

**Олимпиада школьников «Ломоносов»
по механике и математическому моделированию**

Задания заключительного этапа 2024/2025 учебного года для 7 – 8 классов

Вариант 25-78

1. В три одинаковых стакана налили одинаковое количество воды. Затем в каждый из них опустили по кубику льда. Все кубики одинаковые по внешним размерам, но в первом из них имеется пустота объема V , во втором – запаяна дробинка объемом V , а в третьем – запаян деревянный шарик объемом V . В каком из стаканов будет самый низкий уровень воды после того, как лед растает, а в каком самый высокий?
2. Плот преодолевает расстояние между пристанями Верхняя и Нижняя, двигаясь вниз по течению реки, на 6 часов дольше, чем моторная лодка. Эта же лодка данное расстояние проплывает на 1 час быстрее, чем при движении в противоположном направлении. За какое наименьшее возможное время плот может доплыть от Верхней до Нижней?
3. С какой собственной скоростью должен лететь самолет, чтобы за два часа пролететь в северном направлении вдоль меридиана 1000 км при наличии ветра, дующего примерно с юго-западного направления под углом 60° к меридиану со скоростью 30 км/час? Дайте как точный ответ, так и ответ, округленный до ближайшего целого числа (в км/час).
4. Глафира скачивает из Интернета видеоролик с постоянной скоростью. В полдень, когда часы показывали время в часах, минутах и секундах 12:00:00, она заметила, что скачалось 84 МБ и оставшееся время загрузки составило 30 секунд. А после того, как она скачала 96 МБ, оставшееся время загрузки составило 12 секунд. Какое время показывали часы в момент начала загрузки ролика?
5. В горячую воду опустили холодный металлический брусок, масса которого в 2 раза меньше массы воды, а теплоемкость металла в 4,5 раза меньше теплоемкости воды. В некоторый момент времени t_1 температура воды была на 5% больше температуры термодинамического равновесия T_e системы «вода – металлический брусок». На сколько процентов в этот момент температура металлического бруска меньше температуры T_e ?

30 марта 2025 г.

Решение.

1. **Ответ: стакан с дробинкой – максимум; первый стакан – минимум.** Во всех стаканах к исходно одинаковым объемам воды V_0 добавились одинаковые объемы V воды из растаявшего льда, так как массы льда были исходно одинаковые. Наибольший уровень воды $V_0 + V + v$ будет в стакане с потонувшей дробинкой (v – объем дробинки), а наименьший – в первом стакане, где был лед с пустотой.
2. **Ответ: 7, 5.** Пусть собственная скорость лодки и скорость течения реки равны соответственно x км/ч и y км/ч. Если плот преодолеет расстояние S км между пристанями A и B за t часов, то

$$ty = (t - 6)(x + y) = (t - 5)(x - y)$$

$$(x + y)/y = t/(t - 6) \quad \text{и} \quad (x - y)/y = t/(t - 5).$$

Тогда

$$2 = (x + y)/y - (x - y)/y = t/(t - 6) - t/(t - 5) \Rightarrow 2(t - 5)(t - 6) = t.$$

Из последнего квадратного уравнения получаем $t = 4$ или $t = 15/2$. По условию задачи $t > 6$, поэтому $t = 15/2 = 7,5$ (часов)

3. **Ответ:** $10\sqrt{2359} = \sqrt{235900} \approx 486$ км/ч.

Нужная скорость находится из треугольника скоростей с известными сторонами 30 км/ч и 500 км/ч (это 1000 км за 2 часа) и углом между ними 60° . Легче всего это сделать по теореме косинусов. Но так как она в 7-8 классах еще не изучается, можно дважды воспользоваться теоремой Пифагора. Вначале находится катеты «большого» прямоугольного треугольника с углами 30° и 60° , равные $500/2 = 250$ и $250\sqrt{3}$. После этого нужная скорость это гипотенуза «маленького» треугольника с катетами $250\sqrt{3}$ и $250 - 30 = 220$. Квадрат скорости получается равным $(250\sqrt{3})^2 + 220^2 = 100 \cdot (625 \cdot 3 + 484) = 100 \cdot 2359$, откуда скорость равна $10\sqrt{2359}$ км/ч.

Для получения ближайшего целого нужно или уметь вычислять корни «в столбик», или, сделав «контрольные» возведения в квадрат, постепенно «подобраться» к ближайшему целому (примерно 5 минут вычислений в столбик). В «чистовике» достаточно написать, что $485,5^2 < 235900 < 486$. Это означает, что ближайшее целое есть 486.

Приближенное значение (для контроля): 485,695...

4. **Ответ: 11:57:54.** На скачивание $96 - 84 = 12$ Мб ей потребовалось $30 - 12 = 18$ секунд. Это означает, что скорость скачивания равна $12/18 = 2/3$ Мб/сек.

Тогда на скачивание 84 Мб ей потребовалось $84 : \frac{2}{3} = 126$ сек., а поэтому Глафира начала скачивание ролика за 2 минуты и 6 секунд до полудня. Значит, время начала скачивания ролика: 11 часов, 57 минут, 54 секунды.

5. **Ответ:** 45%. Уравнение теплового баланса при достижении теплового равновесия:

$$cm(T_1 - T_e) = \frac{cm}{9}(T_e - T_2) \Rightarrow T_e = \frac{9T_1 + T_2}{10} \quad (1)$$

В момент времени t_0 уравнение теплового баланса:

$$cm(T_1 - T') = \frac{cm}{9}(T'' - T_2) \quad (2)$$

Обозначим $\frac{T'}{T_e} = 1 + \alpha$ ($\alpha = 0,05$); $\frac{T''}{T_e} = 1 - \beta$ (β – искомая величина).

Из (2) с учетом (1) и обозначений:

$$9(T_1 - T') = (T'' - T_2) \Rightarrow 9T' + T'' = 9T_1 + T_2; 9T' + T'' = T_e \Rightarrow 9(1 + \alpha) + (1 - \beta) = 10$$

И так, $\beta = 9\alpha = 0,45$

**Олимпиада школьников «Ломоносов»
по механике и математическому моделированию**

Задания заключительного этапа 2024/2025 учебного года для 9 – 10 классов

Вариант 25-910

1. Плот преодолевает расстояние между пристанями Верхняя и Нижняя, двигаясь вниз по течению реки, на 6 часов дольше, чем моторная лодка. Эта же лодка данное расстояние проплывает на 1 час быстрее, чем при движении в противоположном направлении. За какое наименьшее возможное время плот может доплыть от Верхней до Нижней??
2. С какой собственной скоростью должен лететь самолет, чтобы за два часа пролететь в северном направлении вдоль меридиана 1000 км при наличии ветра, дующего примерно с юго-западного направления под углом 60° к меридиану со скоростью $8\frac{1}{3}$ м/сек? Дайте как точный ответ, так и ответ, округленный до ближайшего целого числа (в км/час).
3. Глафира скачивает из Интернета видеоролик с постоянной скоростью. В полдень, когда часы показывали время в часах, минутах и секундах 12:00:00, она заметила, что скачалось 84 МБ и оставшееся время загрузки составило 30 секунд. А после того, как она скачала 96 МБ, оставшееся время загрузки составило 12 секунд. Какое время показывали часы в момент начала загрузки ролика?
4. На расстоянии 2 м от края стола высотой 80 см лежит маленький брусок. Ему придают начальную скорость 5 м/с в направлении края. Брусок скользит по столешнице и затем слетает со стола. Найдите расстояние от точки отрыва бруска от стола до точки, в которой брусок коснется пола. Коэффициент трения между бруском и столешницей равен 0,4, ускорение свободного падения считать равным $10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.
5. Стены, пол и потолок комнаты параллельны координатным плоскостям прямоугольной системы координат. Улитка может перемещаться либо по потолку (плоскость $z = 3$) в любом направлении, либо по полу (плоскость $z = 0$) в любом направлении, либо параллельно оси Oz в плоскости одной из четырех стен (плоскости $x = 0, y = 0, x = 10, y = 10$). Найдите минимальное время, за которое улитка может добраться из точки A с координатами $x = 4, y = 3, z = 3$ в точку B с координатами $x = 7, y = 7, z = 0$, если скорость улитки при движении по потолку или по полу равна 1 м/мин, а при спуске по стене 2 м/мин. Ответ дайте в минутах, при необходимости округлив его до десятых. Все координаты указаны в метрах.
6. В горячую воду опустили холодный металлический брусок, масса которого в 2 раза меньше массы воды, а теплоемкость металла в 4,5 раза меньше теплоемкости воды. В некоторый момент времени t_1 температура воды была на 5% больше температуры термодинамического равновесия T_e системы «вода – металлический брусок». На сколько процентов в этот момент температура металлического бруска меньше температуры T_e ?

Решение.

1. **Ответ:** 7, 5. Пусть собственная скорость лодки и скорость течения реки равны соответственно x км/ч и y км/ч. Если плот преодолеет расстояние S км между пристанями A и B за t часов, то

$$ty = (t - 6)(x + y) = (t - 5)(x - y)$$

$$(x + y)/y = t/(t - 6) \text{ и } (x - y)/y = t/(t - 5).$$

Тогда

$$2 = (x + y)/y - (x - y)/y = t/(t - 6) - t/(t - 5) \Rightarrow 2(t - 5)(t - 4) = t.$$

Из последнего квадратного уравнения получаем $t = 4$ или $t = 15/2$. По условию задачи $t > 6$, поэтому $t = 15/2 = 7,5$ (часов).

2. **Ответ:** $10\sqrt{2359} = \sqrt{235900} \approx 486$ км/ч. Нужная скорость находится по теореме косинусов из треугольника скоростей с известными сторонами 30 км/ч (это $8\frac{1}{3}$ м/сек) и 500 км/ч (это 1000 км за 2 часа) и углом между ними 60° . Квадрат скорости получается равным $30^2 + 500^2 - 30 \cdot 500 = 100 \cdot (9 + 2500 - 150) = 100 \cdot 2359$, отсюда скорость равна $10\sqrt{2359}$ км/ч.

Для получения ближайшего целого нужно или уметь вычислять корни «в столбик», или, сделав «контрольные» возведения в квадрат, постепенно «подобраться» к ближайшему целому (примерно 5 минут вычислений в столбик). В «чистовике» достаточно написать, что $485,5^2 < 235900 < 486$. Это означает, что ближайшее целое есть 486.

Приближенное значение (для контроля): 485,695...

3. **Ответ:** 11:57:54. На скачивание $96 - 84 = 12$ Мб ей потребовалось $30 - 12 = 18$ секунд. Это означает, что скорость скачивания равна $12/18 = 2/3$ Мб/сек. Тогда на скачивание 84 Мб ей потребовалось $84 : \frac{2}{3} = 126$ сек., а поэтому Глафира начала скачивание ролика за 2 минуты и 6 секунд до полудня. Значит, время начала скачивания ролика: 11 часов, 57 минут, 54 секунды.

4. **Ответ:** 1,44 м. Из закона сохранения энергии скорость при падении на пол будет равна: $V_2^2 = V_0^2 - 2gl\mu + 2gh \Rightarrow V_2 = \frac{5m}{c}, V_0 = \frac{5m}{c}, l = 2 \text{ м}, h = 0,8 \text{ м}, \mu = 0,4$. Падение без начальной скорости с высоты h занимает время $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,4 \text{ с}$. При этом скорость при падении будет равна

$V_y = gt = 4 \text{ м/с}$. Это значит, что брусок падает под углом α : $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Отсюда следует, что проекция скорости на горизонтальное направление будет равна

$$V_1 = V_2 \cos \alpha = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3 \text{ м/с}.$$

Таким образом, брусок улетит на расстояние $S = V_1 \cdot t = 1,2 \text{ м}$. Остается вычислить гипотенузу $\sqrt{1,2^2 + 0,8^2} = \sqrt{2,08} \approx 1,44 \text{ м}$.

5. **Ответ:** $\sqrt{97} + 1,5 \approx 11,3$ минуты. Спроектируем ситуацию на плоскость $z = 0$. Отразим точку B симметрично относительно стен комнаты, получим точки B_1, B_2, B_3 и B_4 (рис. 1).

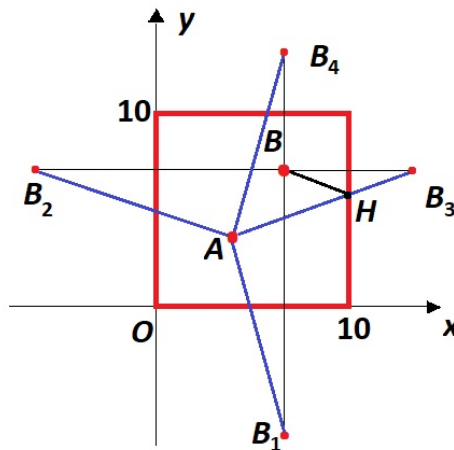


Рис. 1

Найдем расстояния AB_1, AB_2, AB_3, AB_4 :

$$AB_1^2 = (7 - 4)^2 + (-7 - 3)^2 = 9 + 100 = 109;$$

$$AB_2^2 = (-7 - 4)^2 + (7 - 3)^2 = 121 + 16 = 137;$$

$$AB_3^2 = (13 - 4)^2 + (7 - 3)^2 = 81 + 16 = 97; \quad AB_4^2 = (7 - 4)^2 + (13 - 3)^2 = 9 + 100 = 109.$$

Так как наименьшим является $AB_3 = \sqrt{97}$, то кратчайший маршрут улитки состоит из отрезка длиной AH по потолку, спуска по вертикали в этой точке, отрезка длиной HB по полу. Длина маршрута составит $AH + HB = AB_3 = \sqrt{97}$ метров по потолку и по полу и 3 метра по вертикальной стене.

Время движения равно $\frac{\sqrt{97}}{1} + \frac{3}{2}$ минут.

Так как $9,8^2 = 96,04 < 97 < 97,0225 = 9,85^2$, то

$$\sqrt{97} + 1,5 \in (9,8 + 1,5; 9,85 + 1,5) = (11,3; 11,35). \text{ Значит, } \sqrt{97} + 1,5 \approx 11,3.$$

6. **Ответ:** 45%. Уравнение теплового баланса при достижении теплового равновесия:

$$cm(T_1 - T_e) = \frac{cm}{9}(T_e - T_2) \Rightarrow T_e = \frac{9T_1 + T_2}{10} \quad (1)$$

В момент времени t_0 уравнение теплового баланса:

$$cm(T_1 - T') = \frac{cm}{9}(T'' - T_2) \quad (2)$$

Обозначим $\frac{T'}{T_e} = 1 + \alpha$ ($\alpha = 0,05$); $\frac{T''}{T_e} = 1 - \beta$ (β – искомая величина).

Из (2) с учетом (1) и обозначений:

$$9(T_1 - T') = (T'' - T_2) \Rightarrow 9T' + T'' = 9T_1 + T_2; 9T' + T'' = T_e \Rightarrow 9(1 + \alpha) + (1 - \beta) = 10$$

И так, $\beta = 9\alpha = 0,45$.