

Задача 1

В-1 У Кати в кармане 3 нитки. Нитки запутались и на них завязались узелки. Катя подсчитала, что на каждой нитке по 3 узелка. Потом она посчитала количество всех узелков. Какое число у нее могло получиться? Если возможно несколько вариантов ответа, то в ответ запишите сумму полученных чисел. Замечание: если две или три нити связались в узел, то этот узел считается за один.

Ответ: 42

Решение. максимальное число узелков - 9, если нитки совсем не пересекаются, минимальное - 3, если в каждом узелке участвуют все 3 нитки. Можно получить любое число узелков от 9 до 3. $9+8+7+6+5+4+3=42$

В-2 Вася достал для своей удочки три лески. Оказалось, что они запутались и завязались в узелки. На каждой леске оказалось по четыре узелка. Потом Вася подсчитал общее количество узелков. Какое число у него могло получиться? Если возможно несколько вариантов ответа, то в ответ запишите сумму полученных чисел. Замечание: если две или три лески завязались в узел, то этот узел считается за один.

Ответ: 72

Решение. $12+11+10+9+8+7+6+5+4=72$

В-3 Мама купила Пете три новых шнурка для кроссовок. Петя с удивлением обнаружил, что шнурки запутались и на каждом из них образовалось по 5 узлов. Потом он посчитала количество всех узелков. Какое число у него могло получиться? Если возможно несколько вариантов ответа, то в ответ запишите сумму полученных чисел. Указание: если два или три шнурка завязались в узел между собой, то этот узел считается за один.

Ответ: 110

Решение. $15+14+\dots+5=110$

В-4 Программист Игорь достал три провода и увидел, что на каждом проводе образовалось по 6 узелков. Затем он посчитал общее число узелков на этих трех проводах. Какое число у него могло получиться? Если возможно несколько вариантов ответа, то в ответ запишите сумму полученных чисел. Указание: если два или три провода завязались в узел между собой, то этот узел считается за один.

Ответ: 156

Решение. $18+17+\dots+6=156$

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2023/24 учебного года для 5–6 классов

Задача 2

В-1 Определите годы жизни писателя 19 века, если известно, что:

- набор цифр года смерти и года рождения совпадают,
- если сложить цифры года смерти, получится четырнадцать,
- последняя цифра года рождения и года смерти отличаются в 4 раза.

В ответ запишите год рождения и год смерти без пробелов и запятых.

Ответ: 18141841

Решение. Это М.Ю. Лермонтов, но ребус разгадывается и без этих знаний. Если он жил в 19 веке, то год рождения точно имеет вид 18^{**} . Год смерти имеет те же цифры. Значит, сумма цифр, равная 15, приводит к тому, что сумма звёздочек равна 5. Пять можно получить либо набором 1 и 4, либо набором 2 и 3. То есть умереть в 20 веке писатель не мог, и разница между годом рождения и смерти — в перестановке последних цифр. Так как цифры отличаются в 4 раза, то это 1 и 4, и отсюда неминуемо следует год рождения 1814

В-2 Определите годы жизни математика 19 века, если известно, что:

- год рождения содержит цифру 0,
- если сложить цифры года смерти и вычесть из полученного числа сумму цифр года рождения, то получится 5,
- последняя цифра года рождения и года смерти отличаются на 1,
- произведение ненулевых цифр года рождения и ненулевых цифр года смерти делится на 15.

В ответ запишите год рождения и год смерти без пробелов и запятых.

Ответ: 18501891

Решение. Софья Васильевна Ковалевская

В-3 Определите годы жизни математика 19 века, если известно, что:

- год рождения и год смерти не содержат цифру 0,
- если сложить цифры года смерти и вычесть из полученного числа сумму цифр года рождения, то получится 3,
- последняя цифра года рождения и последняя цифра года смерти отличаются на 1,
- если поделить год смерти на 2 три раза, то получится число, содержащее цифру 2 два раза и дающее остаток 4 при делении на 9.

Ответ: 18111832

Решение. Эварист Галуа.

В-4 Определите годы жизни математика 19 века, если известно, что:

- год рождения содержит цифру 0,
- если сложить цифры года смерти и вычесть из полученного числа сумму цифр года рождения, то получится 13,
- если вычесть из года смерти год рождения, то полученное число будет делиться на 17,
- произведение ненулевых цифр года рождения равно 5-ой степени 2.
- сумма цифр года смерти делится на 13.

Ответ: 18041889

Решение. Виктор Яковлевич Буняковский

Задача 3

В-1 Три спортсмена стартовали одновременно из одной точки по круговой дорожке. 1-й преодолевает круг за 21 минуту, 2-й - за 35 минут, 3-й - за 15 минут. Через какое количество минут они снова встретятся на старте? В ответе указать число.

Ответ: 105

Решение. Нужно найти НОК(21, 35, 15) = $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$,

$$21 = 3 \cdot 7,$$

$$35 = 5 \cdot 7,$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

.

В-2 Три лыжника начали движение одновременно из одной точки по круговой дорожке. 1-й преодолевает круг за 55 минут, 2-й - за 35 мин, 3-й - за 77 мин. Через какое кол-во минут они снова встретятся на старте? В ответе указать число.

Ответ: 385

В-3 Четыре велосипедиста начали с общего старта движение по круговой дорожке. 1-й преодолевает круг за 26 минут, 2-й - за 39 минут, 3-й - за 21 минуту, 4-й за 14 минут. Через какое кол-во минут они снова встретятся на старте? В ответе указать число.

Ответ: 546

В-4 Четыре гонщика начали с общего старта движение по круговой дорожке. 1-й преодолевает круг за 15 минут, 2-й - за 35 минут, 3-й - за 21 минуту, 4-й за 14 минут. Через какое кол-во минут они снова встретятся на старте? В ответе указать число.

Ответ: 210

Задача 4

В-1 На Московском шахматном турнире в этом году было не менее четырех шахматистов. Известно, что каждый игрок сыграл с каждым одинаковое число партий. Всего было проведено 26 туров. После седьмого тура один игрок заметил, что у всех игроков число очков четное, а у него самого - нечетное. Определите число участников турнира. В ответ запишите число.

Правила проведения шахматного турнира: В одном туре все участники разбиваются на пары и играют между собой в парах по одной партии. Если число игроков - нечетное, то один игрок не играет и ждет следующего тура; в следующем туре он уже играет, а кто-то другой ждёт и т.д.; причем тогда каждый игрок должен пропустить одинаковое число туров. При победе в партии игрок получает одно очко, при ничьей - пол очка и при проигрыше - ноль очков.

Ответ: 14

Решение. В турнире принимало участие 14 шахматистов. Допустим, что в турнире участвовало n шахматистов. Если n - четное, то шахматисты легко разбиваются на пары, и тогда каждый шахматист играл в каждом туре. Тогда каждый шахматист сыграл 26 партий, причем он сыграл поровну с каждым из остальных $n - 1$ шахматистов. Следовательно, в этом случае 26 делится на $n-1$. Следовательно, $n - 1 = 2, n - 1 = 13$ или $n - 1 = 26$. Но по условию $n > 3$, а по предположению n - четное. поэтому $n=14$. Если n - нечетно, то в каждом турнире один из шахматистов не играл, при этом, конечно, все шахматисты не играли в одинаковом количестве туров, и следовательно в этом случае 26 делится на n . Следовательно, $n = 2, n = 13$ или $n = 26$. Но по условию $n > 3$ и по предположению n - нечетное, поэтому $n = 13$. Получаем два варианта: $n = 13$ или $n = 14$. Если $n = 13$, то в каждом туре было сыграно $12 : 2 = 6$ партий, в каждой партии разыгрывается 1 очко. Поэтому в каждом туре разыгрывалось по 6 очков, то есть сумма очков после 7 туров равна 42 и не представима в виде суммы нечетного числа и нескольких четных. Если же $n = 14$, то нетрудно проверить, как описанная ситуация могла произойти.

В-2 На Московском шахматном турнире в этом году было не менее четырех шахматистов. Известно, что каждый игрок сыграл с каждым одинаковое число партий. Всего было проведено 34 тура. После одиннадцатого тура один игрок заметил, что у всех игроков число очков четное, а у него самого - нечетное. Определите число участников турнира. В ответ запишите число.

Правила проведения шахматного турнира: В одном туре все участники разбиваются на пары и играют между собой в парах по одной партии. Если число игроков - нечетное, то один игрок не играет и ждет следующего тура; в следующем туре он уже играет, а кто-то другой ждёт и т.д.; причем тогда каждый игрок должен пропустить одинаковое число туров. При победе в партии игрок получает одно очко, при ничьей - пол очка и при проигрыше - ноль очков.

Ответ: 18

В-3 На Московском шахматном турнире в этом году было не менее четырех шахматистов. Известно, что каждый игрок сыграл с каждым одинаковое число партий. Всего было проведено 38 туров. После пятнадцатого тура один игрок заметил, что у всех игроков число очков четное, а у него самого - нечетное. Определите число участников турнира. В ответ запишите число.

Правила проведения шахматного турнира: В одном туре все участники разбиваются на пары и играют между собой в парах по одной партии. Если число игроков - нечетное, то один игрок не играет и ждет следующего тура; в следующем туре он уже играет, а кто-то другой ждёт и т.д.; причем тогда каждый игрок должен пропустить одинаковое число туров. При победе в партии игрок получает одно очко, при ничьей - пол очка и при проигрыше - ноль очков.

Ответ: 19

В-4 На Московском шахматном турнире в этом году было не менее четырех шахматистов. Известно, что каждый игрок сыграл с каждым одинаковое число партий. Всего было проведено

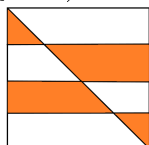
46 туров. После пятнадцатого тура один игрок заметил, что у всех игроков число очков четное, а у него самого - нечетное. Определите число участников турнира. В ответ запишите число.

Правила проведения шахматного турнира: В одном туре все участники разбиваются на пары и играют между собой в парах по одной партии. Если число игроков - нечетное, то один игрок не играет и ждет следующего тура; в следующем туре он уже играет, а кто-то другой ждёт и т.д.; причем тогда каждый игрок должен пропустить одинаковое число туров. При победе в партии игрок получает одно очко, при ничьей - пол очка и при проигрыше - ноль очков.

Ответ: 23

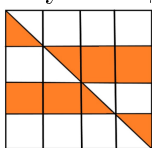
Задача 5

В-1 Квадрат со стороной 4 см поделили на 4 равные полосы, затем провели диагональ (см. рисунок). Найдите площадь закрашенной части в квадратных сантиметрах.

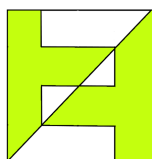


Ответ: 6

Решение. Разобьем квадрат 44 на квадраты со стороной 11. Заметим, что получилось четыре закрашенных квадрата площадью 1 и четыре треугольника. Если сложить треугольники, то получится два квадрата 11. Площадь закрашенной фигуры равна $4 + 2 = 6$.

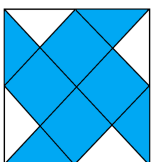


В-2 Квадрат со стороной 4 см поделили на части как на рисунке. Найдите площадь закрашенной части в квадратных сантиметрах.



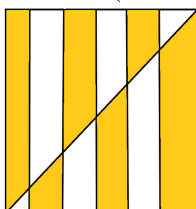
Ответ: 10

В-3 Квадрат со стороной 4 см поделили на части как на рисунке. Найдите площадь закрашенной части в квадратных сантиметрах.



Ответ: 12

В-4 Квадрат со стороной шесть сантиметров поделили на 6 равных полосок, затем провели диагональ (см. рисунок). Найдите площадь закрашенной части в квадратных сантиметрах.



Ответ: 21

Задача 6

В-1 Ровно в 8:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 72 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Вторым катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: 24

Решение. Если рассмотреть движение относительно реки, то второй катер за время прошел с собственной скоростью путь от пункта B до середины C отрезка AB и обратно. Поэтому его скорость равна $72/(11 - 8)$, причём независимо от скорости течения реки. Ответ: 24.

В-2 Ровно в 9:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 69 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Вторым катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч.

Ответ: 23

В-3 Ровно в 7:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 70 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Вторым катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 14

В-4 Ровно в 6:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 85 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Вторым катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: 17

В-5 Ровно в 8:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 52 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Вторым катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч.

Ответ: 26

В-6 Ровно в 9:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 57 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Вторым катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

Ответ: 19

В-7 Ровно в 7:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 72 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Вторым катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 18

В-8 Ровно в 6:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 64 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

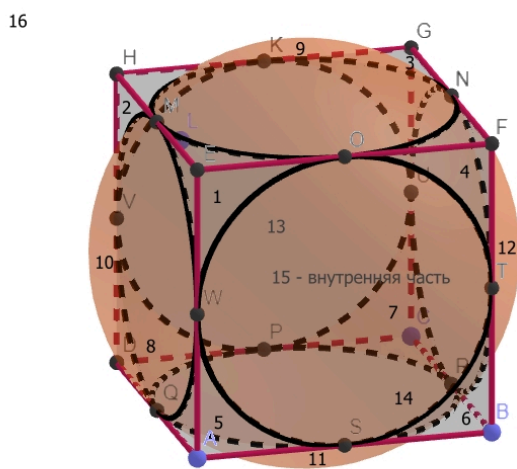
Ответ: 16

Задача 1

В-1 На какое наибольшее число частей могут разбить пространство две поверхности, если одна из них — сфера, а другая — куб? Они могут располагаться как угодно и быть любых размеров.

Ответ: 16

Решение. Пример такого разбиения: впишите в грани куба окружности (они будут касаться друг друга в серединах рёбер куба), и проведите сферу, проходящую через них. Тогда пространство разобьётся на такие части: 1 часть лежит снаружи и куба, и сферы. 1 часть лежит внутри и куба, и сферы. 6 частей лежат внутри сферы и снаружи куба (6 сферических сегментов). И 8 частей лежат внутри куба, но снаружи сферы (уголки куба). В сумме $1+1+6+8 = 16$.



Почему этот способ оптимален? Все области делятся так: есть 1 лежащая снаружи обеих фигур. Есть 1, лежащая внутри обеих фигур. А остальные делятся на 2 вида: те, что принадлежат только шару, и те, что принадлежат только кубу. Куб может отсечь от сферы не более 6 кусков (просто по числу плоскостей). Сфера может отсечь от куба не более восьми (по числу углов-вершин). Каждому отсечённому куску может принадлежать сколько-то углов — и нуля углов у куска быть не может. Предложенный способ оптимален по обоим параметрам.

В-2 На какое наибольшее число частей могут разбить пространство две поверхности, если одна из них — сфера, а другая — усечённый конус? Они могут располагаться как угодно и быть любых размеров.

Ответ: 7

Решение. Пример такого разбиения: нарисуйте окружность и равнобедренную трапецию так, чтобы они пересекались в 8 точках, и чтобы ось конуса совпадала с диаметром сферы. Потом поворачивайте этот рисунок вокруг оси, чтобы окружность очертила сферу, а трапеция очертила усечённый конус. В таком случае пространство разобьётся на такие части: 1 часть снаружи сферы и конуса, 1 часть внутри и сферы, и конуса. Снаружи конуса, но внутри сферы лежат 3 части — 2 сферических сегмента, выступающих из оснований конуса, и 1 пояс, полученный вращением сегмента сферы, отсечённого боковой стороной трапеции (на плоском рисунке ему соответствуют 2 части, но в объёме они соединены.) Снаружи сферы, но внутри конуса лежат 2 куска — 2 пояса, полученных вращением углов трапеции (на плоском рисунке это 4 части, но в объёме их две). В сумме получаем $1+1+2+1+2 = 7$.

Почему этот способ оптимален? Все области делятся так: есть 1 лежащая снаружи обеих фигур. Есть 1, лежащая внутри обеих фигур. А остальные делятся на 2 вида: те, что принадлежат только конусу, и те, что принадлежат только сфере. Конус от сферы может отсечь не более

3 кусков — два основаниями, один — боковой поверхностью. Сфера от конуса может отсечь не более 2 кусков. Почему? Посмотрим на окружности — границы основания конуса. Каждая из них либо внутри сферы, либо частично внутри (дуга внутри и дуга снаружи), либо полностью снаружи. Каждому отсечённому от конуса куску пространства принадлежит либо одна, либо две таких дуги (или окружности). Значит, не более двух. Предложенный способ оптимален по обоим параметрам.

В-3 На какое наибольшее число частей могут разбить пространство две поверхности, если одна из них — сфера, а другая — треугольная пирамида? Они могут располагаться как угодно и быть любых размеров

Ответ: 10

Решение. Пример такого разбиения: пирамидой берём правильный, равносторонний тетраэдр. Вписываем в его стороны окружности (окружности будут касаться друг друга в серединах рёбер), и через эти окружности проводим сферу. В таком случае пространство разобьётся на такие части: 1 лежит снаружи и тетраэдра, и сферы. 1 лежит внутри и тетраэдра, и сферы. Ещё есть 4 сферических сегмента, по числу граней (вне тетраэдра, но внутри сферы) и 4 уголка по числу вершин (внутри тетраэдра, но снаружи сферы). В сумме $1+1+4+4 = 10$.

Почему этот способ оптимален? Все области делятся так: есть 1 лежащая снаружи обеих фигур. Есть 1, лежащая внутри обеих фигур. А остальные делятся на 2 вида: те, что принадлежат только шару, и те, что принадлежат только пирамиде. Пирамида может отсечь от сферы не более 4 кусков (просто по числу плоскостей). Сфера может отсечь от пирамиды не более четырёх (по числу углов-вершин). Каждому отсечённому куску может принадлежать сколько-то углов — и нуля углов у куска быть не может. Предложенный способ оптимален по обоим параметрам.

В-4 На какое наибольшее число частей могут разбить пространство две поверхности, если одна из них — куб, а другая — конус? Они могут располагаться как угодно и быть любых размеров

Ответ: 12

Решение. Пример такого разбиения: делим куб пополам плоскостью, параллельной основанию. Получим квадрат в сечении. Опишем вокруг него окружность. Потом рисуем вторую окружность, вписанную в верхнюю грань куба. Проводим через эти две окружности конус (большая, первая, будет его основанием). Тогда пространство разобьётся на такие куски: 1 снаружи конуса и куба, 1 внутри конуса и куба. Снаружи конуса, но внутри куба будут 5 кусков: 4 уголка куба от верхней грани и ещё 1 — половина куба, выступающая вниз из основания конуса. Аналогично, будет 5 кусков снаружи куба, но внутри конуса: 1 вершинка конуса, стоящая на верхней грани куба и 4 куска конуса, выступающих из боковых сторон. В сумме получается $1+1+5+5 = 12$.

Решившим предлагается подумать над доказательством оптимальности самостоятельно, пользуясь идеями предыдущих вариантов, хотя формально доказательство оптимальности не требовалось.

Задача 2

В-1 Найдите наименьшее четырёхзначное число, дающее остаток 3 при делении на 11, остаток 6 при делении на 15 и остаток 17 при делении на 26.

Ответ: 3501

Решение. Для начала отметим, что 11, 15 и 26 попарно взаимно просты. $11 \cdot 15 \cdot 26 = 4290$, так что если мы найдём некоторое число x , дающее такие остатки при делениях на 11, 15, 26, то $x + 4290 \cdot k$ ($k \in \mathbb{Z}$) будут давать такие же остатки. (Пока мы не обращаем внимания на количество знаков в числе). Если мы найдём хоть какое-нибудь число, дающее нужные остатки, то найдём и остальные, вычитая/прибавляя 4290.

Давайте искать X в виде $A \cdot 15 \cdot 26 + B \cdot 11 \cdot 26 + C \cdot 11 \cdot 15$. В таком случае, учитывая остатки отделений на 11, 15, 26, можно выписать следующие равенства: $A \cdot 15 \cdot 26 = a \cdot 11 + 3$, $B \cdot 11 \cdot 26 = b \cdot 15 + 6$, $C \cdot 11 \cdot 15 = c \cdot 26 + 17$. Или же: $11 \cdot a = 390A - 3$, $15 \cdot b = 286B - 6$, $26 \cdot c = 165C - 17$. Нам сгодятся любые целые числа, удовлетворяющие этим равенствам. Подбираем: $A = 5$ ($a = 117$), $B = 6$, $C = 25$. Тогда $X = 5 \cdot 15 \cdot 26 + 6 \cdot 11 \cdot 26 + 25 \cdot 11 \cdot 15 = 7791$. Вычитая 4290, получаем другое число с такими остатками: 3501. Других таких 4-хзначных чисел нет.

В-2 Найдите наибольшее четырёхзначное число, дающее остаток 3 при делении на 11, остаток 6 при делении на 15 и остаток 17 при делении на 26.

Ответ: 7791

В-3 Найдите предпоследнее четырёхзначное число, дающее остаток 3 при делении на 11, остаток 6 при делении на 15 и остаток 17 при делении на 26.

Ответ: 3501

В-4 Найдите второе четырёхзначное число, дающее остаток 3 при делении на 11, остаток 6 при делении на 15 и остаток 17 при делении на 26.

Ответ: 7791

Задача 3

В-1 Ровно в 8:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 72 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 24

Решение. Если рассмотреть движение относительно реки, то второй катер за время прошел с собственной скоростью путь от пункта B до середины C отрезка AB и обратно. Поэтому его скорость равна $72/(11 - 8)$, причём независимо от скорости течения реки. Ответ: 24.

В-2 Ровно в 9:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 69 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 23

В-3 Ровно в 7:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 70 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

Ответ: 14

В-4 Ровно в 6:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 85 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 17

В-5 Ровно в 8:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 52 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 26

В-6 Ровно в 9:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 57 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

Ответ: 19

В-7 Ровно в 7:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 72 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 18

В-8 Ровно в 6:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 64 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 16

Задача 4

В-1 Оля собирается в гости к подруге Маше к пяти часам вечера. Оля и Маша живут на одной стороне одной улицы: Оля — в 5 минутах ходьбы от ближайшей автобусной остановки, а Маша — в 6. Между их остановками есть ещё три остановки. Автобус ходит каждые 15 минут, и Оля рассчитала, что если она придёт на остановку в правильное время, то будет у Маши точно вовремя. В автобусе Оля погрузилась в чтение и не заметила, как уехала на 2 остановки дальше, чем живёт Маша. Она вышла из автобуса и перешла на противоположную сторону улицы, чтобы сесть на автобус, идущий в обратном направлении, но тот как раз в этот момент отъехал от остановки. Оле пришлось ждать следующего автобуса на 1 минуту дольше, чем она ехала на автобусе до этого. На следующем автобусе Оля доехала до нужной остановки и дошла до дома своей подруги. На сколько секунд Оля опоздала к Маше, если известно, что автобус проезжает каждую остановку за одно и то же время, а переход на другую сторону улицы занимает у Оли полминуты?

Ответ: 1520

Решение. Оля ехала до первого выхода из автобуса $(4+2)x$ минут, где x — время, за которое автобус проезжает одну остановку. Ждать второго автобуса ей пришлось 15 минут, причем из условия имеем $(4+2)x + 1 = 15$, откуда $x = \frac{7}{3}$.

План по времени (в минутах): $5 + 6 + 4x = 4x + 11$.

Фактически затраченное время: $5 + 6 + (4 + 2 + 2)x + 15 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 8x + 27$. (Полминуты мы добавили ещё раз, так как, если по плану она бы шла от автобуса без пересечения проезжей части, то после возвращения по другой стороне ей пришлось снова пересечь улицу).

Опоздание = факт – план = $4x + 16 = \frac{4 \cdot 7}{3} + 16$ минут, или 1520 секунд.

В-2 Оля собирается в гости к подруге Маше к пяти часам вечера. Оля и Маша живут на одной стороне одной улицы: Оля — в 7 минутах ходьбы от ближайшей автобусной остановки, а Маша — в 8. Между их остановками есть ещё четыре остановки. Автобус ходит каждые 16 минут, и Оля рассчитала, что если она придёт на остановку в правильное время, то будет у Маши точно вовремя. В автобусе Оля погрузилась в чтение и не заметила, как уехала на одну остановку дальше, чем живёт Маша. Она вышла из автобуса и перешла на противоположную сторону улицы, чтобы сесть на автобус, идущий в обратном направлении, но тот как раз в этот момент отъехал от остановки. Оле пришлось ждать следующего автобуса на 2 минуты дольше, чем она ехала на автобусе до этого. На следующем автобусе Оля доехала до нужной остановки и дошла до дома своей подруги. На сколько секунд Оля опоздала к Маше, если известно, что автобус проезжает каждую остановку за одно и то же время, а переход на другую сторону улицы занимает у Оли полминуты?

Ответ: 1300

В-3 Оля собирается в гости к подруге Маше к пяти часам вечера. Оля и Маша живут на одной стороне одной улицы: Оля — в 9 минутах ходьбы от ближайшей автобусной остановки, а Маша — в 10. Между их остановками есть ещё пять остановок. Автобус ходит каждые 20 минут, и Оля рассчитала, что если она придёт на остановку в правильное время, то будет у Маши точно вовремя. В автобусе Оля погрузилась в чтение и не заметила, как уехала на 2 остановки дальше, чем живёт Маша. Она вышла из автобуса и перешла на противоположную сторону улицы, чтобы сесть на автобус, идущий в обратном направлении, но тот как раз в этот момент отъехал от остановки. Оле пришлось ждать следующего автобуса на 3 минуты дольше, чем она ехала на автобусе до этого. На следующем автобусе Оля доехала до нужной остановки и дошла до дома своей подруги. На сколько секунд Оля опоздала к Маше, если известно, что автобус проезжает каждую остановку за одно и то же время, а переход на другую сторону улицы занимает у Оли полминуты?

В-4 Оля собирается в гости к подруге Маше к пяти часам вечера. Оля и Маша живут на одной стороне одной улицы: Оля — в 11 минутах ходьбы от ближайшей автобусной остановки, а Маша — в 12. Между их остановками есть ещё шесть остановок. Автобус ходит каждые 18 минут, и Оля рассчитала, что если она придёт на остановку в правильное время, то будет у Маши точно вовремя. В автобусе Оля погрузилась в чтение и не заметила, как уехала на 1 остановку дальше, чем живёт Маша. Она вышла из автобуса и перешла на противоположную сторону улицы, чтобы сесть на автобус, идущий в обратном направлении, но тот как раз в этот момент отъехал от остановки. Оле пришлось ждать следующего автобуса на 1 минуту дольше, чем она ехала на автобусе до этого. На следующем автобусе Оля доехала до нужной остановки и дошла до дома своей подруги. На сколько секунд Оля опоздала к Маше, если известно, что автобус проезжает каждую остановку за одно и то же время, а переход на другую сторону улицы занимает у Оли полминуты?

Задача 5

В-3 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Решите уравнение

$$n + 4S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1953

Решение. Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Число 2007 кратно 3 и 9. Так как $3S(n)$ делится на 3, то n тоже должно делиться на 3. А значит, $3S(n)$ делится на 9. В таком случае n тоже должно делиться на 9. Докажем, что n — четырехзначное число. Пусть $n < 1000$. Тогда $S(n) < 3 \cdot 9 = 27$. Таким образом, $n + 3S(n) < 1000 + 3 \cdot 27 = 1081 < 2007$. Противоречие. Число n пятизначным тоже быть, очевидно, не может. То есть n — четырехзначное натуральное число, $n \leq 9999$, $S(n) \leq 36$. Тогда $S(n)$ равно 9, 18, 27 либо 36. $n = 2007 - 3S(n)$. Так что нужно проверить варианты, когда n равно $2007 - 108 = 1899$, $2007 - 81 = 1926$, $2007 - 54 = 1953$ и $2007 - 27 = 1980$, и выбрать из них наименьшее подходящее. Если $n = 1899$, то $S(n) = 27$, следовательно $n + 3S(n) = 1899 + 3 \cdot 27 = 2052 \neq 2007$. Если $n = 1926$, то $S(n) = 18$, следовательно $n + 3S(n) = 1926 + 3 \cdot 18 = 1980 \neq 2007$. Если $n = 1953$, то $S(n) = 18$, следовательно $n + 3S(n) = 1953 + 3 \cdot 18 = 2007$. Если $n = 1980$, то $S(n) = 18$, следовательно $n + 3S(n) = 1980 + 3 \cdot 18 = 2034 \neq 2007$. Таким образом, ответ в задаче $n = 1953$.

В-1 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Решите уравнение

$$n + 3S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1971

В-2 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Решите уравнение

$$n + 2S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 2007

В-4 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Решите уравнение

$$n + 5S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1935

Задача 6

В-1 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 30 раз больше минимального числа в наборе и в 20 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 24

Решение. Пусть $n, n + 1, \dots, n + k$ — данный набор (всего $k + 1$ чисел). Тогда их сумма равна $n(k + 1) + \frac{k(k+1)}{2} = 30n = 20(n + k)$. Значит, $n = 2k$, поэтому $\frac{5}{2}k(k + 1) = 60k$, откуда $k + 1 = \frac{120}{5} = 24$.

В-2 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 45 раз больше минимального числа в наборе и в 30 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 36

В-3 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 60 раз больше минимального числа в наборе и в 40 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 48

В-4 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 75 раз больше минимального числа в наборе и в 50 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 60

Задача 7

В-1 Найдите наименьшее возможное значение суммы 10 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 5 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 65

Решение. Из условия следует, что среди рассматриваемых 10 чисел не более 4 нечётных, а поскольку сумма нечётна, то нечётных чисел либо 1, либо 3. Сумма будет наименьшей, если брать первые подряд идущие чётные и нечётные числа. Если нечётное число одно, то получим $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 18 = 91$, а если нечётных 3, то получим $1 + 3 + 5 + 2 + 4 + 6 + \dots + 14 = 65$, это и есть наименьшая возможная сумма.

В-2 Найдите наименьшее возможное значение суммы 12 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 5 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 99

В-3 Найдите наименьшее возможное значение суммы 11 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 5 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 81

В-4 Найдите наименьшее возможное значение суммы 14 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 7 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 115

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2023/24 учебного года для 9 класса

Задача 1

В-1 Числа x, y таковы, что $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 5$. Найдите $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 2.9

Решение. По условию, $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} = 2\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = 5$, поэтому $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{5}{2} + \frac{2}{5} = 2.9$.

В-2 Числа x, y таковы, что $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 10$. Найдите $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 5.2

В-3 Числа x, y таковы, что $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 20$. Найдите $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 10.1

В-4 Числа x, y таковы, что $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 8$. Найдите $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 4.25

Задача 2

В-1 Ровно в 8:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 72 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 24

Решение. Если рассмотреть движение относительно реки, то второй катер за время прошел с собственной скоростью путь от пункта B до середины C отрезка AB и обратно. Поэтому его скорость равна $72/(11 - 8)$, причём независимо от скорости течения реки. Например, в первом варианте ответ: 24.

В-2 Ровно в 9:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 69 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 23

В-3 Ровно в 7:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 70 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

Ответ: 14

В-4 Ровно в 6:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 85 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 17

В-5 Ровно в 8:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 52 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 26

В-6 Ровно в 9:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 57 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

Ответ: 19

В-7 Ровно в 7:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 72 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 18

В-8 Ровно в 6:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 64 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 16

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2023/24 учебного года для 9 класса

Задача 3

В-3 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Решите уравнение

$$n + 4S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1953

Решение. Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Число 2007 кратно 3 и 9. Так как $3S(n)$ делится на 3, то n тоже должно делиться на 3. А значит, $3S(n)$ делится на 9. В таком случае n тоже должно делиться на 9. Докажем, что n — четырехзначное число. Пусть $n < 1000$. Тогда $S(n) < 3 \cdot 9 = 27$. Таким образом, $n + 3S(n) < 1000 + 3 \cdot 27 = 1081 < 2007$. Противоречие. Число n пятизначным тоже быть, очевидно, не может. То есть n — четырехзначное натуральное число, $n \leq 9999$, $S(n) \leq 36$. Тогда $S(n)$ равно 9, 18, 27 либо 36. $n = 2007 - 3S(n)$. Так что нужно проверить варианты, когда n равно $2007 - 108 = 1899$, $2007 - 81 = 1926$, $2007 - 54 = 1953$ и $2007 - 27 = 1980$, и выбрать из них наименьшее подходящее. Если $n = 1899$, то $S(n) = 27$, следовательно $n + 3S(n) = 1899 + 3 \cdot 27 = 2052 \neq 2007$. Если $n = 1926$, то $S(n) = 18$, следовательно $n + 3S(n) = 1926 + 3 \cdot 18 = 1980 \neq 2007$. Если $n = 1953$, то $S(n) = 18$, следовательно $n + 3S(n) = 1953 + 3 \cdot 18 = 2007$.

В-1 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Решите уравнение

$$n + 3S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1971

В-2 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Решите уравнение

$$n + 2S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 2007

Если $n = 1980$, то $S(n) = 18$, следовательно $n + 3S(n) = 1980 + 3 \cdot 18 = 2034 \neq 2007$. Таким образом, ответ в задаче $n = 1953$.

В-4 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Решите уравнение

$$n + 5S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1935

Задача 4

В-1 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 30 раз больше минимального числа в наборе и в 20 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 24

Решение. (для 1 варианта) Пусть $n, n + 1, \dots, n + k$ — данный набор (всего $k + 1$ чисел). Тогда их сумма равна $n(k + 1) + \frac{k(k + 1)}{2} = 30n = 20(n + k)$. Значит, $n = 2k$, поэтому $\frac{5}{2}k(k + 1) = 60k$, откуда $k + 1 = \frac{120}{5} = 24$.

В-2 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 45 раз больше минимального числа в наборе и в 30 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 36

В-3 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 60 раз больше минимального числа в наборе и в 40 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 48

В-4 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 75 раз больше минимального числа в наборе и в 50 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 60

Задача 5

В-1 У Нади в аквариуме живут 5 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 30 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.1% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (1, 3, 4, 6, 14). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 60 дней вечером?

Ответ: 14.9

Решение. Можно считать, что есть всего две рыбки: самая тяжелая и сумма всех остальных. После этого ответ вычисляется просто: $\frac{XKY}{2 \cdot 100} + M_N$. (Где X — масса корма в день, K — число дней, Y — процент увеличения массы, M_N — масса самой тяжелой рыбки).

В-2 У Нади в аквариуме живут 5 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 25 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.2% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (2, 3, 3, 7, 15). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 62 дней вечером?

Ответ: 16.55

В-3 У Нади в аквариуме живут 6 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 30 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.1% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (1, 3, 4, 4, 9, 21). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 64 дней вечером?

Ответ: 21.96

В-4 У Нади в аквариуме живут 6 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 25 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.2% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (2, 3, 6, 9, 9, 29). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 66 дней вечером?

Ответ: 30.65

Задача 6

В-1 Найдите наименьшее возможное значение суммы 10 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 5 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 65

Решение. Из условия следует, что среди рассматриваемых 10 чисел не более 4 нечётных, а поскольку сумма нечётна, то нечётных чисел либо 1, либо 3. Сумма будет наименьшей, если брать первые подряд идущие чётные и нечётные числа. Если нечётное число одно, то получим $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 18 = 91$, а если нечётных 3, то получим $1 + 3 + 5 + 2 + 4 + 6 + \dots + 14 = 65$, это и есть наименьшая возможная сумма.

В-2 Найдите наименьшее возможное значение суммы 12 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 5 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 99

В-3 Найдите наименьшее возможное значение суммы 11 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 5 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 81

В-4 Найдите наименьшее возможное значение суммы 14 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 7 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 115

Задача 7

В-1 В ресторане «Обломов» выпекают 3 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 4 пирожка, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 4 пирожка?

Ответ: 15

Решение. Решение. Задача на число сочетаний с повторениями. Количество выбираемых элементов $r = 4$. Количество видов продукции $n = 3$. То есть, количество «перегородок» $n - 1 = 2$.

Воспользуемся формулой $C_{r+n-1}^r = \frac{(r+n-1)!}{r! \cdot (n-1)!} = C_6^4 = 15$

В-2 В ресторане «Обломов» выпекают 4 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами и с капустой. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 5 пирожков, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 5 пирожков?

Ответ: 56

В-3 В ресторане «Обломов» выпекают 4 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами и с капустой. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 4 пирожка, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 4 пирожка?

Ответ: 35

В-4 В ресторане «Обломов» выпекают 3 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 5 пирожков, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 5 пирожков?

Ответ: 21

Задача 8

В-1 Найдите наименьшее значение выражения $(a + 2)(b + 2)(c + 2)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 1$.

Ответ: 27

Решение. По неравенству о средних имеем

$$(a + 2)(b + 2)(c + 2) = (a + 1 + 1)(b + 1 + 1)(c + 1 + 1) \geq 3a^{\frac{1}{3}}3b^{\frac{1}{3}}3c^{\frac{1}{3}} = 27(abc)^{\frac{1}{3}},$$

причём равенство достигается при $a = b = c = 1$.

В-2 Найдите наименьшее значение выражения $(a + 3)(b + 3)(c + 3)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 1$.

Ответ: 64

В-3 Найдите наименьшее значение выражения $(a + 4)(b + 4)(c + 4)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 8$.

Ответ: 216

В-4 Найдите наименьшее значение выражения $(a + 6)(b + 6)(c + 6)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 27$.

Ответ: 729

Задача 1

В-1 У Нади в аквариуме живут 5 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 30 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.1% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (1, 3, 4, 6, 14). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 60 дней вечером?

Ответ: 14.9

Решение. Можно считать, что есть всего две рыбки: самая тяжелая и сумма всех остальных. После этого ответ вычисляется просто: $\frac{XKY}{2 \cdot 100} + M_N$. (Где X — масса корма в день, K — число дней, Y — процент увеличения массы, M_N — масса самой тяжелой рыбки).

В-2 У Нади в аквариуме живут 5 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 25 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.2% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (2, 3, 3, 7, 15). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 62 дней вечером?

Ответ: 16.55

В-3 У Нади в аквариуме живут 6 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 30 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.1% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (1, 3, 4, 4, 9, 21). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 64 дней вечером?

Ответ: 21.96

В-4 У Нади в аквариуме живут 6 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 25 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.2% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (2, 3, 6, 9, 9, 29). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 66 дней вечером?

Ответ: 30.65

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Отборочный этап 2023/24 учебного года для 10 класса

Задача 2

В-1 Числа x, y таковы, что $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 5$. Найдите $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 2.9

Решение. По условию, $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} = 2\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = 5$, поэтому $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{5}{2} + \frac{2}{5} = 2.9$.

В-2 Числа x, y таковы, что $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 10$. Найдите $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 5.2

В-3 Числа x, y таковы, что $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 20$. Найдите $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 10.1

В-4 Числа x, y таковы, что $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 8$. Найдите $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 4.25

Задача 3

В-1 Ровно в 8:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 72 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 24

Решение. Если рассмотреть движение относительно реки, то второй катер за время прошел с собственной скоростью путь от пункта B до середины C отрезка AB и обратно. Поэтому его скорость равна $72/(11 - 8)$, причём независимо от скорости течения реки. Например, в первом варианте ответ: 24.

В-2 Ровно в 9:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 69 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 23

В-3 Ровно в 7:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 70 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

Ответ: 14

В-4 Ровно в 6:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 85 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 17

В-5 Ровно в 8:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 52 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 26

В-6 Ровно в 9:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 57 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

Ответ: 19

В-7 Ровно в 7:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 72 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 18

В-8 Ровно в 6:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 64 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 16

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Отборочный этап 2023/24 учебного года для 10 класса

Задача 4

В-1 Найдите наименьшее значение выражения $(a + 2)(b + 2)(c + 2)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 1$.

Ответ: 27

Решение. (Для 1 варианта) По неравенству о средних имеем

$$(a + 2)(b + 2)(c + 2) = (a + 1 + 1)(b + 1 + 1)(c + 1 + 1) \geq 3a^{\frac{1}{3}}3b^{\frac{1}{3}}3c^{\frac{1}{3}} = 27(abc)^{\frac{1}{3}},$$

причём равенство достигается при $a = b = c = 1$.

В-2 Найдите наименьшее значение выражения $(a + 3)(b + 3)(c + 3)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 1$.

Ответ: 64

В-3 Найдите наименьшее значение выражения $(a + 4)(b + 4)(c + 4)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 8$.

Ответ: 216

В-4 Найдите наименьшее значение выражения $(a + 6)(b + 6)(c + 6)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 27$.

Ответ: 729

Задача 5

В-1 В ресторане «Обломов» выпекают 3 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 4 пирожка, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 4 пирожка?

Ответ: 15

Решение. Решение. Задача на число сочетаний с повторениями. Количество выбираемых элементов $r = 4$. Количество видов продукции $n = 3$. То есть, количество «перегородок» $n - 1 = 2$.

Воспользуемся формулой $C_{r+n-1}^r = \frac{(r+n-1)!}{r! \cdot (n-1)!} = C_6^4 = 15$

В-2 В ресторане «Обломов» выпекают 4 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами и с капустой. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 5 пирожков, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 5 пирожков?

Ответ: 56

В-3 В ресторане «Обломов» выпекают 4 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами и с капустой. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 4 пирожка, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 4 пирожка?

Ответ: 35

В-4 В ресторане «Обломов» выпекают 3 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 5 пирожков, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 5 пирожков?

Ответ: 21

Задача 6

В-1 Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot ||| - y| - y| - y| = 2023.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму $|x| + |y|$ для той пары решений, для которых величина $|x| + |y|$ минимальна.

Ответ: 136

Решение. Для первого варианта: заметим, что $2023 = 7 \cdot 17^2$.

1) Если $x \geq 0$, то первый множитель равен $3x$ и уравнение решений не имеет.

2) Если $y \leq 0$, то второй множитель равен $-3y$ и уравнение решений не имеет.

3) Пусть $x < 0$, $y > 0$. Уравнение примет вид $-xy = 0$, откуда возможны решения: $x = -1$; $y = 2023$, $x = -7$; $y = 289$, $x = -17$; $y = 119$, $x = -119$; $y = 17$, $x = -2023$; $y = 1$.

$\min(|x| + |y|) = 17 + 119 = 136$.

В других вариантах: $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Все решения: $(-1; 2024)$, $(-2; 1012)$, $(-4; 506)$, $(-8; 253)$, $(-11; 184)$, $(-22; 92)$, $(-44; 46)$ и т.д. $\min(|x| + |y|) = 44 + 46 = 90$.

$2021 = 43 \cdot 47$. Все решения: $(-1; 2021)$, $(-43; 47)$, $(-47; 43)$, $(-2021; 1)$. $\min(|x| + |y|) = 43 + 47 = 90$.

$2030 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$. Все решения: $(-1; 2030)$, $(-2; 1015)$, $(-5; 406)$, $(-7; 290)$, $(-10; 203)$, $(-14; 145)$, $(-29; 70)$, $(-35; 58)$, и т.д. $\min(|x| + |y|) = 35 + 58 = 93$.

В-2 Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot ||| - y| - y| - y| = 2024.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму $|x| + |y|$ для той пары решений, для которых величина $|x| + |y|$ минимальна.

Ответ: 90

В-3 Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot ||| - y| - y| - y| = 2021.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму $|x| + |y|$ для той пары решений, для которых величина $|x| + |y|$ минимальна.

Ответ: 90

В-4 Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot ||| - y| - y| - y| = 2030.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму $|x| + |y|$ для той пары решений, для которых величина $|x| + |y|$ минимальна.

Ответ: 93

Задача 7

В-1 Сумма первых n членов последовательности $\{a_n\}$ определяется формулой

$$S_n = 3^{n-1} - \frac{1}{3}.$$

На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем пятый ?

Ответ: 24200%

Решение. Решение (для первого варианта) По условию $a_1 = S_1 = 3^0 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Также

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3^{n-1} - 3^{n-2} = 2 \cdot 3^{n-2}.$$

Заметим, что a_1 удовлетворяет последней формуле. Значит, данная последовательность — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 3$ и первым членом $a_1 = \frac{2}{3}$. (Заметим, что тот факт, что это геометрическая прогрессия, здесь несущественен, важно, что найдена формула общего члена). Тогда $a_{10} = 2 \cdot 3^{10-2} = 2 \cdot 3^8$, $a_5 = 2 \cdot 3^3$. Первое число больше второго на

$$\frac{2 \cdot 3^8 - 2 \cdot 3^3}{2 \cdot 3^3} \cdot 100\% = (3^5 - 1) \cdot 100\% = 24200\%$$

В-2 Сумма первых n членов последовательности $\{a_n\}$ определяется формулой

$$S_n = 4^{n-1} - \frac{1}{4}.$$

На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем пятый ?

Ответ: 102300%

В-3 Сумма первых n членов последовательности $\{a_n\}$ определяется формулой

$$S_n = 3^{n-1} - \frac{1}{3}.$$

На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем четвёртый ?

Ответ: 72800%

В-4 Сумма первых n членов последовательности $\{a_n\}$ определяется формулой

$$S_n = 4^{n-1} - \frac{1}{4}.$$

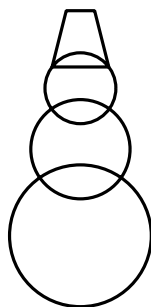
На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем шестой ?

Ответ: 25500%

Задача 8

В-1 Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 10, 7 и 5. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобокой трапеции со сторонами 8, 8, 8 и 4.

Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.



Ответ: 41.6

Решение. Высота снеговика складывается из пяти слагаемых:

- 1) радиус нижнего круга,
- 2) расстояние между центрами нижнего и среднего кругов,
- 3) расстояние между центрами верхнего и среднего кругов,
- 4) расстояние от центра верхнего круга до нижнего края ведра,
- 5) высота ведра.

Считаем.

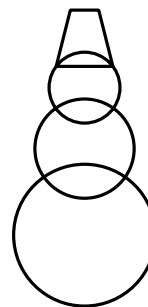
- 1) Радиус нижнего круга равен 10.
- 2) Гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 10 и 7, т. е. $\sqrt{149}$.
- 3) Гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 5 и 7, т. е. $\sqrt{74}$.
- 4) Катет треугольника с гипотенузой 5 и другим катетом $8/2$, т. е. $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

5) Высота трапеции равна $\sqrt{8^2 - \left(\frac{8-4}{2}\right)^2} = \sqrt{60}$.

Итого, $10 + \sqrt{149} + \sqrt{74} + \sqrt{60} + 3 = 41.55484 \dots \approx 41.6$.

В-2 Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 11, 9 и 6. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобокой трапеции со сторонами 9, 9, 9 и 5.

Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.

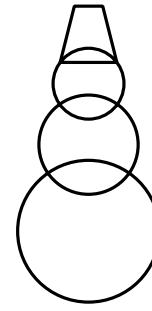


Ответ: 48.8

В-3 Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 10, 8 и 5. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобоочной трапеции со сторонами 8, 8, 8 и 4.

Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.

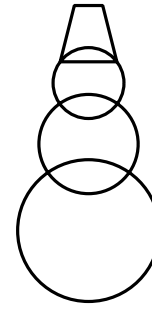
Ответ: 43.0



В-4 Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 11, 8 и 6. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобоочной трапеции со сторонами 9, 9, 9 и 5.

Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.

Ответ: 47.3



Олимпиада школьников «Ломоносов», математика
Отборочный этап 2023/2024 учебного года
Баллы за верные ответы на задания

Номер задания	5-6 классы	7-8 классы	9 класс	10 класс	11 класс
1	15	10	10	10	10
2	15	10	10	10	10
3	15	10	10	10	10
4	15	15	10	10	10
5	20	15	10	10	10
6	20	20	15	15	15
7	–	20	15	15	15
8	–	–	20	20	20