

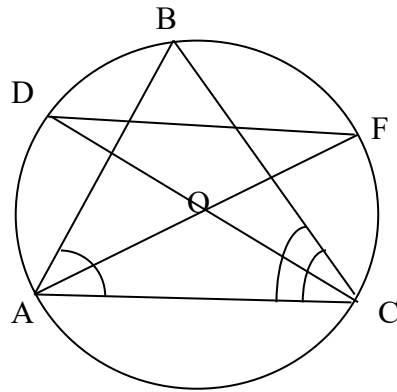
Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ

Заключительный этап (11 класс)

Задание 1 (20 баллов).

Область возможного месторождения нефти задана на схеме первой окружностью, в которую вписан треугольник с углами 65 и 70 градусов. После повторных исследований область возможного месторождения обозначена второй окружностью, описанной вокруг треугольника, вершинами которого являются концы хорд первой окружности, выходящие из вершин, соответствующих заданным углам и содержащих высоты треугольника, и точка пересечения этих хорд. Расстояние между концами хорд равно $2\sqrt{2}$. Вычислите радиус второй окружности.

Решение:

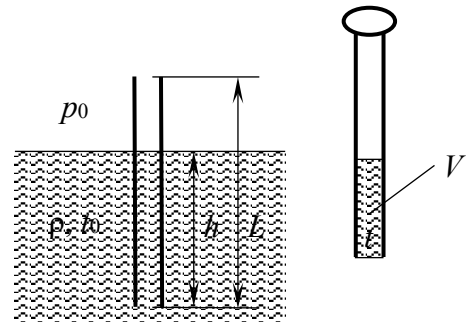


- 1) DC и AF-хорды, пересекаются в точке O
- 2) $DF = 2\sqrt{2}$
- 3) Угол BAC = 65 градусов. Угол BCA = 70 градусов
- 4) Угол FAC = 20 градусов, Угол DCA = 25 градусов, Угол AOC=135 градусов
- 5) Угол AOC = Углу DOF = 135 градусов
- 6) Теорема синусов для треугольника DOF: $DF = 2R\sin 135$
- 7) $R = 2$

Ответ: $R = 2$

Задание 2 (15 баллов).

Чтобы перенести небольшое количество жидкости из сосуда в труднодоступное место, взяли открытую с двух концов вертикальную цилиндрическую стеклянную трубку длиной $L = 30$ см и погрузили один из её концов в жидкость на глубину h (см. рисунок). Затем, закрыв верхнее отверстие трубки пальцем, перенесли оставшееся в трубке количество жидкости в требуемое место. На какую глубину h нужно было погрузить конец трубки в жидкость, чтобы доставить в нужное место объём $V = 3$ см³ жидкости, если при перенесении жидкости трубка с её содержимым нагрелась в руке экспериментатора до температуры $t = 37$ °C, вследствие чего часть жидкости вылилась из



трубки? Исходная температура жидкости и трубки $t_0 = 27^\circ\text{C}$. Плотность жидкости $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, радиус отверстия трубки $r = 3 \text{ мм}$, атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Жидкость считать несжимаемой, капиллярными явлениями пренебречь.

Решение.

Воздух в трубке описываем уравнением Клапейрона – Менделеева ($pV = \nu RT$). После того как закрыли пальцем верхнее отверстие трубки, количество воздуха в трубке $\nu = \text{const}$. Пусть $S = \pi r^2$ – площадь поперечного сечения внутреннего канала трубки, а p – давление воздуха в трубке в конечном состоянии. Тогда из уравнения Клапейрона – Менделеева следует равенство (объединённый газовый закон):

$$\frac{p_0(L-h)S}{T_0} = \frac{p(LS-V)}{T}.$$

Столбик жидкости в конечном состоянии неподвижен, поэтому равна нулю сумма проекций на вертикальную ось действующих на него внешних сил:

$$p_0S - pS - mg = 0.$$

Отсюда

$$p = p_0 - \frac{mg}{S}.$$

Подставим этот результат в объединённый газовый закон. Упростив, получим:

$$\frac{p_0(L-h)}{T_0} = \frac{\left(p_0 - \frac{mg}{S}\right)\left(L - \frac{V}{S}\right)}{T},$$

откуда

$$h = L - \left(L - \frac{V}{S}\right)\left(1 - \frac{mg}{p_0S}\right)\frac{T_0}{T}.$$

С учётом массы столбика жидкости в конечном состоянии $m = \rho V$ окончательно получим:

$$h = L - \left(L - \frac{V}{\pi r^2}\right)\left(1 - \frac{\rho V g}{p_0 \cdot \pi r^2}\right)\frac{T_0}{T}.$$

Численный ответ:

$$\begin{aligned} h &= 0,3 - \left(0,3 - \frac{3 \cdot 10^{-6}}{3,14 \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 10}{10^5 \cdot 3,14 \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2}\right) \cdot \frac{273 + 27}{273 + 37} = \\ &= 0,3 - 0,1938 \cdot 0,9894 \cdot 0,9677 \approx 0,1144 \text{ м} \approx 11,4 \text{ см}. \end{aligned}$$

Ответ: $h \approx 11,4 \text{ см}$

Задание 3 (20 баллов).

В прямоугольной Декартовой системе координат Оху изобразите множества точек с координатами (х,у), возможной сейсмической активности при условии, что переменная у ограничена значениями 1 и 5, а значения переменной х удовлетворяют неравенству

$$\frac{5}{2x^2 + 6x} + x^2 + 3x \leq -\frac{13}{4}$$

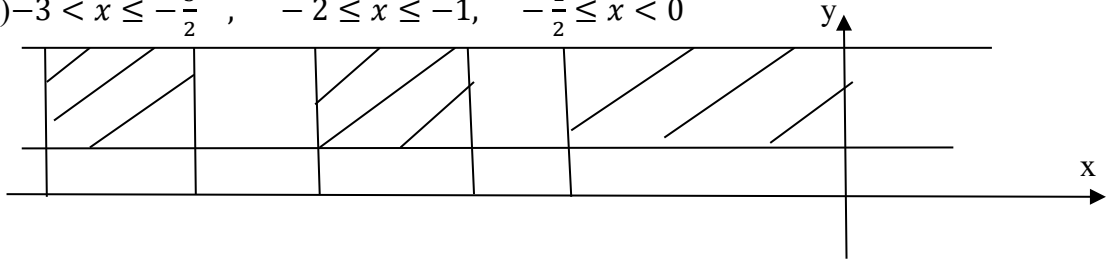
Решение:

1) Замена $x^2 + 3x = t, t \geq -\frac{9}{4}$

$$2) \begin{cases} \frac{5}{2t} + t \leq -\frac{13}{4} \\ t \geq -\frac{9}{4} \end{cases}$$

$$3) -\frac{9}{4} \leq t < 0, \quad 2 \leq t \leq \frac{5}{2}$$

$$4) -3 < x \leq -\frac{5}{2}, \quad -2 \leq x \leq -1, \quad -\frac{1}{2} \leq x < 0$$



Ответ: $(-3; -2,5] \cup [-2; -1] \cup [-0,5; 0)$

Задание 4 (15 баллов).

Узкий пучок света падает по нормали на центр боковой грани прозрачного стеклянного куба со стороной $b = 7$ см и затем, пройдя его насквозь, падает в точке M на вертикальный экран \mathcal{E} , расположенный за кубом (см. рис. 1). Если куб начинает вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр O

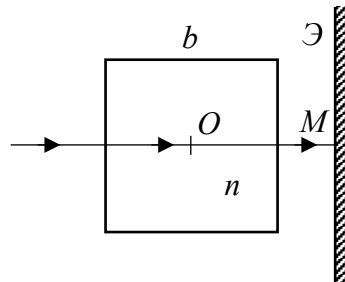


Рис. 1

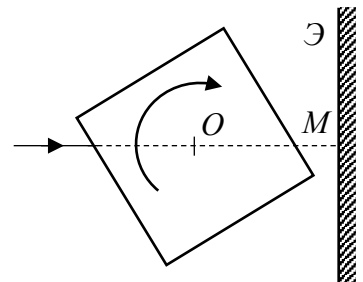


Рис. 2

куба перпендикулярно плоскости рисунка (см. рис. 2), то точка падения луча на экран начинает перемещаться по экрану. Найдите максимальное удаление точки падения луча на экран \mathcal{E} от её начального положения M при вращении куба. Отражениями луча на внутренней поверхности куба пренебречь. Показатель преломления куба $n = 1,58$.

Решение.

Луч света попадает на экран в точке N , пройдя куб как плоскопараллельную пластину. Поэтому при вращении куба $BN \parallel AM$. Пусть $BD \perp AM$. Тогда искомое расстояние $MN = BD$. Из чертежа следует, что

$$BD = AB \sin(\alpha - \beta).$$

В свою очередь,

$$AB = \frac{AC}{\cos \beta} = \frac{b}{\cos \beta}.$$

Таким образом,

$$MN = \frac{b \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} = b(\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta).$$

Из закона преломления (в данном случае: $\sin \alpha = n \sin \beta$) получаем:

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}, \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

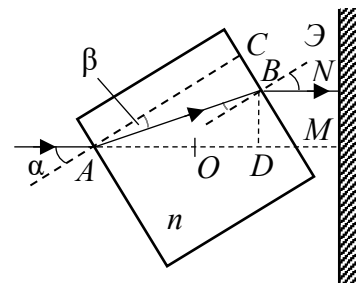
Отсюда

$$MN = b \sin \alpha \cdot \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}\right).$$

Нетрудно убедиться, что выражение

$$MN = \frac{b \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}$$

при выполнении закона преломления монотонно растёт с увеличением α при $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$. Действительно, с ростом α положительный числитель дроби в выражении для MN растёт, а



положительный знаменатель убывает. Из условия задачи следует, что при вращении куба наибольшее значение α равно 45° . Поэтому

$$\max(MN) = b \sin 45^\circ \cdot \left(1 - \frac{\cos 45^\circ}{\sqrt{n^2 - \sin^2 45^\circ}}\right) = b \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2n^2 - 1}}\right).$$

Числовой ответ:

$$\max(MN) = 7 \text{ см} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1,58^2 - 1}}\right) \approx 2,47 \text{ см}.$$

Ответ: $\max(MN) \approx 2,47 \text{ см}.$

Задание 5 (15 баллов).

Какие горные породы образуются при кристаллизации из магмы? Какое они имеют практическое значение?

Ответ:

Магма – природный, чаще всего силикатный, горячий расплав, возникающий в земной коре или верхней мантии. Горные породы, кристаллизующиеся из магмы при её остывании, называются магматическими.

По месту кристаллизации магматические породы делятся на эффузивные и интрузивные. Примерами магматических горных пород являются гранит, базальт, габбро, лабрадорит, кимберлит и т.д. Магма на 45-75% состоит из кремнезема, поэтому большинство магматических пород состоят из минералов класса силикаты (полевые шпаты, оливин, пироксены, слюды и т.д.).

Многие магматические горные породы относят к строительным материалам (гранит, лабрадорит и другие) – облицовка сооружений, дорожное строительство и т.д. Иногда магматические горные породы вмещают рудные и нерудные полезные ископаемые.

Например, с дунитами связаны месторождения хрома, с кимберлитами – месторождения алмазов, а с нефелиновыми сиенитами – залежи апатита. Магматическое происхождение имеют и медно-никелевые месторождения. В ответе приветствуются и другие примеры практического значения магматических горных пород.

Задание 6 (15 баллов).

Внимательно изучите фотографию и опишите геологические процессы, которые формируют данное побережье. Как образуются элементы рельефа, видимые на фотографии?



Ответ:

На фотографии изображено морское побережье. В его формировании участвовали такие экзогенные процессы, как: геологическая работа моря (преимущественно), ветра, выветривание и гравитационные явления. Для полного ответа на вопрос необходимо описать вклад всех четырех процессов.

Работа моря выражается в разрушении берега и аккумуляции (накоплении) разрушенного материала. Разрушительная работа моря (абразия) осуществляется сильными волнами, которые подмывают берег, вызывая его обрушение и формирование отвесного уступа – клифа. Из-за неоднородности и трещиноватости пород более прочные породы образуют одиночные скалы – останцы (кекуры) и арки. Одновременно море аккумулирует разрушенный материал и формирует пляж.

Разрушение пород берегового уступа усиливается работой ветра (выдувание, механическое обтачивание переносимыми частицами), а также выветриванием. В данном случае преобладает биологическое выветривание (разрушение пород корнями деревьев). Ослабление прочности береговых уступов приводит к гравитационным явлениям – осыпям, обвалам.