходит целое число минут, а общее время выражается в минутах нечетным числом.

Заметим, что любая тройка нечетных положительных чисел может быть реализована в качестве числа проходов (в любом направлении) дуг 1)  $AB$ , 2)  $BC$ , 3)  $AC$ . Действительно, выехав из точки  $A$  и сделав заданное нечетное число проходов  $AB$ , мы окажемся в точке  $B$ , после чего, сделав заданное нечетное число проходов  $BC$ , мы окажемся в точке  $C$ , а после заданного нечетного числа проходов  $AC$  — снова в точке  $A$ .

Итак, попробуем найти три таких нечетных положительных числа  $i, j, k$ , что

$$7i + 11j + 17k = 60 + 25 = 85.$$

Для  $k$  возможны 3 варианта: 5, 3, 1.

Первый случай отбрасываем, так как для него получаем  $i = j = 0$ .

Во втором случае имеем  $7i + 11j = 34$ . Если  $j \geq 3$ , то  $i < 1$ . При  $j = 1$  число  $34 - 11 \cdot 1 = 23$  не делится на 7.

Наконец, при  $k = 1$  имеем  $7i + 11j = 68$ . Для  $j = 5, 3, 1$  получим  $7i = 13, 35, 57$ , откуда  $j = 3, i = 35 : 7 = 5$ , а пройденный путь равен  $15 \cdot 5 + 25 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 190$  (км). Здесь  $40 = 15 + 25$  — длина дуги  $AC$ , которую находим геометрически. ( $AC = \pi R = \pi(r_1 + r_2) = \pi r_1 + \pi r_2 = AB + BC$ , где  $R, r_1, r_2$  — радиусы.)

---

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2023/24 учебного года для 10 класса

---

Задача 1

**В-1** Болельщики должны выбрать 6 лучших хоккеистов чемпионата: одного вратаря, двух защитников и трех нападающих. Среди претендентов: 3 вратаря, 5 защитников, 6 нападающих и 3 «универсала». «Универсал» — игрок, хороший в разных ролях, который поэтому может быть выбран как в качестве защитника, так в качестве нападающего (но не вратаря). Сколько существует способов выбрать эту шестерку? Требуется получить числовое значение.

**Ответ:** 5355

**Решение.** С выбором вратаря проблем нет:  $C_3^1 = 3$  способа. При выборе защитника есть 3 возможности: а) оба защитника выбираются из 5-ти защитников:  $C_5^2 = (5 \cdot 4)/2 = 10$ ; тогда при выборе нападающих есть  $6 + 3 = 9$  претендентов; б) один защитник выбирается из 5-ти защитников, а второй из 3-х «универсалов»; тогда при выборе нападающих есть  $6 + 2 = 8$  претендентов; в) оба защитника выбираются из 3-х «универсалов»; тогда при выборе нападающих есть  $6 + 1 = 7$  претендентов. Таким образом, общее количество вариантов равно:

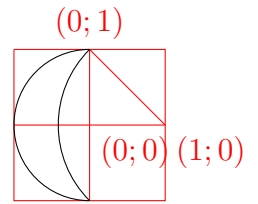
$$\begin{aligned} & C_3^1(C_5^2 \cdot C_9^3 + C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_8^3 + C_3^2 \cdot C_7^3) = \\ &= 3 \cdot \left( \frac{(5 \cdot 4)}{2} \cdot \frac{(9 \cdot 8 \cdot 7)}{(2 \cdot 3)} + 5 \cdot 3 \cdot \frac{(8 \cdot 7 \cdot 6)}{(2 \cdot 3)} + \frac{(3 \cdot 2)}{2} \cdot \frac{(7 \cdot 6 \cdot 5)}{(2 \cdot 3)} \right) = \\ &= 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot (3 \cdot 8 + 8 \cdot 3 + 3) = 105 \cdot (24 + 24 + 3) = 5355. \end{aligned}$$

---

## Задача 2

**В-1**

Живописец закрасил акварелью полумесяц на клетчатой бумаге. Контур полумесяца состоит из двух дуг — одна от окружности с центром в  $(0; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ , другая — от окружности с центром в  $(1; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ .

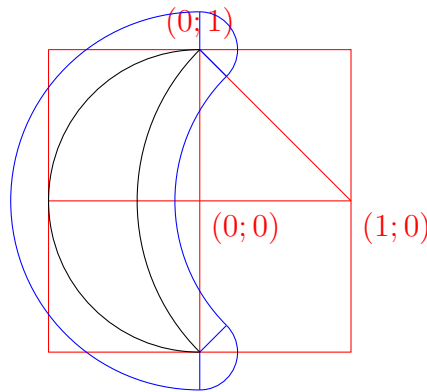


К утру краска расплылась так, что каждая точка полумесяца превратилась в круг радиуса 0.5. Найдите площадь получившейся фигуры.

**Ответ:**

$$1 + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

**Решение.** Пусть рисунок расплылся на радиус  $r$ . К площади полумесяца прибавятся «поля», которые можно разбить на левое, правое и два закругления на концах рогов.



Площадь полумесяца равна половине площади круга радиуса 1 минус сегмент круга радиуса  $\sqrt{2}$ .

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi - 4}{4} = 1.$$

Площадь левого поля — половина от площади кольца с радиусами 1 и  $1 + r$ .

$$\frac{\pi(1+r)^2 - \pi}{2}.$$

Площадь правого поля — четверть от площади кольца с радиусами  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{2} - r$ .

$$\frac{\pi(\sqrt{2})^2 - \pi(\sqrt{2} - r)^2}{4}.$$

Закругления на концах рогов вместе составляют три четверти окружности радиуса  $r$ .

$$\frac{3}{4}\pi r^2.$$

Вместе получается:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{\pi(1+r)^2 - \pi}{2} + \frac{\pi(\sqrt{2})^2 - \pi(\sqrt{2} - r)^2}{4} + \frac{3}{4}\pi r^2 = \\ & = 1 + \pi r + \frac{\pi}{2}r^2 + \frac{\pi\sqrt{2}r}{2} - \frac{\pi}{4}r^2 + \frac{3\pi}{4}r^2 = 1 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi r + \pi r^2 \end{aligned}$$

**Задача 3**

**В-1** Решите уравнение:  $|x^3 + y^3 - 19| + |x^2y + xy^2 + 6| + \frac{x|y| - y|x| + 2xy}{xy} = 0$ .

**Ответ:**  $(3; -2)$

**Решение.** Если  $x < 0$ , то при любом  $y$  решения нет, так как левая часть уравнения будет строго положительна. Если  $x > 0$ ,  $y > 0$ , то решения тоже нет по той же причине. Остается вариант  $x > 0$ ,  $y < 0$ . В этом случае уравнение приводится к виду

$$|x^3 + y^3 - 19| + |x^2y + xy^2 + 6| = 0,$$

который равносителен системе уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 19 = 0, \\ x^2y + xy^2 + 6 = 0. \end{cases}$$

После замены переменных  $x + y = u$ ,  $xy = v$  система сведется к следующему виду

$$\begin{cases} u(u^2 - 3v) = 19, \\ u \cdot v = -6. \end{cases}$$

Прибавляем к первому уравнению второе, умноженное на три, и получаем  $u^3 = 1, \Rightarrow u = 1$ . Значит (из второго уравнения),  $v = -6$ .

В исходных переменных задача свелась к системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x \cdot y = -6, \end{cases}$$

которая с помощью обратной теоремы Виета сводится к решению квадратного уравнения

$$t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow t = 3, t = -2 \Rightarrow (x = 3; y = -2)$$

---

**Задача 4**

**В-1** На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  отмечены такие точки  $M$  и  $N$ , что  $\angle ABM = 15^\circ$ ,  $\angle MBN = 45^\circ$  и  $\angle NBC = 75^\circ$ , а сумма и произведение площадей треугольников  $ABM$  и  $NBC$  равны 5 и 3 соответственно. Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

**Ответ:** 6

**Решение.** Обозначив  $S = S_{\triangle ABC}$  и  $s = S_{\triangle MBN}$ , имеем

$$\begin{aligned} S - s &= S_{\triangle ABM} + S_{\triangle NBC} = 5, \quad Ss = \frac{1}{2}AB \cdot BC \sin(15^\circ + 45^\circ + 75^\circ) \cdot \frac{1}{2}MB \cdot NB \sin 45^\circ = \\ &= \frac{1}{8}AB \cdot BC \cdot MB \cdot NB = 2 \cdot \frac{1}{2}AB \cdot BM \sin 15^\circ \cdot \frac{1}{2}NB \cdot BC \sin 75^\circ = 2S_{\triangle ABM} \cdot S_{\triangle NBC} = 6, \end{aligned}$$

так как  $\sin(90^\circ + 45^\circ) \sin 45^\circ = \sin^2 45^\circ = \frac{1}{2}$  и  $\sin 15^\circ \sin 75^\circ = \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$ . Поэтому числа  $S$  и  $-s$  образуют пару корней квадратного трёхчлена  $\sigma^2 - 5\sigma - 6 = (\sigma - 6)(\sigma + 1)$ , откуда  $S = 6$ .

---

**Задача 5**

**В-1** Найдите минимальное значение выражения

$$\frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} + \frac{2ca - 2b^2 + 2b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c}, \quad a, b, c > 0.$$

**Ответ:** 3

**Решение.** Проведем цепочку упрощающих преобразований:

$$\frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} + \frac{2ca - 2b^2 + 2b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c} = \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c + 3$$

В соответствии с неравенством о среднем можно заметить, что

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq 2c; \quad \frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} \geq 2b; \quad \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a.$$

При этом равенства достигается при  $a = b = c$ .

Отсюда следует, что

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$$

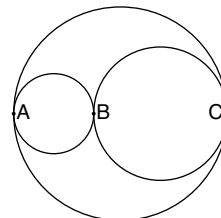
Это значит, что минимум всего исходного выражения равен 3 и достигается при  $a = b = c$

---

### Задача 6

В-1

Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на  $180^\circ$ . По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так что любую из дуг  $AB$  длиной 15 км он проезжает за 7 минут, любую из дуг  $BC$  длиной 25 км — за 11 минут, а любую из дуг  $AC$  — за 17 минут. Выехав из точки  $A$ , автомобиль через 1 час 25 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?



**Ответ:** 190

**Решение.** Рассмотрим варианты, которыми находящийся в точке  $A$  автомобиль может в следующий раз впервые снова оказаться в этой точке.

Во-первых, можно сделать это, не проходя через точку  $C$ , т. е. путем  $ABA$ .

Во-вторых, можно одним из двух способов ( $AC$  или  $ABC$ ) добраться до точки  $C$ , сделать несколько кругов  $CBC$  («несколько» может быть и нулем) и вернуться одним из двух способов ( $CA$  или  $CBA$ ) в точку  $A$ .

В любом случае мы либо четное число раз проезжаем по 7-минутной дуге, четное число раз по 11-минутной и четное число раз по 17-минутной, либо наоборот, нечетное число раз по каждому из трех типов дуг.

То же самое можно сказать про неоднократное возвращение в точку  $A$ .

«Четный» случай нам не подходит, так как по условию на каждую дугу уходит целое число минут, а общее время выражается в минутах нечетным числом.

Заметим, что любая тройка нечетных положительных чисел может быть реализована в качестве числа проходов (в любом направлении) дуг 1)  $AB$ , 2)  $BC$ , 3)  $AC$ . Действительно, выехав из точки  $A$  и сделав заданное нечетное число проходов  $AB$ , мы окажемся в точке  $B$ , после чего, сделав заданное нечетное число проходов  $BC$ , мы окажемся в точке  $C$ , а после заданного нечетного числа проходов  $AC$  — снова в точке  $A$ .

Итак, попробуем найти три таких нечетных положительных числа  $i, j, k$ , что

$$7i + 11j + 17k = 60 + 25 = 85.$$

Для  $k$  возможны 3 варианта: 5, 3, 1.

Первый случай отбрасываем, так как для него получаем  $i = j = 0$ .

Во втором случае имеем  $7i + 11j = 34$ . Если  $j \geq 3$ , то  $i < 1$ . При  $j = 1$  число  $34 - 11 \cdot 1 = 23$  не делится на 7.

Наконец, при  $k = 1$  имеем  $7i + 11j = 68$ . Для  $j = 5, 3, 1$  получим  $7i = 13, 35, 57$ , откуда  $j = 3, i = 35 : 7 = 5$ , а пройденный путь равен  $15 \cdot 5 + 25 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 190$  (км). Здесь  $40 = 15 + 25$  — длина дуги  $AC$ , которую находим геометрически. ( $AC = \pi R = \pi(r_1 + r_2) = \pi r_1 + \pi r_2 = AB + BC$ , где  $R, r_1, r_2$  — радиусы.)

---

### Задача 7

**В-1** Старинный подземный ход имеет свод параболической формы (то есть в поперечном сечении туннель ограничен полом — осью  $Ox$  и графиком некоторой параболы  $y = a - bx^2$ ). Ширина туннеля (измеряется по полу) равна 24, высота туннеля равна 18. Ход укрепили распорками — на параболе отметили точки  $A, B, C, D$  и соединили их между собой балками. Балки  $AB$  и  $CD$  параллельны полу,  $AD$  пересекается с  $BC$ , и при этом  $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ . Найдите расстояние между балками  $AB$  и  $CD$ .

**Ответ:** 8

**Решение.** Допустим, ширина туннеля равна  $2l$ , а высота равна  $h$ . Из этих параметров однозначно выводятся параметры параболы:  $x$  принадлежит отрезку  $[-l, l]$ , а  $y(l) = y(-l) = 0$ , так что

$$y(x) = h - \frac{hx^2}{l^2}.$$

Теперь зададим координаты точек так:

$$A = \left(x_1, h \left(1 - \frac{x_1^2}{l^2}\right)\right), B = \left(-x_1; h \left(1 - \frac{x_1^2}{l^2}\right)\right), C = \left(x_2; h \left(1 - \frac{x_2^2}{l^2}\right)\right), D = \left(-x_2; h \left(1 - \frac{x_2^2}{l^2}\right)\right)$$

Так как  $AB$  и  $CD$  параллельны полу, понятно, что ординаты  $A$  и  $B$  одинаковы, значит, абсциссы отличаются только знаком. Аналогично для  $C$  и  $D$ .

Тогда перпендикулярность  $AC$  и  $CB$ ,  $AD$  и  $DB$  можно выразить, например, через равенство нулю скалярных произведений. Достаточно рассмотреть одну пару, так как рисунок симметричен.

$$AC = \left(x_2 - x_1; \frac{h}{l^2}(x_1^2 - x_2^2)\right), \quad CB = \left(-x_1 - x_2; \frac{h}{l^2}(x_2^2 - x_1^2)\right)$$

$$AC \cdot CB = -(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - \frac{h^2}{l^4}(x_2^2 - x_1^2)^2 = -(x_2^2 - x_1^2) - \frac{h^2}{l^4}(x_2^2 - x_1^2)^2 = 0$$

Выносим множитель:

$$-(x_2^2 - x_1^2) \left( \frac{h^2}{l^4}(x_2^2 - x_1^2) + 1 \right) = 0$$

То есть либо  $(x_2^2 - x_1^2) = 0$  (но балки не совпадают, поэтому такой вариант не пойдёт), либо

$$(x_2^2 - x_1^2) = -\frac{l^4}{h^2}.$$

А расстояние между балками — это

$$\left| \frac{h}{l^2}(x_2^2 - x_1^2) \right|,$$

или, после подстановки,

$$\frac{l^2}{h}.$$

---

### Задача 8

**В-1** Пусть  $S(n)$  означает сумму цифр натурального числа  $n$ . Найти наибольшее 100-значное натуральное число  $n$ , удовлетворяющее условию: для всех натуральных  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) справедливы равенства  $S(mn) = S(n)$ .

**Ответ:**  $n = 10^{100} - 1$ .

**Решение.** Найдем все натуральные числа  $n$  с таким свойством. Среди однозначных чисел таким свойством, очевидно, обладает  $n = 1$ , и несложно проверить, что  $n = 9$  также обладает таким свойством.

Пусть  $n$  —  $k$ -разрядное число ( $k \geq 2$ ). Тогда  $10^{k-1} \leq n < 10^k - 1$ . Очевидно, что число вида  $10^{k-1}$  не обладает этим свойством. Рассмотрим  $n \geq 10^{k-1} + 1$ . Тогда для  $m = 10^{k-1} + 1 \leq n$  должно выполняться равенство

$$S(mn) = S((10^{k-1} + 1)n) = S(n).$$

Пусть  $a$  — старшая цифра числа  $n$  ( $a = \lfloor \frac{n}{10^{k-1}} \rfloor$ ). Тогда

$$S((10^{k-1} + 1)n) = S(n + a) + S(n) - a$$

и равенство  $S((10^{k-1} + 1)n) = S(n)$  возможно только если  $S(n + a) = a$ . Так как у  $n$  цифра  $a$  уже стоит в старшем разряде, это возможно только если число  $n + a$  переходит в следующий разряд, т.е. имеет вид  $10^k - b$  ( $1 \leq b \leq 9$ ). Так как  $S(2n) = S(n)$ , то  $S(2n)$  и  $S(n)$  имеют одинаковый остаток при делении на 9, а значит  $n$  делится на 9.

Несложно проверить, что для  $n = 10^k - 1$  выполнено  $S(mn) = S(n) = 9k$ .

---

**Олимпиада школьников «Ломоносов», математика**  
**Заключительный этап 2023/2024 учебного года**  
**Баллы за верные решения заданий**

<b>Номер задания</b>	<b>5-6 классы*</b>	<b>7-8 классы*</b>	<b>9 класс*</b>	<b>10 класс**</b>	<b>11 класс**</b>
<b>1</b>	18	15	15	12	12
<b>2</b>	18	15	15	12	12
<b>3</b>	18	15	15	12	12
<b>4</b>	18	15	15	12	12
<b>5</b>	18	15	15	12	12
<b>6</b>	18	15	15	12	12
<b>7</b>	—	15	15	12	12
<b>8</b>	—	—	—	12	12

\*) Если сумма баллов по задачам за работу превышает 100, выставляется оценка 100.

\*\*) Если сумма баллов по задачам за работу равна 96, выставляется оценка 100.