

Олимпиада школьников «Ломоносов» по физике.

Отборочный этап

2023/2024 учебный год

Задания для 11 класса

**Задача 1. (25 баллов).** Мяч, брошенный с горизонтальной поверхности под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту со скоростью  $v_0 = 3$  м/с, упал на землю, имея вертикальную составляющую скорости по абсолютной величине на 30% меньшую, чем при бросании. В процессе движения на мяч действовала сила сопротивления, пропорциональная его скорости. Найдите время полёта мяча. Ответ выразите в секундах, округлив до тысячных. Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**Решение.** Выберем систему отсчета, связанную с поверхностью земли. Ось  $X$  направим горизонтально, ось  $Y$  – вертикально вверх. Начало отсчета – в точке броска. В процессе движения на мяч действуют сила тяжести и сила сопротивления, пропорциональная скорости мяча:

$$F_{\text{сопр}} = -kv, \quad k > 0.$$

Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось  $Y$ :

$$m \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -mg - kv_y.$$

Здесь  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Учитывая, что  $v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ , преобразуем уравнение движения в проекции на ось  $Y$  к виду:

$$m \Delta v_y = -mg \Delta t - k \Delta y.$$

Просуммируем (проинтегрируем) последнее соотношение на всем времени полета. При этом полное изменение вертикальной составляющей скорости в соответствии с условием задачи равно

$$\Delta v_y = (-0,7v_0 \sin \alpha) - v_0 \sin \alpha = -1,7v_0 \sin \alpha,$$

а полное изменение вертикальной координаты  $\Delta y = 0$ .

В результате суммирования получаем:

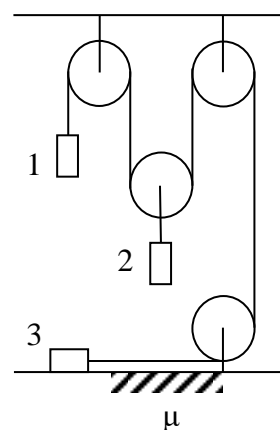
$$-1,7mv_0 \sin \alpha = -mgt_{\text{пол}} + 0.$$

Следовательно, время полета равно:

$$t_{\text{пол}} = \frac{1,7v_0 \sin \alpha}{g}.$$

**Ответ:**  $t_{\text{пол}} = \frac{1,7v_0 \sin \alpha}{g}.$

**Задача 2. (21 балл)** Три груза массами  $m_1 = 1$  кг,  $m_2 = 2$  кг и  $m_3 = 2$  кг, связанные невесомыми и нерастяжимыми нитями, переброшенными через невесомые блоки так, как показано на рисунке, удерживают в неподвижном состоянии. Затем грузы отпускают, и система тел приходит в движение. Через некоторое время груз, движущийся по горизонтальной плоскости, попадает на шероховатую поверхность и начинает двигаться равномерно. Найти коэффициент трения  $\mu$  между этим грузом и горизонтальной плоскостью. Ответ округлить до сотых. Отрезки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны, отрезок нити, соединяющий груз на горизонтальной плоскости с блоком, горизонтален. Трения в осях блоков нет.



**Решение.** Будем считать грузы материальными точками. Нумерация грузов показана на рисунке. Направим ось  $OX$  декартовой системы координат по направлению движения третьего груза (слева направо на рисунке), а ось  $OY$  – вертикально вниз. Ускорения грузов обозначим  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ , соответственно. В дальнейшем учтём, что  $a_3 = 0$ .

Запишем систему уравнений Ньютона в проекциях на оси выбранной системы координат:

$$\text{груз 1} \quad m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \quad (1)$$

$$\text{груз 2} \quad m_2 a_2 = m_2 g - T_2, \quad (2)$$

$$\text{груз 3} \quad m_3 a_3 = T_1 - F_{\text{тр}}. \quad (3)$$

Здесь  $T_1$  и  $T_2$  – силы, действующие со стороны нитей на первый и второй грузы, соответственно, а  $F_{\text{тр}}$  – сила трения скольжения, действующая на третий груз.

Дополним записанную выше систему очевидными соотношениями:

$$T_2 = 2T_1, \quad (4)$$

$$F_{\text{тр}} = \mu m_3 g, \quad (5)$$

а также уравнением кинематической связи, которое имеет вид:

$$-a_3 + 2a_2 + a_1 = 0.$$

(6)

Получена полная система уравнений, необходимая для решения задачи. Учитывая, что  $a_3 = 0$ , из уравнения (3) получаем, что

$$T_1 = F_{\text{тр}} = \mu m_3 g. \quad (7)$$

Выражая из уравнений (1) и (2) ускорения  $a_1$  и  $a_2$ , соответственно, подставим полученные выражения в уравнение (6):

$$2g - \frac{4T_1}{m_2} + g - \frac{T_1}{m_1} = 0.$$

Таким образом, сила натяжения нити, действующая на первый груз, равна:

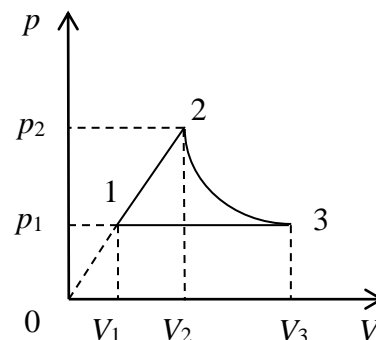
$$T_1 = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g.$$

Используя уравнение (7), для коэффициента трения  $\mu$  между третьим грузом и горизонтальной плоскостью, при котором груз будет двигаться по плоскости равномерно, получим:

$$\mu = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 m_3 + m_2 m_3}.$$

**Ответ:**  $\mu = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 m_3 + m_2 m_3}.$

**Задача 3. (19 баллов)** Цикл тепловой машины, использующей 1 моль идеального одноатомного газа в качестве рабочего вещества, показан на рисунке. КПД цикла  $\eta = 0,145$ . Температура газа в состоянии 1 равна  $T_1 = 270^\circ\text{C}$ , объём –  $V_1 = 100 \text{ см}^3$ . Участок цикла 2-3 – изотерма. Работа газа, совершённая на этом участке,  $A_{23} = 6912 \text{ Дж}$ . Найти максимальный объём газа в цикле. Ответ получить в  $\text{см}^3$  и округлить до целых.



**Решение.** Известно, что КПД тепловой машины равен  $\eta = \frac{A}{Q^+}$ , где  $A$  – работа, совершённая газом за цикл,  $Q^+$  – полученное газом за цикл количество теплоты. Учитывая, что изменение внутренней энергии идеального газа за цикл равно нулю, формулу для КПД тепловой машины можно переписать в виде:

$$\eta = \frac{A}{Q^+} = \frac{Q^+ - |Q^-|}{Q^+} = 1 - \frac{|Q^-|}{Q^+}.$$

Для данного цикла  $|Q^-| = |Q_{31}|$  – модуль количества теплоты, отданной газом на участке 3-1, а  $Q^+ = Q_{12} + Q_{23}$  – количество теплоты, полученной газом на участках 1-2 и 2-3, соответственно. Так как участок 2-3 – изотерма, то  $Q_{23} = A_{23}$  – работе газа на участке 2-3. Таким образом, КПД рассматриваемой тепловой машины имеет вид:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{31}|}{Q_{12} + A_{23}}.$$

Получим выражения для входящих в формулу величин  $|Q_{31}|$  и  $Q_{12}$ . Для этого воспользуемся первым началом термодинамики.

Изменение внутренней энергии газа на участке 1-2 равно:  $\Delta U_{12} = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1)$ , где  $R$  – универсальная газовая постоянная. Работа газа на этом участке равна:  $A_{12} = \frac{1}{2}(p_2 + p_1)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{1}{2}R(T_2 - T_1)$ . Здесь было использовано соотношение:  $\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}$ , представляющее собой уравнение процесса 1-2, из которого следует, что:  $p_1V_2 = p_2V_1$ , и уравнение состояния идеального газа. Таким образом:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = 2R(T_2 - T_1).$$

Модуль изменения внутренней энергии газа на участке 3-1 равен:  $|\Delta U_{31}| = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1)$ , а модуль работы газа на этом участке равен:  $|A_{31}| = p_1(V_3 - V_1) = R(T_2 - T_1)$ . Здесь учтено, что процесс 3-1 – изобара. Таким образом:

$$|Q_{31}| = |\Delta U_{31}| + |A_{31}| = \frac{5}{2}R(T_2 - T_1).$$

Найдём соотношение между температурами  $T_2$  и  $T_1$ . Пусть температура газа в состоянии 2 равна  $T_2$ . Если давление газа на участке 1-2 изменяется в  $n$  раз, т.е.  $\frac{p_2}{p_1} = n$ , то

и  $\frac{V_2}{V_1} = n$  в соответствии с уравнением процесса 1-2. Тогда получим:

$p_2 V_2 = n p_1 n V_1 = n^2 p_1 V_1 = n^2 R T_1 = R T_2$ . Откуда следует, что  $T_2 = n^2 T_1$ . Таким образом, окончательно имеем:

$$Q_{12} = 2 R T_1 (n^2 - 1).$$

$$|Q_{31}| = \frac{5}{2} R T_1 (n^2 - 1).$$

Итак, для КПД цикла получаем следующее выражение:

$$\eta = 1 - \frac{\frac{5}{2} R T_1 (n^2 - 1)}{2 R T_1 (n^2 - 1) + A_{23}}.$$

Из последнего выражения найдём  $n^2$ :

$$n^2 = 1 + \frac{2 A_{23} (1 - \eta)}{R T_1 (1 + 4 \eta)}.$$

Используя уравнение процесса 2-3  $p_2 V_2 = p_1 V_3$ , получим  $V_3 = \frac{p_2}{p_1} V_2$ . Поскольку

$\frac{V_2}{V_1} = n$  и  $\frac{p_2}{p_1} = n$ , окончательно получаем  $V_3 = n^2 V_1$ .

**Ответ:**  $V_3 = \left( 1 + \frac{2 A_{23} (1 - \eta)}{R T_1 (1 + 4 \eta)} \right) V_1$

**Задача 4. (19 баллов).** В вершинах квадрата со стороной  $a = 10$  см закреплены небольшие одинаковые заряженные шарики, заряды которых равны  $q = 2$  мкКл, а масса  $m = 4$  мг. В центре квадрата удерживают ещё один шарик такой же массы, как и остальные, но имеющий заряд  $q_1 = 50$  нКл. В некоторый момент шарик с зарядом  $q_1$  отпускают, сообщив ему скорость, направленную параллельно одной из сторон квадрата. Какую скорость  $V$  сообщили шарiku, если он остановился точно в середине одной из сторон квадрата? Ответ выразите в м/с, округлив до десятых.

**Решение.**

По теореме о кинетической энергии:

$\frac{mV^2}{2} = A$ , где  $A$  – работа сил электростатического поля зарядов, расположенных в вершинах квадрата при движении заряда.

$$A = q_1(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Потенциал электростатического поля в центре квадрата равен

$$\varphi_1 = 4 \cdot \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a \sqrt{2}} = \frac{2q}{\pi\epsilon_0 a \sqrt{2}}.$$

Потенциал электростатического поля в середине стороны квадрата равен

$$\varphi_2 = 2 \cdot \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} + 2 \cdot \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a \sqrt{5}} = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

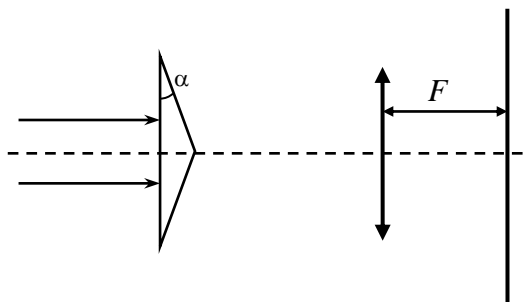
Окончательно получим:

$$V = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot \frac{qq_1}{\pi\epsilon_0 a} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \right)} = \sqrt{\frac{2qq_1}{\pi m \epsilon_0 a} \left( \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{\sqrt{10}} \right)} = \sqrt{\frac{qq_1}{5\pi m \epsilon_0 a} (10 + \sqrt{20} - 2\sqrt{50})}.$$

$$V = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4qq_1}{5ma} (10 + \sqrt{20} - 2\sqrt{50})} \approx 3 \cdot 10^4 \sqrt{0,33q}$$

**Ответ:**  $V = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4qq_1}{5ma} (10 + \sqrt{20} - 2\sqrt{50})}.$

**Задача 5. (16 баллов).** Экран, собирающая линза и стеклянный конус расположены так, как показано на рисунке. Линза находится на расстоянии от экрана, равном фокусному расстоянию  $F = 10$  см. Главная оптическая ось линзы ориентирована перпендикулярно экрану и совпадает с осью конуса. Показатель преломления стекла равен  $n = 1,5$ . Угол при основании конуса мал и равен  $\alpha = 0,08$  рад. На конус вдоль оптической оси падает узкий параллельный пучок света. Определите диаметр светлого кольца на экране. Ответ выразите в см, округлив до десятых. Считать для малых углов  $\varphi = \operatorname{tg} \varphi = \sin \varphi$ .



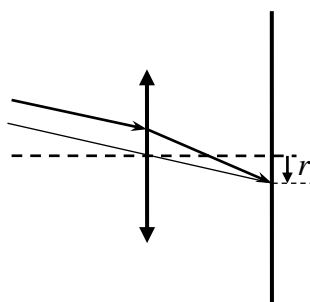
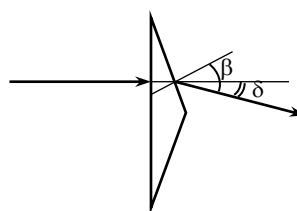
### Решение

Луч, падающий на конус, после прохождения конуса повернется на угол  $\delta$ . На рисунке видно, что  $\delta = \beta - \alpha$ . Поскольку  $\beta = \alpha \cdot n$ , то

$$\delta = \alpha(n-1).$$

Таким образом, верхняя часть пучка повернется вниз, а нижняя – вверх на одинаковый угол  $\delta$ , в результате чего после прохождения линзы на экране получится светлое кольцо радиусом

$$r = F \operatorname{tg} \delta = F \alpha(n-1).$$



Соответственно, диаметр светлого кольца равен:

$$D = 2F\alpha(n-1).$$

**Ответ:**  $D = 2F\alpha(n-1)$ .

Красным выделен варьируемый параметр в задаче.

Критерий оценивания:

Полный балл	Получен верный численный ответ
0 баллов	Нет верного численного ответа