

Олимпиада «Ломоносов» 2023/24

Инженерные науки

6-8 классы	1
9-10 классы	5

6-8 классы

Задача 1.

Семья едет на автомобиле из дома на дачу. Первую половину пути они движутся по автомагистрали, а затем сворачивают на проселочную дорогу и скорость автомобиля уменьшается в три раза. Во сколько раз путь, пройденный за первую половину времени движения по автомагистрали больше, чем за вторую? Чему равна средняя скорость за первую половину времени, если средняя скорость на всем пути $v_0 = 60 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$?

Возможное решение:

Обозначим за v скорость на второй половине пути. Тогда на первой она равна nv , а все время движения

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S}{2v} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)$$

Так как $n > 1$, то за вторую половину времени автомобиль пройдет путь $S_2 = v \frac{t}{2} = \frac{S(n+1)}{4n}$, а за первую $S_1 = S - S_2 = \frac{S(3n-1)}{4n}$.

Тогда искомое отношение $\frac{3n-1}{n+1} = 2$.

Время движения можно записать в виде: $t = \frac{S}{v_0}$. Тогда

$$v_1 = \frac{S_1}{t/2} = v_0 \frac{2S_1}{S} = v_0 \frac{3n-1}{2n} = 80 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Критерии:

1. Правильная запись выражения для соотношения скоростей – 2 балла
2. Расчет времени прохождения каждой половины пути — 7 баллов.
2. Расчет пройденного пути на каждом временном интервале— 9 баллов.
3. Формула для средней скорости — 7 баллов.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов.

Задача 2.

Пропускная способность аэропорта Шереметьево составляет 110 бортов в час (взлетов и посадок). В среднем вместимость одного самолета составляет 180 человек, при этом средняя заполненность салона – 80%.

За 2022 год пассажиропоток аэропорта составил 28.4 млн человек.

1. Рассчитайте, сколько в среднем взлетов/посадок в час происходит днем, если считать, что ночью с 1:00 до 5:00 количество бортов уменьшается в 10 раз.

2. Во сколько раз больше пассажиров мог бы обслужить аэропорт, если бы 24 часа в сутки работал с максимальной пропускной способностью?

Возможное решение:

Один самолет в среднем перевозит $180 \cdot 0.8 = 144$ пассажира

За день аэропорт обслуживает $28.4 \text{ млн} / 365 \text{ дней} = 77\,808 \text{ чел/день}$

В сутках 24 часа, из них 4 часа (с 1:00 до 5:00) – ночь и 20 часов – день. Примем за x количество бортов в час ночью, составим уравнение:

$$4 \cdot 144x + 20 \cdot 144 \cdot 10x = 77\,808$$

$$576x + 28800x = 77\,808$$

$$X = 77808 / (28800 + 576) = 2.6$$

Днем происходит $10x = 26$ взлетов\посадок в час в среднем

Если бы аэропорт работал на максимум, он бы обслуживал в час:

$$144 \cdot 110 = 15840 \text{ человек}$$

В год:

$$15840 \cdot 24(\text{часа}) \cdot 365(\text{дней}) = 138\,758\,400 \text{ человек, что в}$$

$$138\,758\,400 / 28\,400\,000 = 4.9 \text{ раз больше, чем сейчас}$$

Критерии:

1. Ответ на первый вопрос верный, но решения нет — 3 балла
1. Ответ на второй вопрос верный, но решения нет — 2 балла
2. Описаны правильно формулы и верна логика — 10 баллов.
3. Проведены расчеты и получен верный ответ — 10 баллов.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов.

Задача 3.

При закалке ножа кузнец Прохор раскаленный железный клинок массой $m_{\text{ж}} = 100 \text{ г}$ при температуре $t_{\text{ж}} = 600^\circ\text{C}$ бросает в воду массой $m_{\text{в}} = 200 \text{ г}$ при температуре $t_{\text{в}} = 20^\circ\text{C}$. Определить установившуюся температуру воды, пренебрегая теплообменом с окружающей средой за время ее установления.

Теплоемкость воды $c_v = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$, железа $c_{\text{ж}} = 640 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$, удельная теплота парообразования воды $L_v = 2.3 \frac{\text{МДж}}{\text{кг}}$.

Возможное решение:

До достижения железом температуры 100°C при теплообмене испарится часть воды массой:

$$m_1 = \frac{c_{\text{ж}} m_{\text{ж}} (t_{\text{ж}} - t_{\text{к}})}{L_v}$$

Оставшаяся масса воды нагреется при теплообмене согласно уравнения теплового баланса:

$$(m_v - m_1) c_v (t - t_v) = c_{\text{ж}} m_{\text{ж}} (t_{\text{к}} - t)$$

Подставляя численные значения, получаем $t = 26,14^\circ\text{C}$.

Критерии:

1. Учет испарения воды – 5 баллов
2. Уравнение теплового баланса воды и железа— 10 баллов / уравнение теплового баланса воды и железа с учетом испарения воды – 13 баллов.
3. Численный расчет — 7 баллов.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов.

Задача 4.

Содержание витамина С в разных фруктах указано в таблице. Сколько яблок, бананов и апельсинов необходимо в неделю выдавать 6-классникам в столовой летнего лагеря, чтобы покрыть необходимость в витамине С. Норма потребления для детей 9-13 лет составляет примерно 50 мг/день. Фрукты выдаются только целыми. Допускается превышение дневной дозы не более, чем в два раза, однако суммарное количество за неделю должно быть в пределах нормы, при этом количество выдаваемых фруктов в день от 1 до 2. Предложите все возможные варианты.

Фрукт	Средний вес фрукта	Содержание витамина на 100 г
яблоко	200 г	5 мг
банан	150 г	10 мг
апельсин	200 г	50 мг

Возможное решение:

В 1 яблоке 10 мг

В банане – 15 мг

В апельсине 100 мг

Составим уравнение, которое должно быть решено в целых числах, сумма которых не менее 7 и не более 14

$$10 \cdot x + 15 \cdot y + 100 \cdot z = 50 \cdot 7$$

$$Z=3, x=5, y=0$$

$$Z=3, x=3, y=2$$

$$Z=2, x=0, y=10$$

$$Z=2, x=3, y=8$$

$$Z=2, x=6, y=6$$

Критерии

1. За каждый правильный вариант ответа без приведенного решения – 2 балла (12 баллов за все верные ответы)
 2. Рассчитаны количества витамина С в каждом фрукте – 6 балла
 3. Составлено правильно уравнение – 2 балла
 4. Проведены расчеты и получены верные ответы—6 баллов.
 5. Рассчитана норма на неделю – 1 балл.
- Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов.

9-10 классы

Задача 1.

Студенты разбирали старый склад реактивов и нашли три неподписанные банки. В одной находились оранжевые кристаллы (А), во второй белый порошок, который при растворении дает синий раствор (В), а в третьей – жидкость с резким запахом (С)

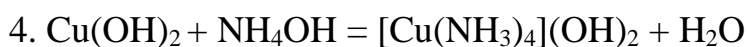
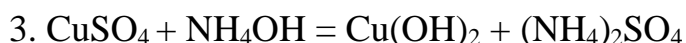
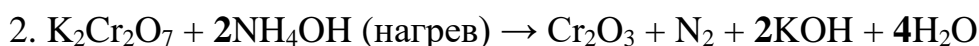
Чтобы узнать, что в банках, они решили провести реакции между всеми веществами попарно (вещества А и В предварительно растворили в воде) и получили вот такую таблицу с результатами:

	А	В	С
А	-	Реакция не идет	Сначала раствор желтеет, затем при нагревании выделяется бесцветный газ без запаха и выпадает серо-зеленый осадок (D)
В		-	При медленном добавлении С к раствору В сначала выпадает голубой осадок, который при дальнейшем добавлении С растворяется и образуется темно-синий раствор

Кроме того, они выяснили, что вещество В не разлагается при нагревании до 600°C

Какие вещества находились в банках? Напишите уравнения всех проведенных реакций. Какие еще методы можно использовать для доказательства?

Возможное Решение:



Варианты дополнительных методов:

Реакция с солями Ва – белый осадок с SO_4^{2-} , желтый с Cr_2O_7

Цвет пламени – CuSO_4 – сине-зеленый, $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ - фиолетовый

Критерии.

1. Правильно определено вещество – 2 балла за каждое (максимально 6 баллов); правильно определен ион – 1 из 2 баллов.
 2. Правильно составлены уравнения реакций – по 3 балла за каждое (максимально 12 баллов)
 3. Правильно выполнено уравнивание ОВР (реакция 2) и расставлены верные коэффициенты – 3 балла
 4. Приведены дополнительные методы исследования – по 2 балла за каждый подходящий метод (не более 4 суммарно)
- Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов.

Задача 2.

В большой стеклянный сосуд налили 50 ложек некоторого раствора различной концентрации (по массе). Первая ложка содержала 1%-й раствор, вторая ложка – 2%-й раствор, третья – 3%-й раствор и т.д. Последняя, пятидесятая, ложка содержала 50%-й раствор. Какова концентрация получившегося раствора в большом стеклянном сосуде? Считать, что все ложки имеют одинаковый объём.

Возможное Решение:

Согласно определению, массовая концентрация определяется как отношение массы растворённого вещества к объёму раствора (растворителя) по формуле:

$$c = \frac{m_{\text{вещества}}}{V_{\text{растворителя}}} \cdot 100\% \quad (\text{или} \quad c = \frac{m_{\text{вещества}}}{V_{\text{растворителя}}}).$$

Обозначим объём растворителя в ложке через V .

Тогда концентрация раствора в первой ложке равна $c_1 = \frac{m_1}{V}$, во второй ложке равна $c_2 = \frac{m_2}{V}$, ..., пятидесятой ложке $c_{50} = \frac{m_{50}}{V}$. Здесь m_1, m_2, \dots, m_{50} – массы соли в первой, второй, ..., пятидесятой ложках соответственно.

Значит, $m_1 = c_1 \cdot V$; $m_2 = c_2 \cdot V$; ... $m_{50} = c_{50} \cdot V$, где $c_1 = 1\%$; $c_2 = 2\%$; ..., $c_{50} = 50\%$.

Тогда концентрация получившегося раствора соли в большом стеклянном сосуде равна:

$$c = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_{50}}{V \cdot 50} \cdot 100\%$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} c &= \frac{c_1 \cdot V + c_2 \cdot V + \dots + c_{50} \cdot V}{V \cdot 50} = \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_{50}}{50} = \frac{1\% + 2\% + \dots + 50\%}{50} = \\ &= \frac{(1 + 50) \cdot 50 / 2}{50} = 25,5\% \end{aligned}$$

Примечание. Для вычисления числителя дроби полезно воспользоваться

формулой для суммы арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. Здесь

$a_1 = 1$; $a_n = 50$; $n = 50$.

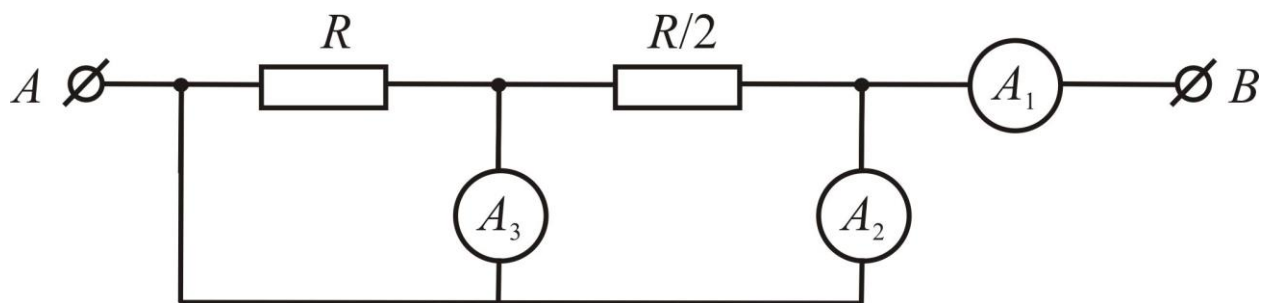
Ответ: Концентрация получившегося раствора в большом стеклянном сосуде равна $c = 25,5\%$.

Критерии:

- 1) Записаны формулы для нахождения масс соли в первой, второй, ..., пятидесятой ложках через соответствующие концентрации c_1, c_2, \dots, c_{50} и объём ложки V . – 5 баллов.
 - 2) Записана формула для нахождения концентрации получившегося раствора соли в большом стеклянном сосуде – 14 баллов.
 - 3) Получен правильный численный ответ – 6 баллов.
- Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов.

Задача 3.

Два резистора сопротивлениями R и $R/2$ и три неидеальных одинаковых амперметра, сопротивления которых равны $R_A = R$, соединены в электрическую цепь, схема которой показана на рисунке. Напряжение на клеммах $U_{AB} = 6$ В, сопротивление $R = 2$ Ом. Определите, чему равно общее сопротивление цепи на участке AB и найдите показания амперметров A_1, A_2 и A_3 .

**Решение.**

Поскольку неидеальные амперметры обладают сопротивлениями R , то их можно представить их как идеальные амперметры, последовательно соединённые с резисторами R . Перерисуем эквивалентную схему электрической цепи:

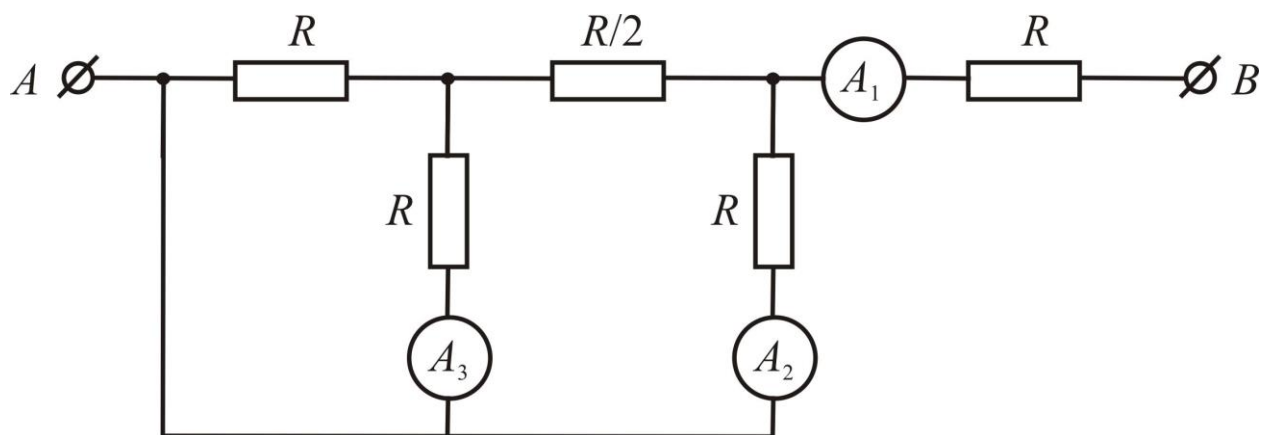


Рис. 1.

Далее сводим нашу электрическую схему к последовательности последовательно и параллельно соединённых элементов:

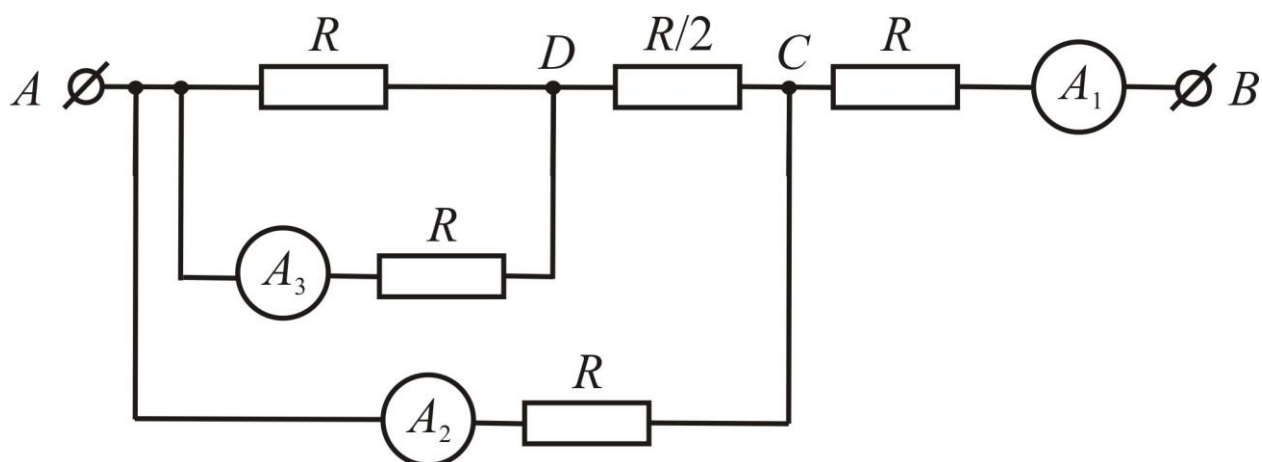


Рис. 2.

Из получившейся схемы уже легко определить общее сопротивление цепи на участке AB :

Сопротивление участка AD : $R_{AD} = R/2 = 2/1 = 1$ (Ом)

Сопротивление участка AC : $R_{AC} = \frac{(R_{AD} + R/2) \cdot R}{(R_{AD} + R/2) + R} = \frac{(1+1) \cdot 2}{(1+1) + 2} = \frac{4}{4} = 1$ (Ом)

Сопротивление участка AB : $R_{\text{общ}} = R_{AC} + R = 1 + 2 = 3$ (Ом)

Сила тока, протекающего через амперметр A_1 : $I_1 = \frac{U_{AB}}{R_{\text{общ}}} = \frac{6\text{В}}{3\text{Ом}} = 2\text{ А}.$

После прохождения первого амперметра A_1 в точке C ток разделяется на две ветви, имеющие одинаковые сопротивления. Следовательно, ток I_1 делится пополам, и амперметр A_2 покажет силу тока $I_2 = I_1/2 = 1\text{ А}.$

Аналогично, после прохождения резистора $R/2$ в точке D ток I_1 разделится пополам, и амперметр A_3 покажет силу тока $I_3 = I_2/2 = 0,5\text{ А}.$

Ответ: Общее сопротивление электрической цепи на участке AB равно $R_{\text{общ}} = 3\text{ Ом}.$

Показание амперметра A_1 : $I_1 = 2\text{ А}.$

Показание амперметра A_2 : $I_2 = 1\text{ А}.$

Показание амперметра A_3 : $I_3 = 0,5\text{ А}.$

Критерии.

- 1) Представление неидеальных амперметров как идеальных амперметров, последовательно соединённых с резисторами. Приведение схемы электрической цепи к рис. 1. – 5 баллов.
 - 2) Приведение схемы электрической цепи к рис. 2. – 10 баллов.
 - 3) Расчёт общего сопротивления цепи. – 5 баллов.
 - 4) Нахождение сил токов, текущих через амперметры A_1 , A_2 и A_3 . – 5 баллов.
- Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов.

Задача 4.

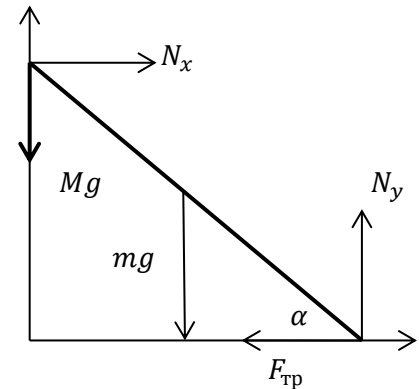
Маляру массой $M=90\text{ кг}$ требуется покрасить гладкую вертикальную стену. Он решил проверить сцепление лестницы массой $m=15\text{ кг}$ с полом. Оказалось, что лестница начинает скользить, если она составляет с полом угол, меньший 45°

градусов. Под каким минимальным углом к полу маляру следует поставить лестницу, чтобы он смог подняться как можно выше и не упасть?

Примечание: считать, что лестница однородная.

Решение:

Рассматривая условия равновесия лестницы с человеком на ней, необходимо считать, что оно выполняется для любого положения человека на лестнице. Таким образом, достаточно выяснить выполнение этих условий в случае, когда человек находится в верхней точке лестницы, что мы и будем полагать. Итак, пусть «критический угол» при этом равен β , и силу трения можно считать равной силе трения скольжения. Введем длину и массу лестницы и человека. Запишем условия равновесия – векторная сумма сил, приложенных к лестнице, равна нулю. Кроме того, необходимым условием отсутствия вращения является равенство нулю моментов всех сил относительно любой точки (в качестве потенциальной оси вращения удобнее выбрать точку горизонтальной опоры, так как относительно ее моменты сразу двух сил равны нулю). Итак, проектируя силы на рисунке, имеем три уравнения:



$$N_y = (m + M)g$$

$$N_x = F_{\text{тр}} = kN_y$$

$$N_x \sin \beta = \left(\frac{m}{2} + M \right) \cos \beta$$

Отсюда находим:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2k} \cdot \frac{m + 2M}{m + M}$$

Полагая $M = 0$, находим условие равновесия лестницы без человека $\beta = \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2k}$$

откуда коэффициент трения:

$$k = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{2} = 0.5$$

Подставляя данные, приведенные в условии, получаем:

$$\beta = 61,7^\circ$$

Критерии:

1. Правильно записаны все условия равновесия — 8 баллов.

2. Из условий равновесия найден угол— 5 баллов.
3. Проведено сравнение случаев с маляром и без —8 баллов.
4. Исключен не заданный в условии коэффициент трения – 4 балла.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов.