

Олимпиада школьников Ломоносов–2025  
по механике и математическому моделированию

Вариант 251

1. Плот преодолевает расстояние между пристанями Верхняя и Нижняя, двигаясь вниз по течению реки, на 6 часов дольше, чем моторная лодка. Эта же лодка данное расстояние проплывает на 1 час быстрее, чем при движении в противоположном направлении. За какое наименьшее возможное время плот может доплыть от Верхней до Нижней?

2. На расстоянии 2 метра от края стола высотой 80 см лежит маленький брусок. Ему придают начальную скорость 5 м/с в направлении края. Брусок скользит по столешнице и затем слетает со стола. Найдите расстояние от точки отрыва бруска от стола до точки, в которой брусок коснется пола. Коэффициент трения между бруском и столешницей равен 0,4, ускорение свободного падения считать равным 10 м/с<sup>2</sup>.

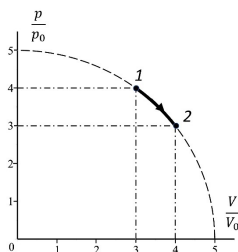
3. Глафира скачивает из Интернета видеоролик с постоянной скоростью. После того, как она загрузила 35% ролика, оставшееся время загрузки составляло 35 секунд. Ровно в полдень, когда часы показывали время в часах, минутах и секундах 12 : 00 : 00, Глафира заметила, что скачалось 35 Мб и оставшееся время загрузки составило 13 секунд. Вычислите общий размер ролика в мегабайтах и определите, какое время показывали часы в момент начала загрузки ролика (переключение времени на часах происходит ежесекундно).

4. Стены, пол и потолок комнаты параллельны координатным плоскостям прямоугольной системы координат. Улитка может перемещаться либо по потолку (плоскость  $z = 3$ ) в любом направлении, либо по полу (плоскость  $z = 0$ ) в любом направлении, либо параллельно оси  $Oz$  в плоскости одной из четырех стен (плоскости  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 10$ ,  $y = 10$ ). Найдите минимальное время, за которое улитка может добраться из точки  $A$  с координатами  $x = 4$ ,  $y = 3$ ,  $z = 3$  в точку  $B$  с координатами  $x = 7$ ,  $y = 7$ ,  $z = 0$ , если скорость улитки при движении по потолку или по полу равна 1 м/мин, а при спуске по стене 2 м/мин. Ответ дайте в минутах, при необходимости округлив его до десятых. Все координаты указаны в метрах.

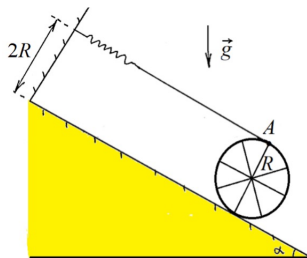
5. С некоторым количеством идеального одноатомного газа совершается процесс 1 – 2, который в координатах  $(\frac{V}{V_0}; \frac{P}{P_0})$  представляет собой дугу окружности (см. рис.).

А) Найдите работу, совершенную газом в этом процессе.

Б) Найдите  $\frac{Q_1}{Q_2}$ , где  $Q_1$  — количество тепла, полученного газом в этом процессе,  $Q_2$  — количество отданного тепла.



6. Колесо радиуса  $R$  с легкими спицами и тонким ободом удерживается на наклоненной под углом  $\alpha$  к горизонту плоскости. Масса колеса  $m$  равномерно распределена по ободу. В точке  $A$  обода колеса закреплен конец невесомой нерастяжимой нити, связанной с невесомой пружиной (см. рис.). В начальный момент времени пружина не растянута. После того как колесо отпустили, оно начинает скатываться вниз по плоскости без проскальзывания, при этом нить наматывается на обод колеса. Известно, что при дальнейшем движении точка  $A$  никогда не касается наклонной плоскости, а величина скорости точки  $A$  достигает максимального значения в моменты времени, когда расстояние от точки  $A$  до плоскости равно  $H$ . Считая известными значения  $\alpha$ ,  $m$ ,  $R$  и  $H$ , найти жесткость  $k$  пружины.



**Решение.**

**1.** Пусть собственная скорость лодки и скорость течения реки равны соответственно  $x$  км/ч и  $y$  км/ч. Если плот преодолевает расстояние  $S$  км между пристанями  $A$  и  $B$  за  $t$  часов, то

$$ty = (t - 6)(x + y) = (t - 5)(x - y) \Rightarrow (x + y)/y = t/(t - 6) \text{ и } (x - y)/y = t/(t - 5).$$

$$\text{Тогда } 2 = (x + y)/y - (x - y)/y = t/(t - 6) - t/(t - 5) \Rightarrow 2(t - 5)(t - 4) = t.$$

Из последнего квадратного уравнения получаем  $t = 4$  или  $t = 15/2$ . По условию задачи  $t > 6$ , поэтому  $t = 15/2 = 7,5$  (часов).

**Ответ.** 7, 5

2. Из закона сохранения энергии скорость при падении на пол будет равна:  $V_2^2 = V_0^2 - 2gl\mu + 2gh \Rightarrow V_2 = 5$  м/с,  $V_0 = 5$  м/с,  $l = 2$  м,  $h = 0,8$  м,  $\mu = 0,4$ . Падение без начальной скорости с высоты  $h$  занимает время  $t = \sqrt{\left(\frac{2h}{g}\right)} = 0,4$  с. При этом скорость при падении будет равна  $V_y = gt = 4$  м/с. Это значит, что брусок падает под углом  $\alpha$ :  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ . Отсюда следует, что проекция скорости на горизонтальное направление будет равна  $V_1 = V_2 \cdot \cos \alpha = 5 \cdot 3/5 = 3$  м/с. Таким образом, брусок улетит на расстояние  $S = V_1 \cdot t = 1,2$  м. Остается найти гипотенузу:  $\sqrt{1,2^2 + 0,8^2} \approx 1,44$

**Ответ.** 1,44 м

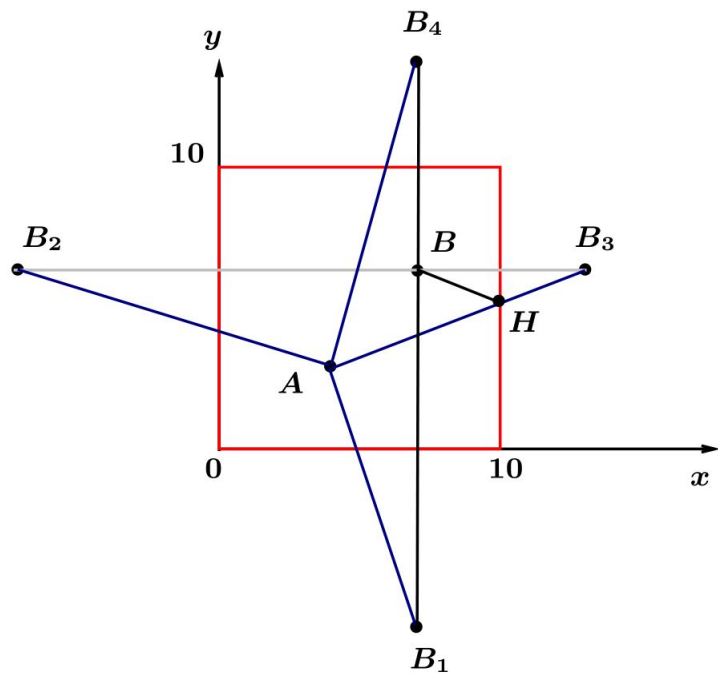
**3.** На скачивание  $100 - 35 = 65\%$  ролика потребовалось 35 секунд. Это означает, что весь ролик загружается  $(35 \cdot 100)/65 = 700/13$  секунд. Так как в полдень до конца загрузки оставалось 13.

секунд, то загрузка началась за  $700/13 - 13 = 531/13 = 40\text{ и }11/13$  секунд до полудня. Значит, Глафира начала скачивание ролика за 40 секунд плюс еще  $11/13$  секунды до полудня. Тогда в момент начала скачивания часы показывали 11 часов 59 минут и 19 секунд.

За время  $531/13$  секунд загружено 35 Мб, тогда за  $700/13$  секунд (это время загрузки всего ролика) загрузится  $(35 \cdot 700)/531 = 24500/531 = 46\text{ и }139359 \dots$  Мб.

**Ответ.** Объем ролика: 46, 14 Мб; время на часах в момент начала загрузки: 11 : 59 : 19.

4. Спроектируем ситуацию на плоскость  $z = 0$ . Отразим точку  $B$  симметрично относительно стен комнаты, получим точки  $B_1, B_2, B_3$  и  $B_4$  (рис. 1).



Найдем расстояния  $AB_1, AB_2, AB_3, AB_4$ .

$$AB_1^2 = (7 - 4)^2 + (-7 - 3)^2 = 9 + 100 = 109; AB_2^2 = (-7 - 4)^2 + (7 - 3)^2 = 121 + 16 = 137;$$

$$AB_3^2 = (13 - 4)^2 + (7 - 3)^2 = 81 + 16 = 97; AB_4^2 = (7 - 4)^2 + (13 - 3)^2 = 9 + 100 = 109.$$

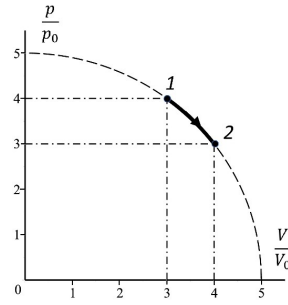
Так как наименьшим является  $AB_3 = \sqrt{97}$ , то кратчайший маршрут улитки состоит из отрезка длиной  $AH$  по потолку, спуска по вертикали в этой точке, отрезка длиной  $HB$  по полу. Длина маршрута составит  $AH + HB = AB_3 = \sqrt{97}$  метров по потолку и по полу и 3 метра по вертикальной стене.

Время движения равно  $\frac{\sqrt{97}}{1} + \frac{3}{2}$  минут.

Так как  $9,8^2 = 96,04 < 97 < 97,0225 = 9,85^2$ , то  $\sqrt{97} + 1,5 \in (9,8 + 1,5; 9,85 + 1,5) = (11,3; 11,35)$ . Значит,  $\sqrt{97} + 1,5 \approx 11,3$ .

**Ответ.**  $\sqrt{97} + 1,5 \approx 11,3$  минуты.

5. С некоторым количеством идеального одноатомного газа совершается процесс 1 – 2, который в координатах  $(\frac{V}{V_0}; \frac{P}{P_0})$  представляет собой дугу окружности (см. рис.). Найти  $\frac{Q_1}{Q_2}$ , где  $Q_1$  – количество тепла, полученного газом в этом процессе,  $Q_2$  – количество отданного.



**Решение.** Уравнение окружности  $(\frac{P}{P_0})^2 + (\frac{V}{V_0})^2 = 5^2$ , откуда следует

$$P = P_0 \sqrt{25 - (\frac{V}{V_0})^2}$$

На малом шаге процесса согласно первому закону термодинамики

$$\Delta Q = \Delta A + \Delta U = P \Delta V + \frac{3}{2} R \Delta T = P \Delta V + \frac{3}{2} \Delta(PV) = P \Delta V + \frac{3}{2} (P \Delta V + V \Delta P) = \frac{5}{2} P \Delta V + \frac{3}{2} V \Delta P$$

Так как  $\Delta P \approx P'(V) \Delta V$ , где  $P'(V)$  – производная функции  $P(V)$ , получаем

$$\Delta Q = \frac{1}{2} (5P(V) + 3VP'(V)) \Delta V = F(V) \Delta V, \text{ где } F(V) = \frac{1}{2} (5P(V) + 3VP'(V)) = -\frac{4P_0(V^2 - \frac{125}{8}V_0^2)}{\sqrt{25V_0^2 - V^2}}$$

Легко видеть, что  $V_3 = \frac{5\sqrt{10}}{4}V_0 \in (3V_0; 4V_0)$  является корнем уравнения  $F(V) = 0$ , причем при  $V \in [3V_0; V_3]$  имеем  $F(V) > 0$ , а при  $V \in (V_3; 4V_0]$  выполнено  $F(V) < 0$ .

Таким образом, точка  $(V_3; P_3) = (\frac{5\sqrt{10}}{4}V_0; \frac{5\sqrt{6}}{4}P_0)$  разделяет процесс на два участка. На первом из них, участке 1 – 3, газ тепло получает, а на втором участке 3 – 2 – отдает. Поэтому  $Q_1 = Q_{13}$ ,  $Q_2 = -Q_{23}$ .

Далее,  $Q_1 = A_{13} + \Delta U_{13}$ .

Изменение внутренней энергии

$$\Delta U_{13} = \frac{3}{2} \nu R (T_3 - T_1) = \frac{3}{2} (P_3 V_3 - P_1 V_1) = \left( \frac{75\sqrt{15}}{16} - 18 \right) P_0 V_0$$

Так как  $P \Delta V = \left[ \frac{P}{P_0} \Delta \left( \frac{V}{V_0} \right) \right] P_0 V_0$ , работу газа на участке 1 – 3 можно найти по формуле  $A_{13} = P_0 V_0 S_{13}$  – площадь фигуры, ограниченной прямыми  $\frac{V}{V_0} = 3$ ,  $\frac{V}{V_0} = \frac{5\sqrt{10}}{4}$ , дугой окружности и осью абсцисс.

Нахождение этой площади не составляет труда:

$$S_{13} = \frac{25}{4} \left( 2 \arcsin \left( \frac{4}{5} \right) - 2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{6}}{4} \right) + \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{24}{25} \right)$$

В результате получим

$$Q_1 = \frac{25}{4} \left( 2 \arcsin \left( \frac{4}{5} \right) - 2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{6}}{4} \right) + \sqrt{15} - \frac{96}{25} \right) P_0 V_0$$

Аналогично находим

$$Q_2 = \frac{25}{4} \left( 2 \arcsin \left( \frac{3}{5} \right) - 2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{6}}{4} \right) + \sqrt{15} - \frac{96}{25} \right) P_0 V_0$$

Итак,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{2 \arcsin(\frac{4}{5}) - 2 \arcsin(\frac{\sqrt{6}}{4}) + \sqrt{15} - \frac{96}{25}}{2 \arcsin(\frac{3}{5}) - 2 \arcsin(\frac{\sqrt{6}}{4}) + \sqrt{15} - \frac{96}{25}} \approx 305$$

Ответ:  $\frac{Q_1}{Q_2} \approx 305$

**6. Решение.** Направим ось  $x$  вниз по наклонной плоскости. Пусть  $x(t)$  — закон движения центра колеса, причем  $x(0) = 0$  (так выбрано начало координат) и  $\dot{x}(0) = 0$  (начальная скорость равна нулю.) Здесь и далее точкой обозначается производная по времени. Из закона сохранения энергии следует:

$$m\dot{x}^2 + (k(2x)^2)/2 - mgx \sin \alpha = \text{const}; \quad (1)$$

Первое слагаемое (1) — кинетическая энергия катящегося со скоростью  $\dot{x}$  колеса (см. замечание в конце решения), второе — потенциальная энергия пружины жесткости  $k$  (если колесо сместилось на  $x$ , то пружина растянута на  $2x$ ), третье слагаемое — потенциальная энергия силы тяжести (начальное положение — нулевое значение потенциальной энергии). Дифференцируя (1), получаем:

$$2m\dot{x}\ddot{x} + 4k\dot{x}x - mg\dot{x} \sin \alpha = 0,$$

откуда следует уравнение, определяющее закон движения центра колеса:

$$\ddot{x} + 2k/mx - (g \sin \alpha)/2 = 0.$$

Запишем последнее уравнение в виде:

$$\ddot{x} + 2k/m(x - (mg \sin \alpha)/4k) = 0.$$

Обозначая  $x_* = (mg \sin \alpha)/4k$ ,  $\tilde{x} = x - x_*$ , получаем уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{\tilde{x}} + \omega^2 \tilde{x} = 0,$$

где  $\omega = \sqrt{2k/m}$ .

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\tilde{x} = a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

где  $a$  и  $b$  — произвольные константы.

Получаем:

$$x = x_* + a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t.$$

С помощью начальных условий  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  находим  $b = 0$ ,  $a = -x_*$ ,

откуда следует

$$x = x_*(1 - \cos \omega t). \quad (2)$$

Таким образом, центр колеса совершает относительно  $x = x_*$  гармонические колебания с периодом  $T = 2\pi\omega = 2\pi\sqrt{m/2k}$  и амплитудой, равной  $x_*$ . Легко показать, что  $x = x_*$  является положением равновесия, суммарный момент сил равен нулю.

Далее найдем выражение для скорости точки  $A$ . Введем подвижную декартову систему координат  $Ox'y'$ , центр  $O$  которой совпадает с центром колеса, а ось  $x'$  параллельна оси  $x$  неподвижной системы. При смещении центра колеса на расстояние  $x$  колесо поворачивается относительно своей оси на угол  $\gamma(t) = x(t)/R$ , поэтому координаты точки  $A$  определяются формулами:  $x' = R \sin \gamma$ ,  $y' = R \cos \gamma$ .

Тогда скорость точки  $A$  в подвижной системе равна

$$\vec{v}' = ((x'), (y')) = (R\dot{\gamma} \cos \gamma; -R\dot{\gamma} \sin \gamma) = (\dot{x} \cos \gamma; -\dot{x} \sin \gamma),$$

а ее абсолютная скорость согласно закону сложения скоростей

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{v}' = (\dot{x}, 0) + (\dot{x} \cos \gamma; -\dot{x} \sin \gamma) = \dot{x}(1 + \cos \gamma; -\sin \gamma).$$

Величина квадрата этой скорости

$$v_A^2 = \dot{x}^2((1 + \cos \gamma)^2 + (-\sin \gamma)^2) = 4\dot{x}^2 \cos^2 \gamma/2.$$

Из (2) следует  $\dot{x} = x_*\omega \sin \omega t$ , поэтому

$$v_A^2 + 4x_*^2\omega^2 \sin^2 \omega t \cos^2 \gamma/2.$$

С помощью (2) находим

$$\sin^2 \omega t = 1 - \cos^2 \omega t = 1 - (1 - x/x_*)^2 = 1 - (1 - R\gamma/x_*)^2.$$

Таким образом, получена зависимость квадрата скорости точки  $A$  от угла  $\gamma$ :

$$v_A^2 = 4x_*^2\omega^2 f(\gamma), \text{ где } f(\gamma) = [1 - (1 - R\gamma/x_*)^2] \cos^2 \gamma/2.$$

По условию задачи величина скорости  $v_A$  (значит, и ее квадрата  $v_A^2$ ) достигает максимального значения в те моменты времени, когда точка  $A$  находится на расстоянии  $H$  от плоскости. Этому положению соответствует значение угла  $\gamma = \gamma_1 = \arccos(H - R)/R$ . По условию точка  $A$  никогда не касается плоскости, поэтому  $0 < \gamma_1 < \pi$ , что учтено в формуле для  $\gamma_1$ .

Итак,  $v_A^2$  достигает максимального значения при  $\gamma = \gamma_1$ , поэтому  $df/d\gamma(\gamma_1) = 0$ .

Обозначим  $R/x_* = c$ , тогда  $f(\gamma) = [1 - (1 - c\gamma)^2] \cos^2 \gamma/2$ ,

$$df/d\gamma = \cos^2 \gamma/2[2c(1 - \gamma) - c\gamma(2 - c\gamma) \operatorname{tg} \gamma/2],$$

Приравнявая последнее выражение к нулю при  $\gamma = \gamma_1$ ,

получаем

$$c = R/x_* = 4Rk/(mg \sin \alpha) = 2(\gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_1/2 - 1)/(\gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_1/2 - 2).$$

Отсюда следует

$$k = ((\gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_1/2 - 1)mg \sin \alpha)/(2\gamma_1(\gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_1/2 - 2)R).$$

Ответ:

$$k = ((\gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_1/2 - 1) \sin \alpha)/(2\gamma_1(\gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_1/2 - 2))mg/R,$$

где  $\gamma_1 = \arccos(H - R)/R$ .

Замечание.

В решении было использовано, что кинетическая энергия катящегося без проскальзывания тонкого обруча равна  $E = mV^2$ , где  $m$  — его масса,  $V$  — скорость центра. Это можно показать «школьными» методами.

Разобьем обруч на большое число  $N$  маленьких «кусочков» с массой  $m_i$ ,  $i = 1 \dots$ . Согласно закону сложения скоростей скорость каждого кусочка равна  $\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{v}'_i$ , где  $\vec{v}_O$  — скорость центра обруча,  $\vec{v}'_i$  — скорость  $m_i$  относительно поступательно движущейся системы координат, центр которой совпадает с центром обруча  $O$ .

Кинетическая энергия обруча равна (здесь и далее  $\sum_{i=1}^N D_i = D_1 + D_2 + \dots + D_N$ , а точкой будем обозначать скалярное произведение векторов):

$$E = 1/2 \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = 1/2 \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = 1/2 \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_0 + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}'_i) = 1/2 \sum_{i=1}^N m_i (v_0^2 + v_i'^2)$$

Еще одно слагаемое равно нулю в силу закона сохранения импульса.

Таким образом, для кинетической энергии получим:

$$E = 1/2 \sum_{i=1}^N m_i v_0^2 + 1/2 \sum_{i=1}^N m_i v_i'^2$$

Вычислим каждое слагаемое в последней формуле.

$$1/2 \sum_{i=1}^N m_i v_0^2 = 1/2 v_0^2 \sum_{i=1}^N m_i = V^2/2 \sum_{i=1}^N m_i.$$

Движение обруча относительно подвижной системы отсчета — вращение с постоянной угловой скоростью  $\omega = V/R$  (без проскальзывания), то есть линейная скорость всех точек обруча по величине равна  $V$ , т.е.

$$1/2 \sum_{i=1}^N m_i v_i'^2 = V^2/2 \sum_{i=1}^N m_i = V^2/2 m.$$

Итак,  $E = V^2/2m + V^2/2m = mV^2$ , что и требовалось доказать.