

Олимпиада «Ломоносов» 2023/24

Инженерные науки

11 классы

Блок: химия.

Задача 1.1.

Для определения кислотности почвы было взято несколько образцов с разных участков земли. Определение проводили методом кислотно-основного титрования. При этом для нейтрализации почвенных вытяжек объемом 100 мл потребовалось следующее количество кислоты (HCl , 10^{-5} М) или щелочи (NaOH , 10^{-5} М):

Проба	HCl , 10^{-5} М, мл	NaOH , 10^{-5} М, мл
1	3.9	
2	-	1.6
3	-	79.4

Рассчитайте pH каждой пробы и предложите оптимальный вариант посадки следующих культур, если известно, что площадь первого участка составляет 1.2 га, второго – 1.8 га, а третьего – 2.6 га. В таблице указаны оптимальны pH почв для посадки, а также необходимая площадь.

Растение	Оптимальные значения pH	Необходима площадь, м^2
Овёс	5,0–7,7	7000
Кукуруза	6,0–7,0	4000
Гречиха	4,7–7,5	6000
Горох	6,0–7,0	4000
Чай	4,8–6,2	7000
Картофель	5,0–5,5	6000
Люцерна	7,0–8,0	4000

Люпин	4,5–6,0	5000
Капуста	6,7–7,4	5000
Морковь	5,5–7,0	2000
Огурцы	6,0–7,9	3000
Хлопчатник	6,5–9,0	3000

Возможное решение:

$pH = -\log_{10}C(H^+)$ (для кислых растворов, пробы 2 и 3)

$pH = 14 - (-\log_{10}C(OH^-))$ (для щелочных растворов, проба 1)

$C(H^+)_{\text{пробы}} \cdot V_{\text{пробы}} = C(NaOH) \cdot V(NaOH)$ для 2 и 3

$C(OH^-)_{\text{пробы}} \cdot V_{\text{пробы}} = C(HCl) \cdot V(HCl)$ для 1

- $pH(1)=7.6$
- $pH(2)=6.8$
- $pH(3)=5.1$

$S(1)=12\,000\text{ м}^2$

Люцерна – 4000

+ Овес, огурцы, хлопчатник в любом соотношении на 8000 м²

$S(2) = 18\,000\text{ м}^2$

Кукуруза - 4000

Горох - 4000

Капуста - 5000

Морковь - 2000

+ Овес, гречиха, огурцы, хлопчатник в любом соотношении в сумме на 7000 м²

$S(3) = 26\,000\text{ м}^2$

Чай - 7000

Картофель - 6000

Люпин – 5000

+ Овес, гречиха в любом соотношении в сумме на 8000 м²

Критерии:

1. Правильно рассчитаны рН проб – 5 баллов за каждый (максимум=15 баллов).
2. Дан правильный вариант ответа с обоснованием – 7 баллов.
3. Указан 1 вариант посадки – 2 балла/ предложен дополнительный вариант посадки – 3 балла.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов.

Блок: физика и инженерные науки:

Задача 2.1.

Три соприкасающихся небольших абсолютно твердых шарика находятся на гладкой вертикальной направляющей на высоте $h=1$ м. Масса нижнего шарика в $n=4$ раза больше массы верхнего. Шарики отпускают, и они падают на абсолютно твердую горизонтальную поверхность. При какой массе среднего шарика (в единицах массы нижнего) верхний поднимется на максимальную высоту? Найдите эту высоту. и предельно возможное ее значение при произвольных массах шариков. Все столкновения считать абсолютно упругими. Размер шариков мал по сравнению с высотой.

Возможное решение:

Предположим, что между падающими шариками существует исчезающе малый зазор. Тогда нижний (самый тяжелый) шарик переотразится со скоростью $v_0 = \sqrt{2gh}$. В системе отсчета двух остальных шариков он будет налетать на них со скоростью $v_1 = 2v_0$.

Запишем законы сохранения энергии и импульса для двух столкновений:

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v_2$$

$$m_1 v_1^2 = m_1 v'^2_1 + m_2 v_2^2$$

$$m_2 v_2 = m_3 v_3 + m_2 v'_2$$

$$m_2 v_2^2 = m_3 v_3^2 + m_2 v'^2_2$$

Исключая из полученной системы промежуточные скорости, находим:

$$v_3 = \frac{4v_1}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\left(1 + \frac{m_3}{m_2}\right)}$$

Знаменатель последнего выражения равен

$$1 + \frac{m_3}{m_1} + \sqrt{\frac{m_3}{m_1}} \left(\frac{m_2}{\sqrt{m_1 m_3}} + \frac{\sqrt{m_1 m_3}}{m_2} \right).$$

Минимум выражения в скобках достигается при $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$ как следует из неравенства $x + \frac{1}{x} \geq 2, x > 0$. Поэтому $m_1 = nm, m_2 = \sqrt{nm}, m_3 = m$. При этом

$$v_3 = \frac{4nv_1}{(\sqrt{n}+1)^2} = \frac{8nv_0}{(\sqrt{n}+1)^2} = \frac{32}{9} v_0$$

а скорость верхнего шарика относительно земли после отскока

$$v_3 - v_0 = \frac{23}{9} v_0$$

Следовательно, высота, на которую он поднимется при оптимальном значении промежуточной массы $m_2 = 2m$ равна $H = h \left(\frac{23}{9}\right)^2 = 10.38$ м.

Максимальное значение этой высоты будет если нижний шарик намного тяжелее верхнего и равно 49 м.

Критерии:

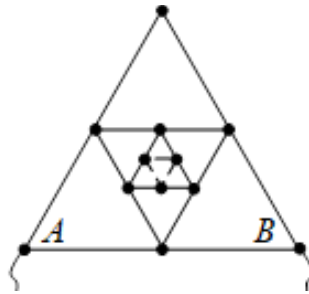
1. Описана идея о том, что нижний шарик отразится первым и переход в систему отсчета, где остальные шарики покоятся — 4 балла.
2. Записаны законы сохранения энергии и импульса для абсолютно упругого столкновения шариков — 6 баллов.
3. Правильно решена система уравнений для скоростей и получено выражение для скорости верхнего шарика в рассматриваемой СО и в СО, связанной с наблюдателем — 6 баллов.
4. Проведен анализ выражения для скорости, найдена промежуточная масса, максимальное значение скорости и высоты отскока верхнего шарика — 7 баллов.
5. Проведен анализ высоты отскока в случае произвольных масс, найдено оптимальное соотношение между массами и соответствующая высота — 2 балла.
6. Ошибка в расчетах — уменьшение на 5 баллов

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов.

Блок: физика

Задача 3.1.

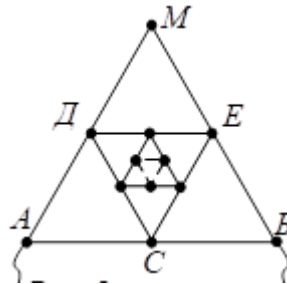
Фигура, изображенная на рис. 1, сделана из проволоки постоянного сечения. Число впаянных (вложенных) друг в друга равносторонних треугольников очень велико. Сторона самого большого треугольника $a_1 = 1$ м. Сопротивление одного метра проволоки равно 1 Ом. Найти сопротивление между клеммами А и В.



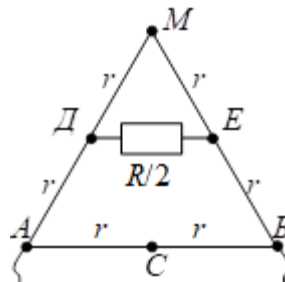
Возможное решение:

Каждый последующий треугольник в 2 раза меньше предыдущего (рис. 5), поэтому сопротивление между точками D и E $\triangle DEC$ (изъятый из $\triangle AMB$ и содержащего все меньшие треугольники внутри себя) будет в 2 раза меньше искомого сопротивления.

Из симметрии схемы следует возможность рассоединения проводников в т. С.



Тогда эквивалентная схема будет такой:



Если искомое сопротивление равно R , то $R_{DE} = R/2$. Обозначив сопротивление половины большого ребра через r , для верхней части получим

$R_{DME} = \frac{2rR}{4r + R}$. Участки AD , DME и EB соединены последовательно, поэтому

$R' = \frac{2rR}{4r + R} + 2r = \frac{4Rr + 8r^2}{4r + R}$. Эта группа подключена параллельно к участку

AB , следовательно $\frac{1}{R} = \frac{4r + R}{4Rr + 4r^2} + \frac{1}{2r}$. Получившееся квадратное уравнение

$3R^2 + 4rR - 8r^2 = 0$ имеет положительный корень $R = \frac{(\sqrt{7} - 1) \cdot 2r}{3}$. Поскольку

$$r = \rho a / 2, \text{ получаем } R = \frac{\sqrt{7} - 1}{3} \rho a = 0,43 \rho a$$

Критерии:

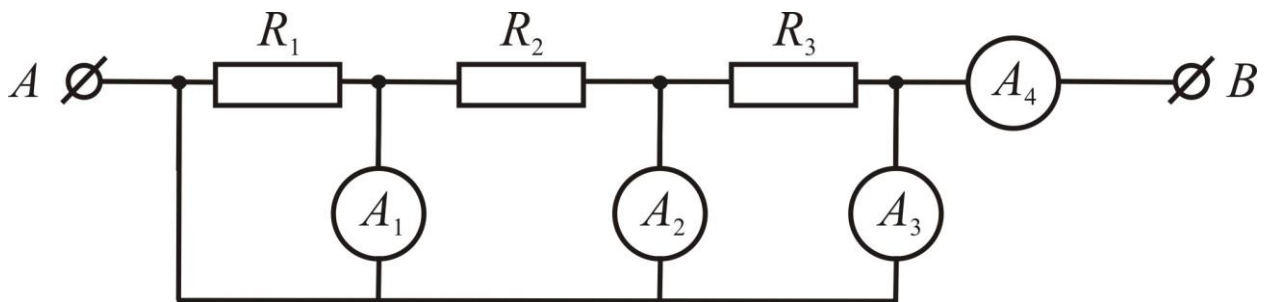
1. Обоснована идея самоподобия схемы и связь между сопротивлениями подобных элементов — 7 баллов.
2. Обоснована идея размыкания цепи в точке С. — 7 баллов.
3. Вычерчена эквивалентная схема — 5 баллов.
4. Проведен расчет сопротивления и получен правильный ответ — 6 баллов.
5. Арифметическая ошибка- уменьшение на 1 балл.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов.

Блок: физика.

Задача 4.1.

Несколько резисторов сопротивлениями $R_1 = 8 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_3 = 4 \text{ Ом}$ и четыре неидеальных амперметра, имеющих сопротивления $R_{A1} = 8 \text{ Ом}$, $R_{A2} = 8 \text{ Ом}$, $R_{A3} = 2 \text{ Ом}$ и $R_{A4} = 2 \text{ Ом}$ соединены в электрическую цепь, схема которой показана на рисунке. Напряжение на клеммах $U_{AB} = 10,8 \text{ В}$. Определите, чему равно общее сопротивление $R_{\text{общ}}$ цепи на участке AB и найдите показания амперметров A_1 , A_2 , A_3 и A_4 .

**Возможное решение:**

Поскольку неидеальные амперметры обладают сопротивлениями, то их можно представить их как идеальные амперметры A_1 , A_2 , A_3 и A_4 , последовательно соединённые с резисторами R_{A1} , R_{A2} , R_{A3} , R_{A4} .

Перерисуем эквивалентную схему электрической цепи:

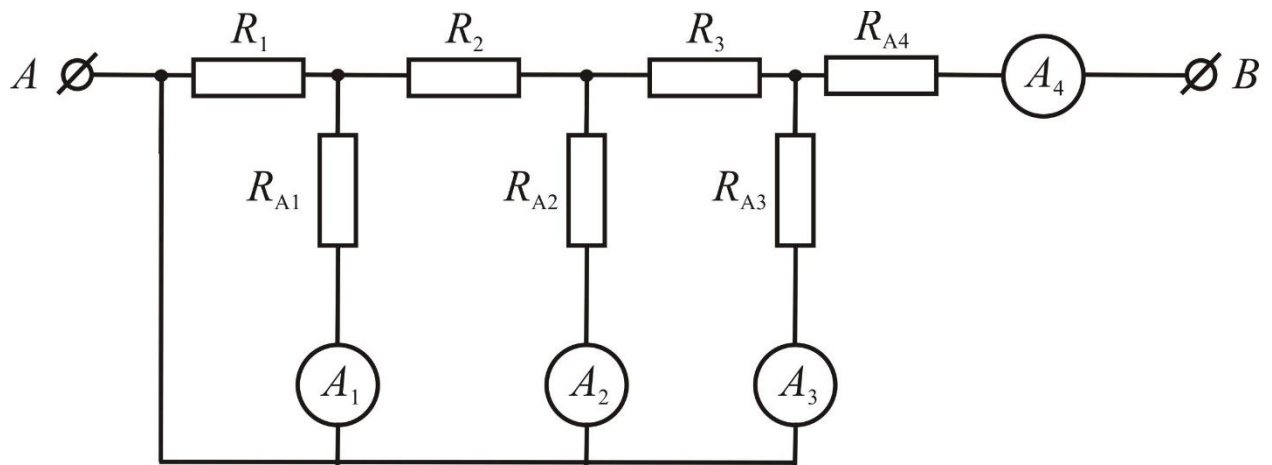


Рис.1.

Далее сводим нашу электрическую схему к последовательности последовательно и параллельно соединённых элементов:

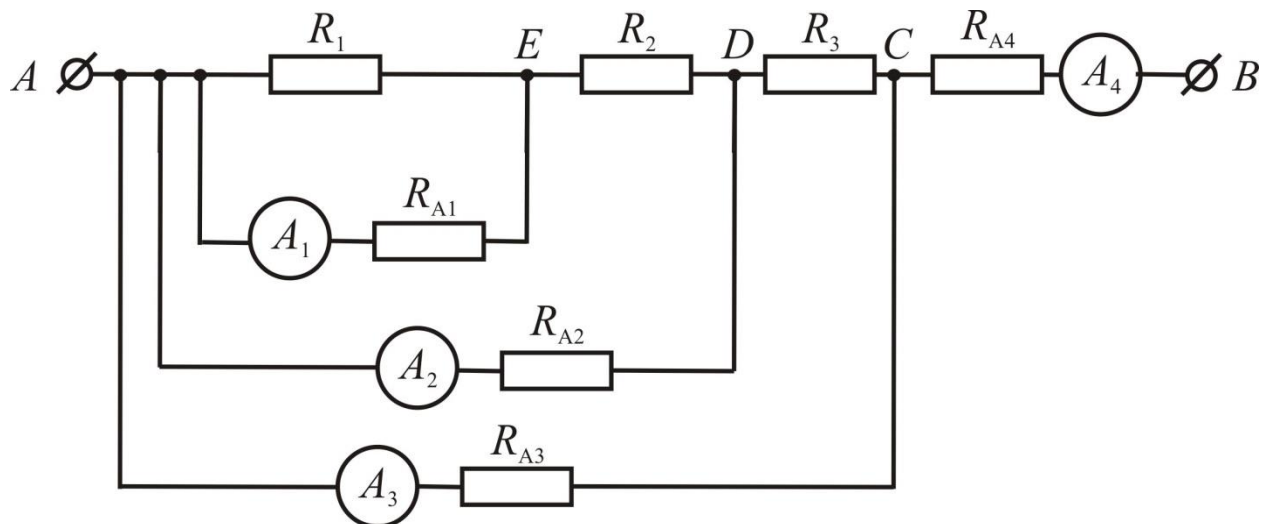


Рис. 2.

Из получившейся схемы уже легко определить общее сопротивление цепи на участке AB.

$$\text{Сопротивление участка } AE: R_{AE} = \frac{R_1 \cdot R_{A1}}{R_1 + R_{A1}} = \frac{8 \cdot 8}{8 + 8} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (Ом)}$$

$$\begin{aligned} &\text{Сопротивление участка } AD: \\ R_{AD} &= \frac{(R_{AE} + R_2) \cdot R_{A2}}{(R_{AE} + R_2) + R_{A2}} = \frac{(4 + 4) \cdot 8}{(4 + 4) + 8} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (Ом)} \end{aligned}$$

Сопротивление участка AC:

$$R_{AC} = \frac{(R_{AD} + R_3) \cdot R_{A3}}{(R_{AD} + R_3) + R_{A3}} = \frac{(4 + 4) \cdot 2}{(4 + 4) + 2} = \frac{16}{10} = 1,6 \text{ (Ом)}$$

Сопротивление участка AB :

$$R_{\text{общ}} = R_{A4} + R_{AC} = 2 + 1,6 = 3,6 \text{ (Ом)}.$$

$$\text{Сила тока, протекающего через амперметр } A_4: I_4 = \frac{U_{AB}}{R_{\text{общ}}} = \frac{10,8 \text{ В}}{3,6 \text{ Ом}} = 3 \text{ А}.$$

После прохождения амперметра A_4 и резистора R_{A4} в точке C ток разделяется на две ветви: в нижней ветви через резистор $R_{A3} = 2 \text{ Ом}$, соединённый последовательно с идеальным амперметром A_3 и имеющий в 4 раза меньшее сопротивление, чем сопротивление верхней ветви, будет протекать в 4 раза больший ток $I_3 = 2,4 \text{ А}$, а в резисторе R_3 сила тока будет равна $I_{R3} = I_4 - I_3 = 3 \text{ А} - 2,4 \text{ А} = 0,6 \text{ А}$.

В точке D ток снова разделяется на две ветви, но поскольку в данном случае сопротивления обеих ветвей одинаковы, то данный ток разделяется пополам: амперметр A_2 покажет силу тока $I_2 = I_{R3}/2 = 0,6/2 = 0,3 \text{ А}$.

Аналогично, после прохождения резистора R_2 в точке E ток снова разделяется поровну, поскольку сопротивления R_1 и R_{A1} равны. Поэтому амперметр A_1 покажет силу тока $I_1 = I_2/2 = 0,3/2 = 0,15 \text{ (А)}$.

Ответ: Общее сопротивление электрической цепи на участке AB равно $R_{\text{общ}} = 3,6 \text{ Ом}$.

Показание амперметра A_1 : $I_1 = 0,15 \text{ А}$.

Показание амперметра A_2 : $I_2 = 0,3 \text{ А}$.

Показание амперметра A_3 : $I_3 = 2,4 \text{ А}$.

Показание амперметра A_4 : $I_4 = 3 \text{ А}$.

Критерии.

- 1) Представление неидеальных амперметров как идеальных амперметров, последовательно соединённых с резисторами. Приведение схемы электрической цепи к рис. 1 — 1 балл.
- 2) Приведение схемы электрической цепи к рис. 2 — 4 балла.
- 3) Расчёт общего сопротивления цепи. — 10 баллов.
- 4) Нахождение сил токов, текущих через амперметры A_1 , A_2 , A_3 и A_4 — 10 баллов.
- 5) Ошибка при расчете — уменьшение на 5 баллов.

Итого: 25 баллов