

## 11 классы

**Внимание!** При вычислениях считать **ускорение свободного падения**  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  
универсальная газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ .

Везде, где не сказано иное, ответы давать **в единицах СИ**, при необходимости **округлив до сотых**.

Задачи 1–4 оцениваются по 16 баллов, задачи 5-6 – по 18 баллов.

::1.1:: С борта яхты, движущейся с постоянной скоростью против течения, выпала за борт дорогая дамская сумочка одной из туристок. Через 1 минуту после этого капитан отправил матроса на водном мотоцикле вдогонку за сумочкой. Во сколько раз скорость водного мотоцикла больше скорости яхты, если с момента выхода мотоцикла до его возвращения с потерянной сумочкой прошло 4 минуты?

{=1,5}

Решение. Рассмотрим движение всех тел в системе координат, связанной с водой. Пусть скорость яхты равна  $V$ . Тогда скорость водного мотоцикла равна  $kV$ , где  $k$  – искомая величина. В момент старта мотоцикла расстояние до сумочки равно  $Vt_1$  ( $t_1 = 1$ ). Из условия задачи следует, что выполняется равенство  $2Vt_1 + Vt_2 = kVt_2$  ( $t_2 = 4$ ). Отсюда  $k = 1,5$ .

::1.2:: С борта яхты, движущейся с постоянной скоростью против течения, выпала за борт дорогая дамская сумочка одной из туристок. Через 3 минуты после этого капитан отправил матроса на водном мотоцикле вдогонку за сумочкой. Во сколько раз скорость водного мотоцикла больше скорости яхты, если с момента выхода мотоцикла до его возвращения с потерянной сумочкой прошло 24 минуты?

{=1,25}

::1.3:: С борта яхты, движущейся с постоянной скоростью против течения, выпала за борт дорогая дамская сумочка одной из туристок. Через 2 минуты после этого капитан отправил матроса на водном мотоцикле вдогонку за сумочкой. Во сколько раз скорость водного мотоцикла больше скорости яхты, если с момента выхода мотоцикла до его возвращения с потерянной сумочкой прошло 8 минуты?

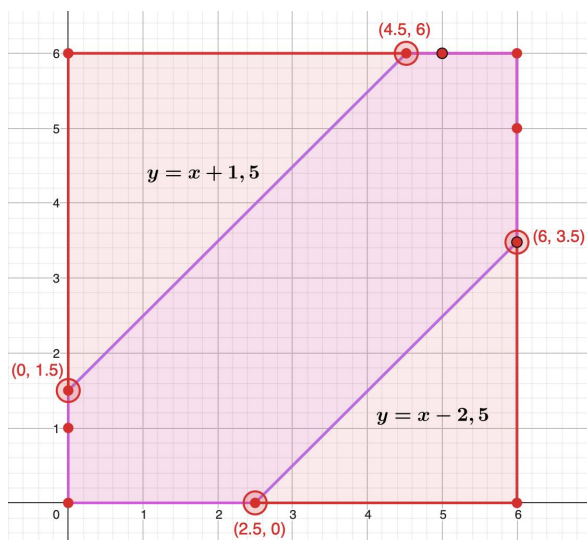
{=1,5}

::1.4:: С борта яхты, движущейся с постоянной скоростью против течения, выпала за борт дорогая дамская сумочка одной из туристок. Через 2 минуты после этого капитан отправил матроса на водном мотоцикле вдогонку за сумочкой. Во сколько раз скорость водного мотоцикла больше скорости яхты, если с момента выхода мотоцикла до его возвращения с потерянной сумочкой прошло 16 минуты?

{=1,25}

::2.1:: В саванне в самое жаркое время все животные стремятся на водопой к маленькому озерку. Антилопу около этого озера будет подстерегать опасность, если в это время на водопой придет Лев. Предположим, что в ближайшие 6 минут в произвольный момент времени на этом 6-минутном промежутке у озера появятся и Антилопа, и Лев. Известно, что Антилопа пьет воду в течение полутора минут, а Лев – в течении двух с половиной минут. Какова вероятность того, что Антилопа не встретит льва?

{0,45}



## Решения

Отложим по горизонтальной оси время  $X$ , когда Антилопа придет на водопой, а по вертикальной оси – время  $Y$ , когда Лев приходит на водопой. При этом начало координат  $(0, 0)$  – это начало 6-ти минутного отрезка времени. Антилопа встретит Льва, если они придут одновременно ( $X = Y$ ) или Антилопа придет раньше, но не более, чем на полторы минуты

( $X \geq Y - 1,5$ ), или придет позже Льва, но не более, чем две с половиной минуты ( $X \leq Y + 2,5$ ). Таким образом,

$$X - 2,5 \leq Y \leq X + 1,5; X, Y \in [0; 6] .$$

Эта область (полоса внутри квадрата) закрашена на рисунке розовым цветом. Для получения ответа задачи необходимо вычислить часть площади квадрата  $6 \times 6$ , не входящую в выделенную часть. Это площадь двух треугольников  $0,5 \cdot 4,5 \cdot 4,5 + 0,5 \cdot 3,5 \cdot 3,5 = 0,5(20,25 + 12,25) = 0,5 \cdot 32,5 = 16,25$ .

Искомая вероятность есть  $\frac{16,25}{36} \approx 0,45$ .

::2.2:: В саванне в самое жаркое время все животные стремятся на водопой к маленькому озерку. Антилопу около этого озера будет подстерегать опасность, если в это время на водопой придет Лев. Предположим, что в

ближайшие 6 минут в произвольный момент времени на этом 6-минутном промежутке у озера появятся и Антилопа, и Лев. Известно, что Антилопа пьет воду в течение одной минуты, а Лев – в течении двух с половиной минут. Какова вероятность того, что Антилопа не встретит льва?

{0,52}

::2.3:: В саванне в самое жаркое время все животные стремятся на водопой к маленькому озерку. Антилопу около этого озера будет подстерегать опасность, если в это время на водопой придет Лев. Предположим, что в ближайшие 6 минут в произвольный момент времени на этом 6-минутном промежутке у озера появятся и Антилопа, и Лев. Известно, что Антилопа пьет воду в течение полутора минут, а Лев – в течении трех минут. Какова вероятность того, что Антилопа не встретит льва?

{0,41}

::2.4:: В саванне в самое жаркое время все животные стремятся на водопой к маленькому озерку. Антилопу около этого озера будет подстерегать опасность, если в это время на водопой придет Лев. Предположим, что в ближайшие 6 минут в произвольный момент времени на этом 6-минутном промежутке у озера появятся и Антилопа, и Лев. Известно, что Антилопа пьет воду в течение одной минуты, а Лев – в течении трех минут. Какова вероятность того, что Антилопа не встретит льва?

{0,47}

::3.1:: Материальная точка движется на плоскости под действием силы  $\vec{F}$  так, что проекции ее импульса  $(P_x, P_y)$  на оси ортогональной системы координат  $OXY$  меняются со временем  $t$  по закону

$$\begin{cases} P_x = 2 - 3t^2 \\ P_y = 8t \end{cases}$$

В момент времени  $t = 1$  с величина ускорения  $\bar{a}$  материальной точки равна  $10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ . В момент времени  $t = 2$  с сила перестает действовать и тело продолжает двигаться по инерции. Найдите величину скорости в момент времени  $t = 5$  с. Все значения даны в единицах СИ. При необходимости округлите ответ до сотых.

{=18,87}

Решение. Из второго закона Ньютона в импульсной форме  $\bar{F} = \Delta \bar{P} / \Delta t$  следует,

что  $F_x = \dot{P}_x$ ;  $F_y = \dot{P}_y \Rightarrow F_x = -6t$ ;  $F_y = 8$ . Тогда в момент времени  $t = 1$  с величина силы равна  $|\bar{F}| = 10$  Н. Значит масса материальной точки равна  $m = |\bar{F}| / |\bar{a}| = 1$  кг. Таким образом, скорость материальной точки меняется по закону  $V_x = \frac{P_x}{m} = 2 - 3t^2$ ;  $V_y = \frac{P_y}{m} = 8t$  и в момент времени  $t = 2$  с величина скорости достигнет величины

$$|\bar{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(-10)^2 + 16^2} = \sqrt{356} = 18,87 \text{ м/с.}$$

Далее скорость не меняется.

::3.2:: Материальная точка движется на плоскости под действием силы  $\bar{F}$  так, что проекции ее импульса ( $P_x, P_y$ ) на оси ортогональной системы координат  $OXY$  меняются со временем  $t$  по закону

$$\begin{cases} P_x = 4 + 6t \\ P_y = 2 - 4t^2 \end{cases}$$

В момент времени  $t = 1$  с величина ускорения  $\bar{a}$  материальной точки равна  $5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ . В момент времени  $t = 2$  с сила перестает действовать и тело продолжает двигаться по инерции. Найдите величину скорости в момент времени  $t = 5$  с. Все значения даны в единицах СИ. При необходимости округлите ответ до сотых.

{=10,63}

::3.3:: Материальная точка движется на плоскости под действием силы  $\vec{F}$  так, что проекции ее импульса  $(P_x, P_y)$  на оси ортогональной системы координат  $OXY$  меняются со временем  $t$  по закону

$$\begin{cases} P_x = 2t^2 - 3 \\ P_y = 3t + 1 \end{cases}$$

В момент времени  $t = 1$  с величина ускорения  $\bar{a}$  материальной точки равна  $5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ . В момент времени  $t = 2$  с сила перестает действовать и тело продолжает двигаться по инерции. Найдите величину скорости в момент времени  $t = 5$  с. Все значения даны в единицах СИ. При необходимости округлите ответ до сотых.

{=8,60}

::3.4:: Материальная точка движется на плоскости под действием силы  $\vec{F}$  так, что проекции ее импульса  $(P_x, P_y)$  на оси ортогональной системы координат  $OXY$  меняются со временем  $t$  по закону

$$\begin{cases} P_x = 2 - 3t \\ P_y = 2t^2 + 3 \end{cases}$$

В момент времени  $t = 1$  с величина ускорения  $\bar{a}$  материальной точки равна  $10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ . В момент времени  $t = 2$  с сила перестает действовать и тело продолжает двигаться по инерции. Найдите величину скорости в момент времени  $t = 5$  с. Все значения даны в единицах СИ. При необходимости округлите ответ до сотых.

{=23,41}

::4.1:: С воздушного шара, находящегося на некоторой высоте над плоской поверхностью, производится наблюдение над тремя лежащими на этой поверхности объектами:  $A$ ,  $B$  и  $C$ . При этом все три угла, под которыми видны с воздушного шара три отрезка  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ , – прямые. Расстояние между объектами  $B$  и  $C$  равно 60 м, а расстояние между  $A$  и  $C$  равно 100 м.

Найдите все значения (в метрах), которые может принимать расстояние между объектами  $A$  и  $B$ . В ответе укажите сумму всех таких целых значений.  
 $\{= 3546\}$

**Решение.** Если обозначить стороны треугольника  $ABC$  через  $x, y, z$ , а расстояния от объектов до аэростата через  $a, b, c$ , то:  $a^2 + b^2 = x^2, b^2 + c^2 = y^2, c^2 + a^2 = z^2$ . Отсюда  $a^2 = \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2}; b^2 = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2}; c^2 = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2}$ .  
 Решение  $a, b, c$  найдется тогда и только тогда, когда  $z^2 + x^2 > y^2, x^2 + y^2 > z^2, y^2 + z^2 > x^2$ .

Если  $x = 60, y = 100$ , то  $100^2 - 60^2 < z^2 < 100^2 + 60^2$ , откуда  $z \in (80; 20\sqrt{34})$ .

Получаются целые значения 81, 82, ..., 116. Их сумма равна

$$\frac{81 + 116}{2} \cdot 36 = 3546.$$

::4.2:: С воздушного шара, находящегося на некоторой высоте над плоской поверхностью, производится наблюдение над тремя лежащими на этой поверхности объектами:  $A, B$  и  $C$ . При этом все три угла, под которыми видны с воздушного шара три отрезка  $AB, BC$  и  $AC$ , – прямые. Расстояние между объектами  $B$  и  $C$  равно 150 м, а расстояние между  $A$  и  $C$  равно 200 м. Найдите все значения (в метрах), которые может принимать расстояние между объектами  $A$  и  $B$ . В ответе укажите сумму всех таких целых значений.  
 $\{= 22347\}$

::4.3:: С воздушного шара, находящегося на некоторой высоте над плоской поверхностью, производится наблюдение над тремя лежащими на этой поверхности объектами:  $A, B$  и  $C$ . При этом все три угла, под которыми видны с воздушного шара три отрезка  $AB, BC$  и  $AC$ , – прямые. Расстояние между объектами  $B$  и  $C$  равно 120 м, а расстояние между  $A$  и  $C$  равно 200 м. Найдите все значения (в метрах), которые может принимать расстояние между объектами  $A$  и  $B$ . В ответе укажите сумму всех таких целых значений.  
 $\{= 14381\}$

::4.4:: С воздушного шара, находящегося на некоторой высоте над плоской поверхностью, производится наблюдение над тремя лежащими на этой

поверхности объектами:  $A$ ,  $B$  и  $C$ . При этом все три угла, под которыми видны с воздушного шара три отрезка  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ , – прямые. Расстояние между объектами  $B$  и  $C$  равно 160 м, а расстояние между  $A$  и  $C$  равно 120 м. Найдите все значения (в метрах), которые может принимать расстояние между объектами  $A$  и  $B$ . В ответе укажите сумму всех таких целых значений.

{= 14335}

::5.1:: Обычно воздушный шар наполняли газом плотности  $\rho_1$ . Но однажды наполнили газом вдвое большей плотности  $\rho_2$ . В результате этого подъемная сила воздушного шара изменилась вдвое. Найдите отношение массы оболочки к массе воздуха в объеме оболочки, если плотность более легкого газа  $\rho_1$  относится к плотности воздуха  $\rho_0$  как  $\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{1}{6}$ . Температуру и давление газов считать постоянными.

{=0,5}

Решение. Подъемная силы  $F_1 = \left(\rho_0 - \rho_1 - \frac{m}{V_0}\right)g$ ;  $F_2 = \left(\rho_0 - \rho_2 - \frac{m}{V_0}\right)g$  относятся

$$\text{как } \frac{\left(\rho_0 - \rho_1 - \frac{m}{V_0}\right)}{\left(\rho_0 - \rho_2 - \frac{m}{V_0}\right)} = 2 \Rightarrow \frac{m}{V_0} = 2(1 - \beta) - (1 - \alpha), \alpha = \frac{1}{6}; \beta = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 0,5$$

::5.2:: Обычно воздушный шар наполняли газом плотности  $\rho_1$ . Но однажды наполнили газом вдвое большей плотности  $\rho_2$ . В результате этого подъемная сила воздушного шара изменилась вдвое. Найдите отношение массы оболочки к массе воздуха в объеме оболочки, если плотность более легкого газа  $\rho_1$  относится к плотности воздуха  $\rho_0$  как  $\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{1}{4}$ . Температуру и давление газов считать постоянными.

{=0,25}

::5.3 Обычно воздушный шар наполняли газом плотности  $\rho_1$ . Но однажды наполнили газом вдвое большей плотности  $\rho_2$ . В результате этого подъемная сила воздушного шара изменилась вдвое. Найдите отношение массы оболочки к массе воздуха в объеме оболочки, если плотность более легкого



газа  $\rho_1$  относится к плотности воздуха  $\rho_0$  как  $\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{3}{10}$ . Температуру и

давление газов считать постоянными.

{=0,1}

::5.4:: Обычно воздушный шар наполняли газом плотности  $\rho_1$ . Но однажды наполнили газом вдвое большей плотности  $\rho_2$ . В результате этого подъемная сила воздушного шара изменилась вдвое. Найдите отношение массы оболочки к массе воздуха в объеме оболочки, если плотность более легкого газа  $\rho_1$  относится к плотности воздуха  $\rho_0$  как  $\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{1}{5}$ . Температуру и давление газов считать постоянными.

{=0,4}

::6.1:: Дан цилиндрический сосуд с поперечным сечением  $S=10 \text{ см}^2$ , в котором содержится один моль одноатомного идеального газа. Сосуд закрыт сверху тяжелым поршнем веса  $P=100 \text{ Н}$ . Какое количество тепла поступает за одну секунду в сосуд, если поршень поднимается вверх со скоростью  $1 \text{ м/с}$ . Атмосферное давление  $P_0=10^5 \text{ Па}$ ? Ответ дать в джоулях.

{=500}

Решение. В соответствии с первым началом термодинамики можно записать

$$Q\Delta t = \Delta A + \Delta U, \quad (1)$$

где  $\Delta t$  – промежуток времени,  $\Delta A$  – совершенная газом работа,  $\Delta U$  – изменение внутренней энергии. Так как процесс изобарный, то для работы и внутренней энергии можно записать следующие соотношения:

$$\Delta A = (p_0 + \frac{P}{S})\Delta V, \quad \Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}(p_0 + \frac{P}{S})\Delta V, \quad (2)$$

где  $\nu$  – количество вещества. Подставив в (1), получим  $Q\Delta t = \frac{5}{2}(p_0 + \frac{P}{S})S\Delta h$ .

Откуда для количества тепла в секунду получим:  $Q = 2,5(p_0 S + P) \cdot \frac{\Delta h}{\Delta t}$

::6.2:: Дан цилиндрический сосуд с поперечным сечением  $S=20 \text{ см}^2$ , в котором содержится один моль одноатомного идеального газа. Сосуд закрыт сверху тяжелым поршнем веса  $P=200 \text{ Н}$ . Какое количество тепла поступает за одну секунду в сосуд, если поршень поднимается вверх со скоростью  $0,6 \text{ м/с}$ . Атмосферное давление  $P_0=10^5 \text{ Па}$ ? Ответ дать в джоулях.

{=600}

::6.3:: Дан цилиндрический сосуд с поперечным сечением  $S=10 \text{ см}^2$ , в котором содержится один моль одноатомного идеального газа. Сосуд закрыт сверху тяжелым поршнем веса  $P=300 \text{ Н}$ . Какое количество тепла поступает за одну секунду в сосуд, если поршень поднимается вверх со скоростью  $0,5 \text{ м/с}$ . Атмосферное давление  $P_0=10^5 \text{ Па}$ ? Ответ дать в джоулях.

{=500}

::6.4:: Дан цилиндрический сосуд с поперечным сечением  $S=30 \text{ см}^2$ , в котором содержится один моль одноатомного идеального газа. Сосуд закрыт сверху тяжелым поршнем веса  $P=100 \text{ Н}$ . Какое количество тепла поступает за одну секунду в сосуд, если поршень поднимается вверх со скоростью  $0,4 \text{ м/с}$ . Атмосферное давление  $P_0=10^5 \text{ Па}$ ? Ответ дать в джоулях.

{=400}